Hristev – mecanica

rezolvate D. Roșca.

Cap. I – III

11.1 – Soluție, Topliceanu Radu, XA

Legea de compunere a vitezelor în mecanica clasică este $$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$
unde $\vec{v}_a$ este viteza mobilului față de reperul presupus fix (inerțial, legat de exemplu de Pământ), $\vec{v}_r$ este viteza sa față de un reper mobil, ce se mișcă cu viteza $\vec{v}_t$ față de reperul fix considerat ($\vec{v}_a$, viteza absolută; $\vec{v}_r$, viteza relativă; $\vec{v}_t$, viteza de transport).

Notând, în cazul nostru, cu $\vec{v}_{SP}$ viteza șalupei față de Pământ (viteza absolută), cu $\vec{v}_{SA}$ viteza șalupei față de apă (viteza relativă) și cu $\vec{v}_{AP}$ viteza apei față de Pământ (viteza de transport), avem:

$$\vec{v}_{SP} = \vec{v}_{SA} + \vec{v}_{AP} \qquad (1)$$

Proiectând această relație pe o axă având direcția și sensul curgerii apei, obținem, în cazul mișcării șalupei în sensul curgerii apei

$$v_{SP} = v_{SA} + v_{AP} \qquad (2)$$

iar în cazul mișcării șalupei împotriva cu-

curentului apei $\quad -v'_{SP} = -v'_{SA} + v'_{AP} \quad (3)$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (2) și (3) obținem $\quad v_{AP} = \frac{v_{SP} - v'_{SP}}{2}$; $v_{SA} = \frac{v_{SP} + v'_{SP}}{2}$

În cazul nostru $v_{SP} = v_1$ și $v'_{SP} = v_2$. Deci:

$$v_{AP} = \frac{v_1 - v_2}{2} \; ; \; v_{SA} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Numeric: $v_{AP} = 2$ Km/h ; $v_{SA} = 18$ Km/h.

1.1.2 Soluție, Topliceanu Radu, XA

Graficele legilor de mișcare fiind drepte ce trec prin origine, rezultă că deplasările sînt proporționale cu duratele, adică mișcările sînt uniforme:

$$v_1 = \frac{x_1}{t_1} \quad \text{și} \quad v_2 = \frac{x_2}{t_2}$$

Din figură deducem că

la $t_1 = 1$ oră , avem $x_1 = 20$ km

la $t_2 = 2$ ore , avem $x_2 = 10$ km

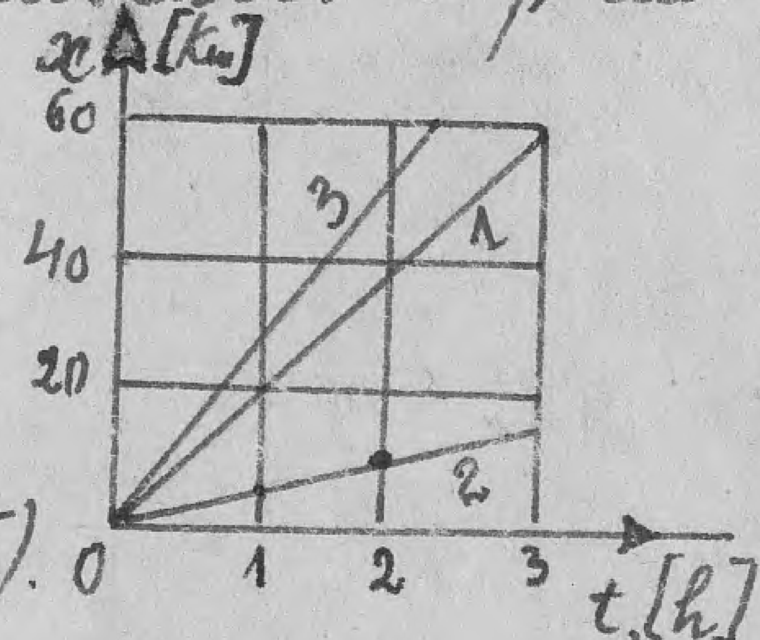
Așadar

$$v_1 = \frac{20}{1} = 20 \text{ Km/h} \; ; \; v_2 = \frac{10}{2} = 5 \text{ Km/h}.$$

Viteza vaporului față de Pămînt la mișcarea sa pe rîu în sensul curgerii apei va fi

$$v_3 = v_1 + v_2 \; ; \; v_3 = 25 \text{ Km/h}$$

v_3 fiind constantă, mișcarea va fi uniformă, deci graficul coordonatei va fi o dreaptă ce trece prin origine și punctul (1,25).



1.1.3 Soluție, Toplicianu Radu, X A

Notând v_{1P} și v_{2P}, respectiv, vitezele față de Pământ a corpurilor (1) și (2), viteza de „apropiere" a corpului (1) față de (2) va fi

$$u_1 = v_{1P} + v_{2P} \qquad (1)$$

când corpurile merg unul „spre" altul, și

$$u_2 = v_{1P} - v_{2P} \qquad (2)$$

când ele merg unul „după" altul.

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (1) și (2), obținem

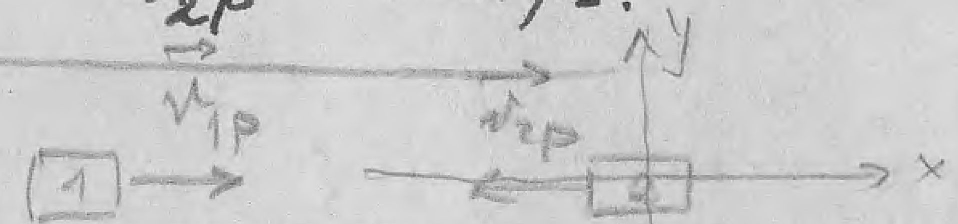
$$v_{1P} = \frac{u_1+u_2}{2} \; ; \qquad v_{2P} = \frac{u_1-u_2}{2}$$

Numeric:

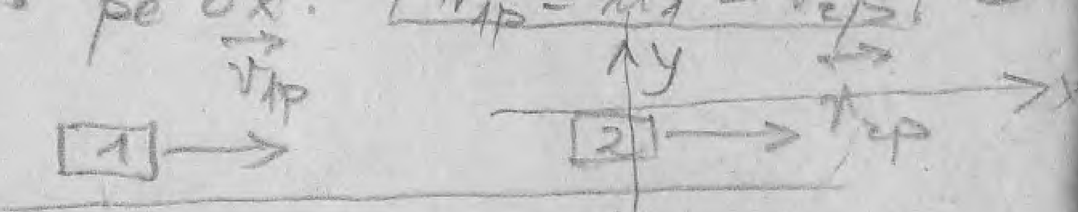
$$v_{1P} = 2\ m/s \; ; \qquad v_{2P} = 1\ m/s .$$

altă soluție:

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$



$\vec{v}_{1P} = \vec{u}_1 + \vec{v}_{2P}$ proiectată pe Ox: $\boxed{v_{1P} = u_1 - v_{2P}}$ (1)



$\vec{v}_{1P} = \vec{u}_2 + \vec{v}_{2P}$ proiectată pe Ox: $\boxed{v_{1P} = u_2 + v_{2P}}$ (2)

Prin adunarea lui (1) și (2): $v_{1P} = \frac{u_1+u_2}{2}$

care dusă în (2): $v_{2P} = \frac{u_1-u_2}{2}$

H-1.1.6

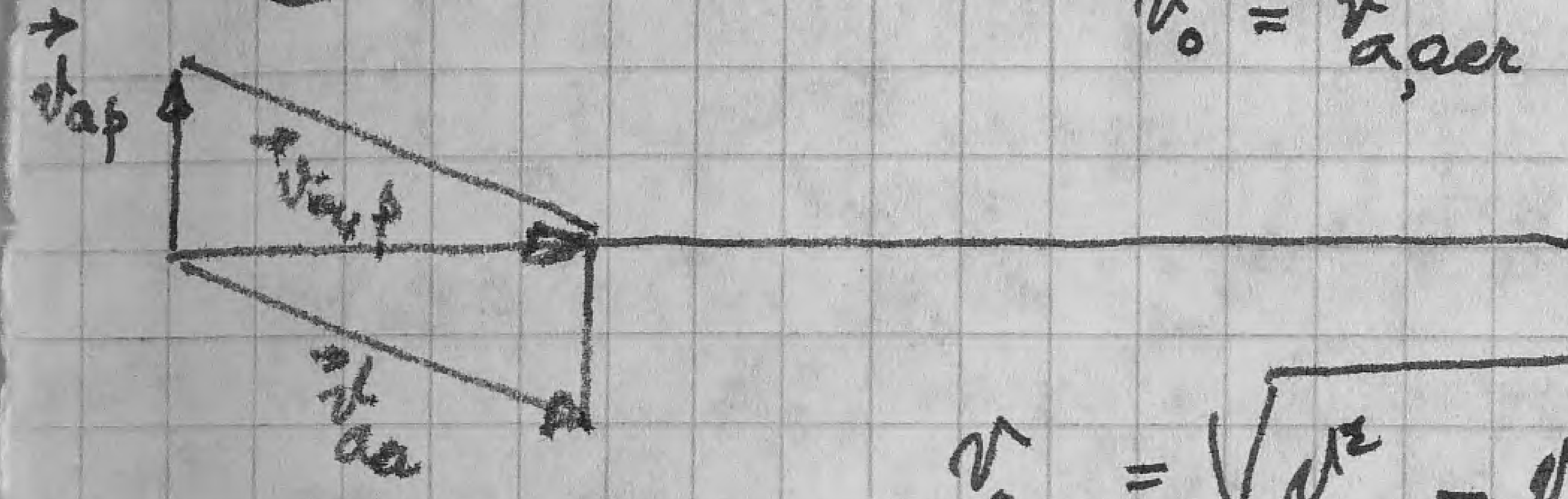
$d = 150\ km$; $v_0 = 360\ km/h$; $v = 20\ m/s$

a) $t_1 = ?$, vânt perpend. pe traiectorie;

b) $t_2 = ?$, vânt pe direcția traiectoriei;

c) $t_3 = ?$, nu bate vântul.

(a)



$v_0 = v_{a,aer}$; $v = v_{aer,p}$.

$v_{avion,pmt}$

$$v_{av,p} = \sqrt{v_{aa}^2 - v_{ap}^2}$$

$v_{av,p} = \sqrt{v_0^2 - v^2}$ situația este aceeași la dus ca și la întors. Deci:

$$\boxed{t_1 = \frac{2d}{\sqrt{v_0^2 - v^2}}}$$

(b) La dus: $(v_{aa} + v_{ap})\,t_d = d$; $t_d = \frac{d}{v_0+v}$

La întors $(v_{aa} - v_{ap})\,t_i = d$; $t_i = \frac{d}{v_0 - v}$

$$t_2 = t_d + t_i = d\,\frac{v_0 - v + v_0 + v}{v_0^2 - v^2} = \frac{2v_0 d}{v_0^2 - v^2}$$

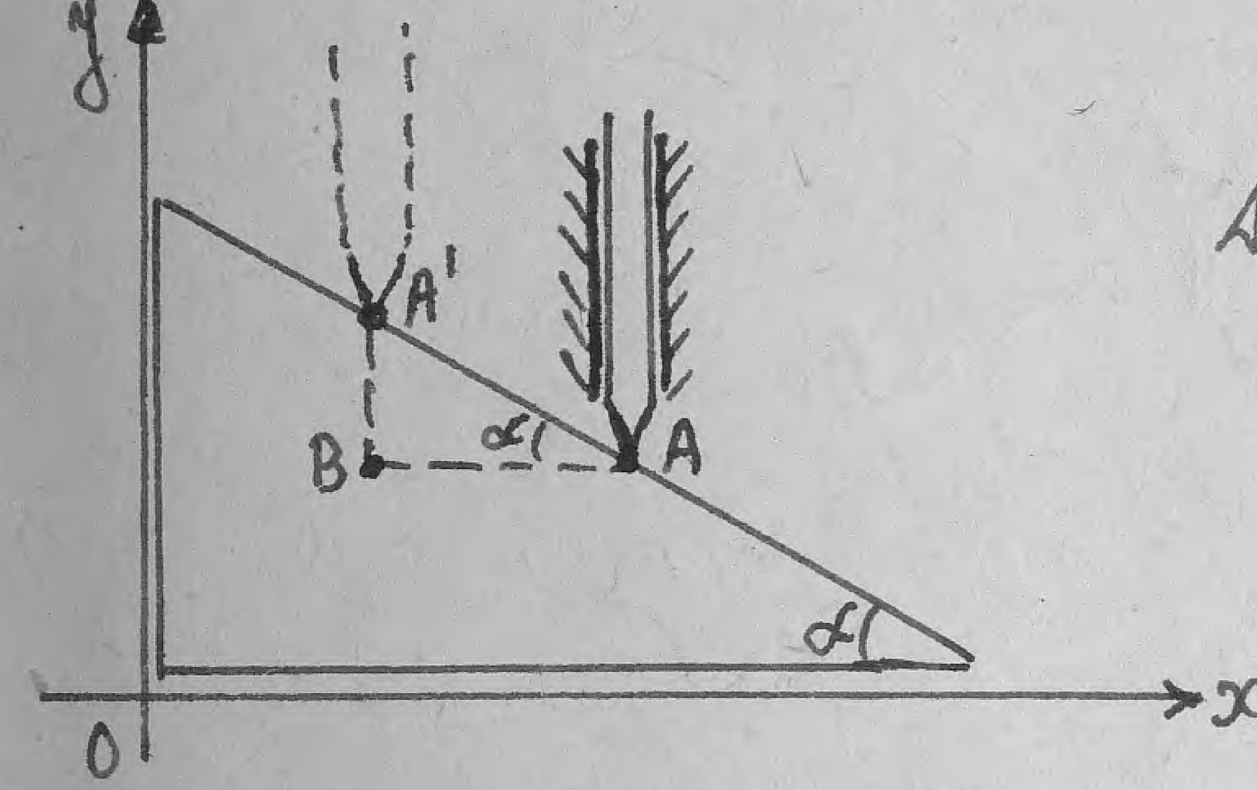
$$\boxed{t_2 = \frac{2v_0 d}{v_0^2 - v^2}}$$

(c) $\boxed{t_3 = \frac{2d}{v_0}}$

1.1.7

Soluția 1, Topliceanu Radu, X A

Față de un reper legat de pană, vârful tijei se deplasează cu $A'B$ pe verticală și cu AB pe orizontală, având, într-o secundă:



$AB = v_1$ și $A'B = v_2$.

Din figură

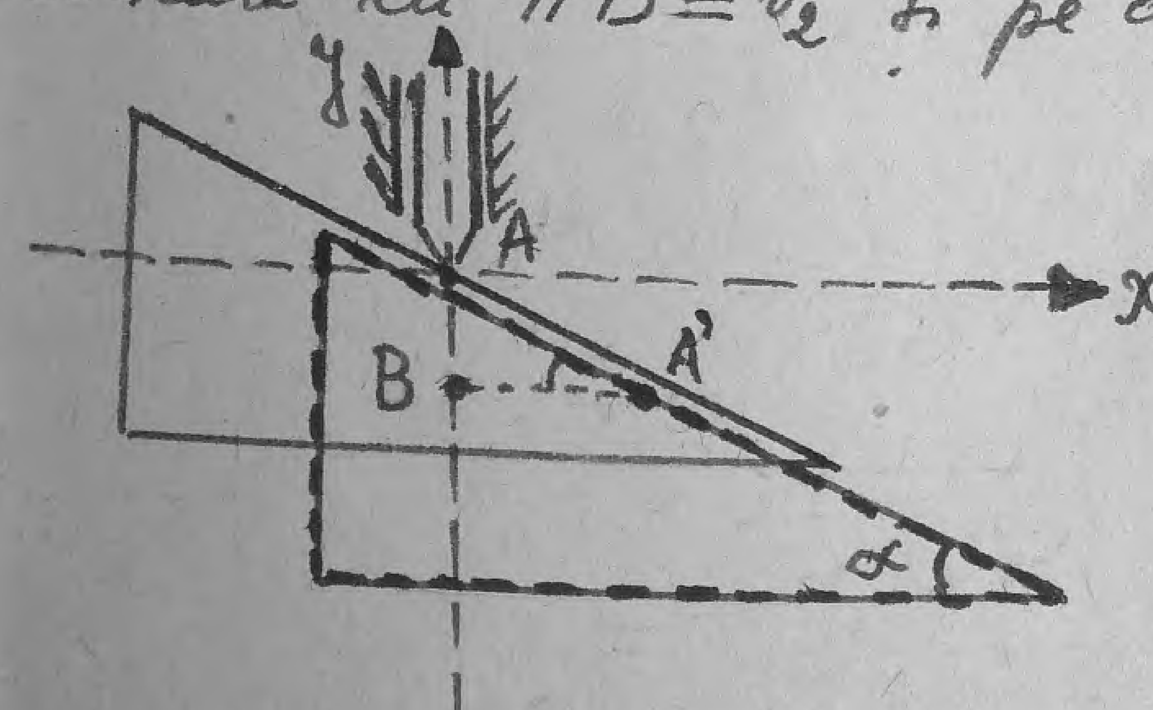
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$v_2 = 0{,}173 \text{ m/s}.$$

Soluția a 2-a, Roșca Dana, X B

Față de un reper legat de tijă, într-o secundă punctul A al penei se deplasează pe verticală cu $AB = v_2$ și pe orizontală cu $A'B = v_1$.

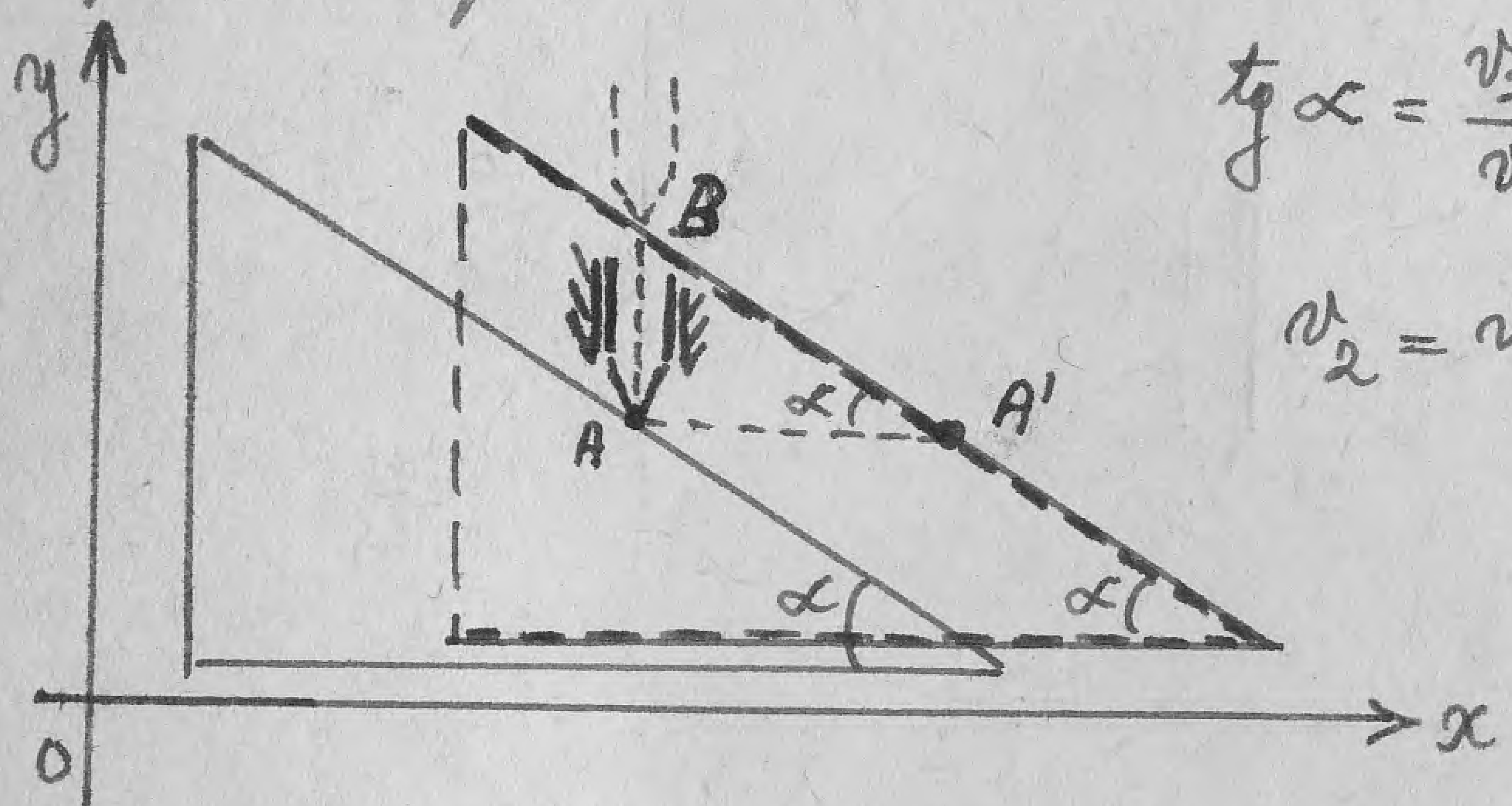


Avem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{v_1}$

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha$$

Soluția a 3-a, Roșca Dana, X B

Față de un reper legat de Pământ, într-o secundă punctul A al panei se deplasează pe orizontală cu $AA' = v_1$, iar vârful tijei se deplasează pe verticală cu $AB = v_2$



$$tg\,\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

$$v_2 = v_1\, tg\,\alpha$$

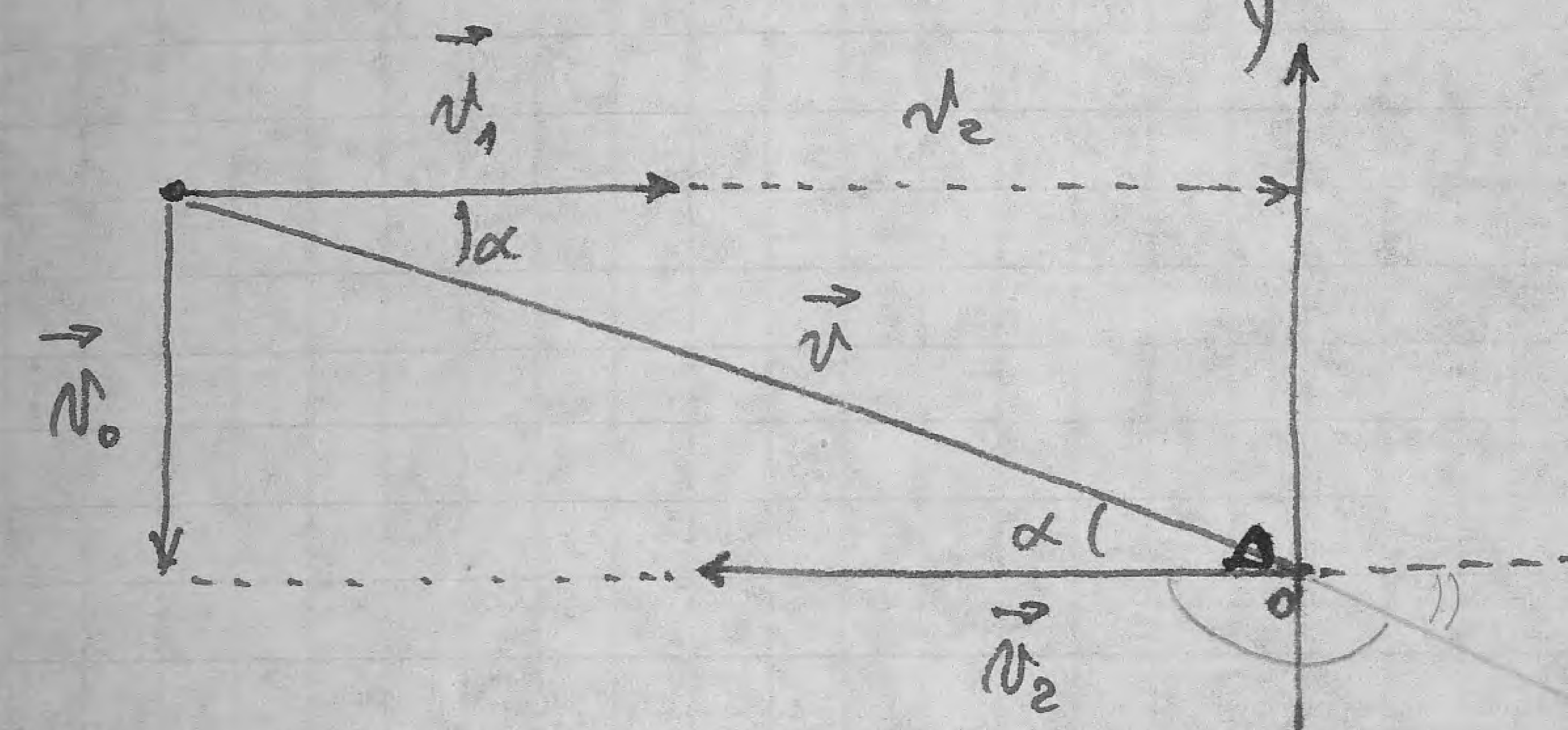
6

1.1.8.

$v_1 = 36$ km/h

$v_2 = 54$ km/h

$v_0 = 5$ m/s.



Față de un reper legat de vehiculu[l] al doilea, primul vehicul se apropie cu viteza $v_x = v_1 + v_2$, și cu această viteză se deplasează și pachetul aruncat.

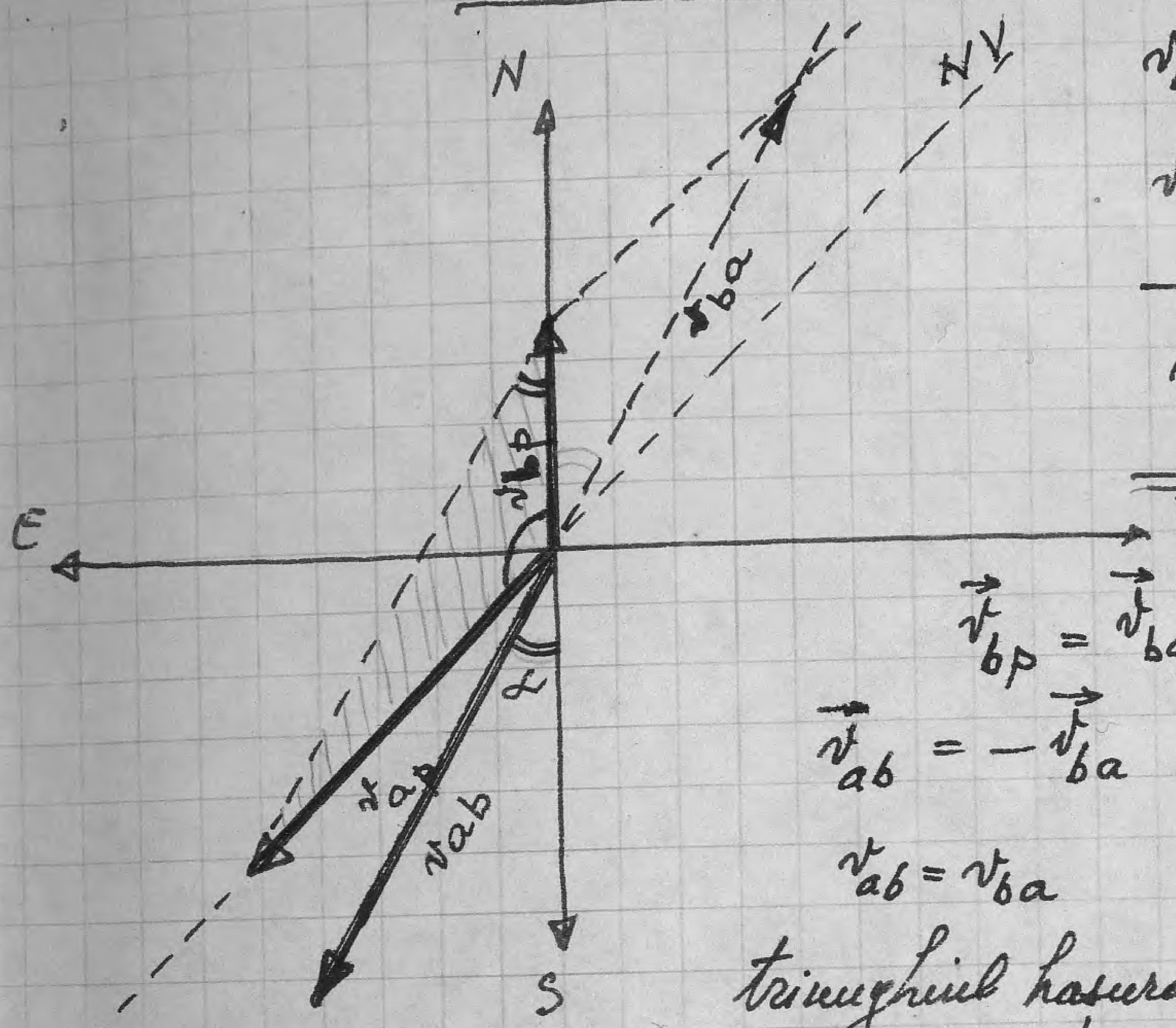
Viteza v a pachetului: $v = \sqrt{v_y^2 + v_x^2}$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + (v_1 + v_2)^2}}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{v_0}{v_1 + v_2}}$$

7

Hoister 1982 — 1.1.9



$v_{bp} = v$

$v_{ap} = v_0$

$v_{ab} = ?$

$\vec{v}_{bp} = \vec{v}_{ba} + \vec{v}_{ap}$

$\vec{v}_{ab} = -\vec{v}_{ba}$ și

$v_{ab} = v_{ba}$ Dar, din triunghiul hașurat:

$$v_{ba} = \sqrt{v_{ap}^2 + v_{bp}^2 - 2 v_{ap} v_{bp} \cos\frac{3\pi}{4}}$$ de unde:

$$\boxed{v_{ab} = \sqrt{v_0^2 + v^2 + 2 v_0 v \cos\frac{\pi}{4}}}$$

Din același triunghi, teorema sinusurilor ne dă:

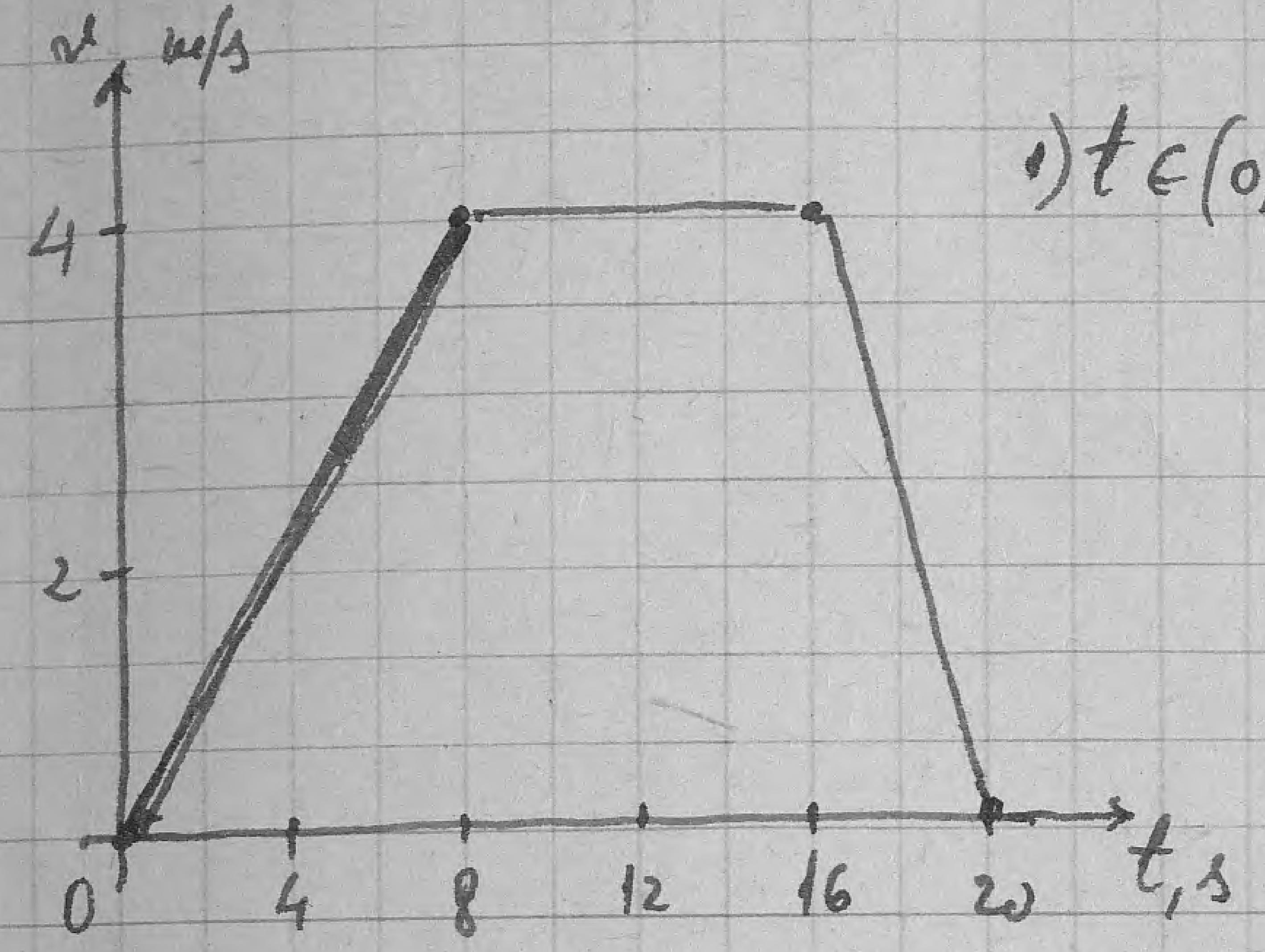
$$\frac{v_{ap}}{\sin\alpha} = \frac{v_{ba}}{\sin\frac{3\pi}{4}} \quad \text{sau} \quad \sin\alpha = \frac{v_{ap}}{v_{ba}} \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{v_0}{v} \sin\frac{\pi}{4}}$$

8

5 — 1.2.8 Hoister 1983

$G = 100\ kN$



1) $t \in (0,8)$ $\quad v = kt$

$k = \frac{v}{t} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Deci $\boxed{v = \frac{1}{2} t}$

Modul uniform de variație a vitezei arată că avem $a_1 = \text{const.}$ și

$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} = \frac{4-0}{8-0} = \frac{1}{2}$ $\quad a_1 = \frac{1}{2}\ m/s^2$

$F_{a1} = G - T_1$; $T_1 = G - F_{a1}$

$F_{a1} = m a_1$; $G = mg$; $m = \frac{G}{g}$

$T_1 = G - \frac{G}{g} \cdot a_1$ $\quad \boxed{T_1 = G\left(1 - \frac{a_1}{g}\right)}$

$T = 100 \cdot 10^3 \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 9{,}8}\right) = 10^5 \frac{19{,}6 - 1}{19{,}6} = \frac{18{,}6}{19{,}6} \cdot 10^5\ N$

$T = 0{,}949 \cdot 10^5\ N$ $\quad \boxed{T_1 = 95\ kN}$

2) $t \in (8;16)$ $\quad$ ~~$k = \frac{4}{4}$~~ $\quad v = 4$

viteza fiind constantă, mișcarea este uniformă

deci $G = \boxed{T = 100\ kN}$

3) $t \in (16;20)$ $\quad k = \frac{v}{t} = \frac{0-4}{20-16} = -\frac{4}{4} = -1$

$a_3 = -1\ m/s^2$

$T_3 = G\left(1 - \frac{a_3}{g}\right) = 100\cdot 10^3\left(1 + \frac{1}{9,8}\right) = \frac{10,8}{9,8}\cdot 10^5 = 1,10$

$\boxed{T_3 = 110\ KN}$

H. 1.2.13

$m_1 = 8\ kg$ masa maximă urcată cu accel. a

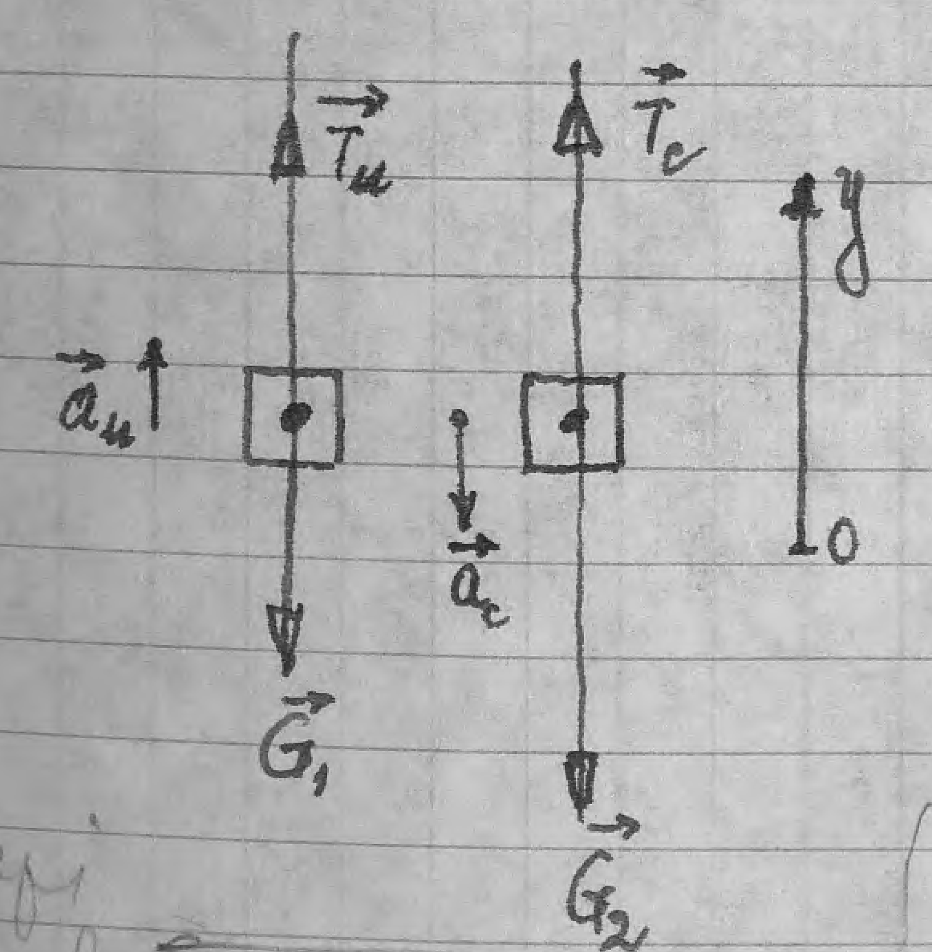
$m_2 = 12\ kg$ masa maximă coborâtă cu accel. a

$m = ?$ masa maximă urcată sau coborâtă unifor(m)

(deci cu $a = 0$)

Obs. 1°) $a_u = a_c = a$ este considerată dată. La fiecare „a" avem altă valoare a lui m_1 și altă valoare a lui m_2 (putem avea, eventual, $m_1 = m_2$).

2°) $T_u = T_c = T$ este tensiunea maximă suportată de fir. Ea nu depinde de valoarea lui a, nici de faptul că corpul urcă sau coboară, nici de valorile m_1 sau m_2, ci numai de calitatea firului.



$$\begin{cases} \vec{F}_{au} = \vec{G}_1 + \vec{T}_u & m_1 a = -m_1 g + T \\ \vec{F}_{ac} = \vec{G}_2 + \vec{T}_c & -m_2 a = -m_2 g + T \end{cases}$$

$$\boxed{T = m_1(g + a)} \quad (1)$$

$$\boxed{T = m_2(g - a)} \quad (2)$$

vezi rezolv. a 2-a

Relațiile (1) și (2) sunt adevărate indiferent de valoarea lui a, în particular și pentru $a=0$, când ~~masele~~ masele devin m_1^* și m_2^*:

$$\begin{cases} T = m_1^*(g+0) \\ T = m_2^*(g-0) \end{cases} \quad \begin{cases} T = m_1^* g \\ T = m_2^* g \end{cases} \quad m_1^* = m_2^* = m \quad \boxed{T = mg} \ (3)$$

Cu (1), (2) și (3) formăm un sistem

Din (1) și (2) calculăm pe T. Din (1) scot a:

$a = \frac{T}{m_1} - g$ și duc în (2):

$$T = m_2\left(g - \frac{T}{m_1} + g\right); \quad \frac{T}{m_2} + \frac{T}{m_1} = 2g$$

$$T\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = 2g; \quad \boxed{T = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}g}$$ și dusă

în (3): $$\boxed{m = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

Rezolvarea a II-a

analog ajungem la $T = m_1(g+a)$ (1)

$T = m_2(g-a)$ (2)

Calculăm a: $m_1(g+a) = m_2(g-a)$; $g+a = \frac{m_2}{m_1}(g-a)$

$$\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)a = \left(\frac{m_2}{m_1}-1\right)g; \quad \boxed{a = \frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g}$$

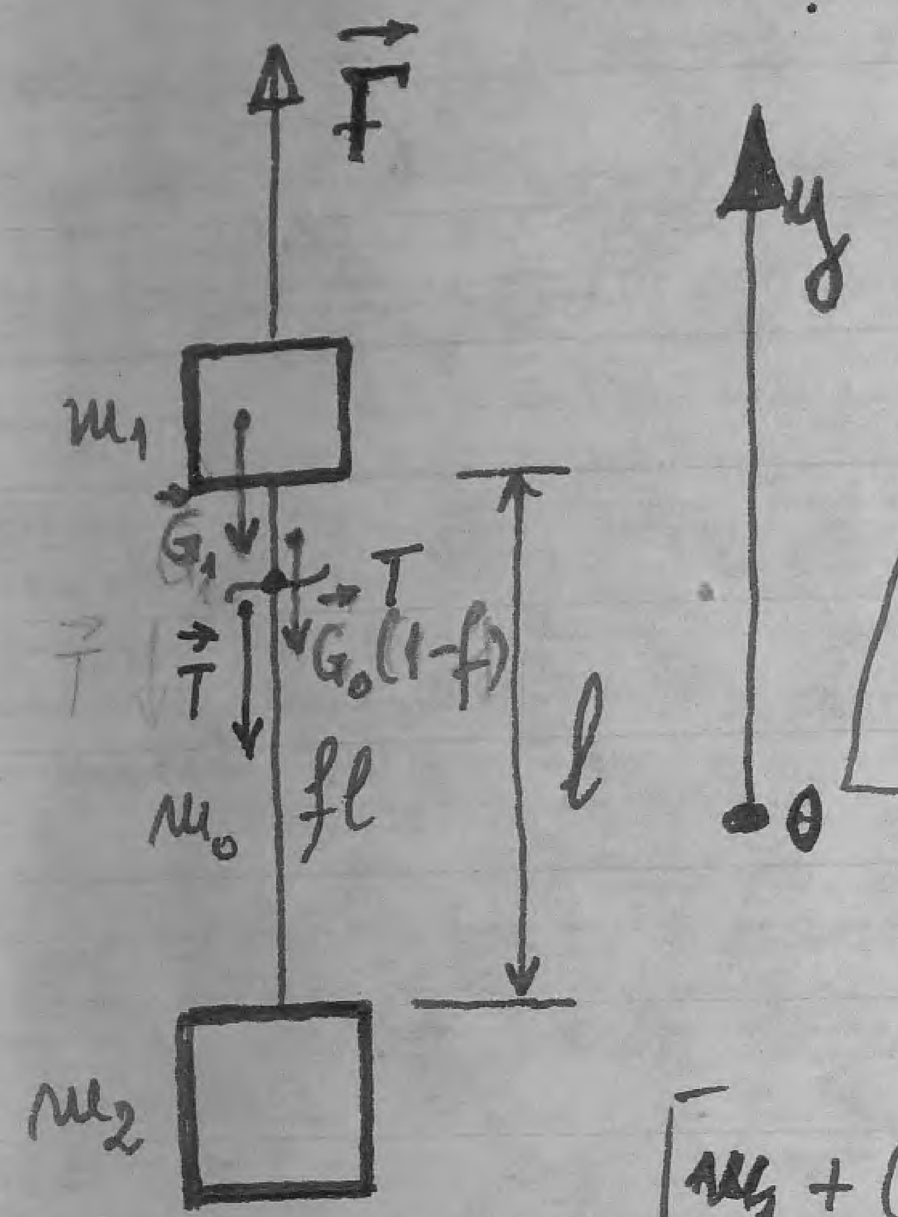
In mișcarea uniformă tensiunea maximă T va anula forța de greutate: $T = G$ (unde $T = m_1(g+a)$)

$$m_1\left(\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}g + g\right) = mg; \quad m_1 g\,\frac{2m_2}{m_1+m_2} = mg$$

$$\boxed{m = \frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}}$$

H.1.2.18

m_1; F ?; m_2; m_0; f; l.



$$\vec F_a = \vec F + \vec G_1 + \vec G_0 + \vec G_2$$

$$(m_1+m_2+m_0)a = F - (m_1+m_0+m_2)g$$

$$\boxed{a = \frac{F}{m_1+m_2+m_0} - g}$$

$$\vec F_{a^*} = \vec F + \vec G_1 + (1-f)\vec G_0 + \vec T$$

$$[m_1 + (1-f)m_0]a = F - m_1 g - (1-f)m_0 g - T$$

$$T = F - m_1 g - m_0 g + f m_0 g - (m_1+m_0-fm_0)a$$

$$T = F - m_1 g - m_0 g + f m_0 g - (m_1+m_0-fm_0)\frac{F}{m_1+m_2+m_0} + (m_1+m_0-fm_0)g$$

$$T = F - \cancel{m_1 g} - \cancel{m_0 g} + \cancel{f m_0 g} + \cancel{m_1 g} + \cancel{m_0 g} - \cancel{f m_0 g} - \frac{m_1+m_0-fm_0}{m_1+m_2+m_0}F$$

$$T = F - \frac{m_1+m_0-fm_0}{m_1+m_2+m_0}F = F\left(1 - \frac{m_1+m_0-fm_0}{m_1+m_2+m_0}\right)$$

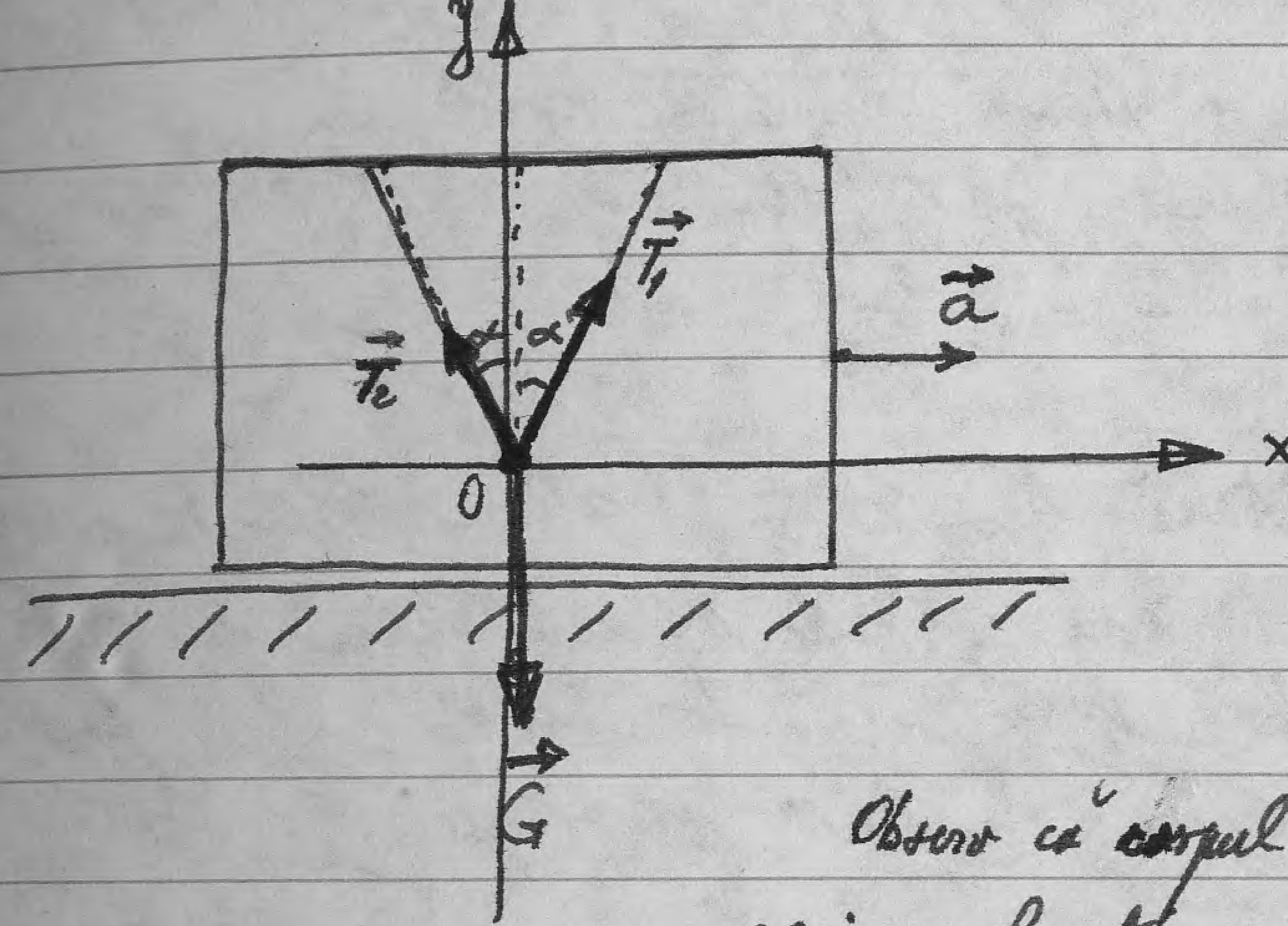
$$T = \frac{\cancel{m_1}+m_2+\cancel{m_0}-\cancel{m_1}-\cancel{m_0}+fm_0}{m_1+m_2+m_0}F$$

$$\boxed{T = \frac{m_2 + f m_0}{m_1+m_2+m_0}F}$$

11

H.1.2.19 — Soluția 1

$m = 1\,kg$. $2\alpha = 60^\circ$; $a = 4{,}9\ m/s^2$



Observ că corpul are ac-
eași accelerație ca vagonul.

$$\vec{G} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{F_a}$$

$Ox:\quad 0 - T_2 \sin\alpha + T_1 \sin\alpha = ma$

$Oy:\quad -mg + T_2\cos\alpha + T_1\cos\alpha = 0$

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{\sin\alpha}\ ; \quad T_1 + T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

$$2T_1 = m\left(\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{g}{\cos\alpha}\right) \qquad T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{g}{\cos\alpha}\right)$$

$$2T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha} - \frac{ma}{\sin\alpha} \qquad T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right)$$

$$\boxed{T_{1,2} = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} \pm \frac{a}{\sin\alpha}\right)}$$

<u>Discuție</u> 1. Avem tensiunile T_1 și T_2 determinate

mai sus (în modul) numai dacă $\frac{g}{\cos\alpha} \geq \frac{a}{\sin\alpha}$, deoarece numai cu această condiție T_1 și T_2 de mai sus sînt pozitive sau 0. (modulul trebuie să fie nenegativ)

Așadar, dacă $\boxed{tg\,\alpha \geq \frac{a}{g}}$ T_1 și T_2 sînt cele determinate și figura corespunde problemei.

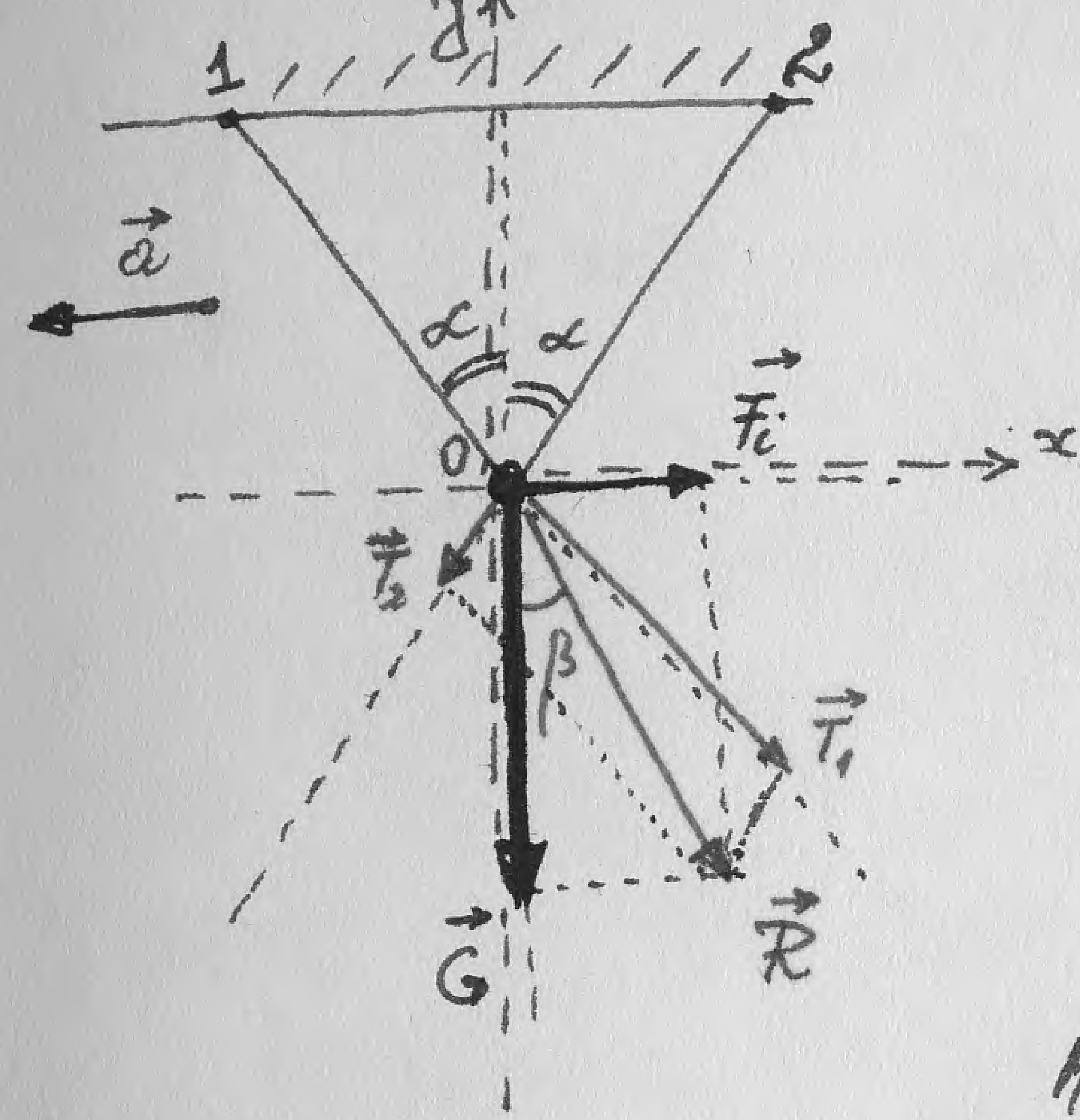
Evident, pentru $tg\,\alpha = \frac{a}{g}$ avem: $T_2 = 0$ și

$T_1 = \frac{ma}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha}$.

2. Dacă $tg\,\alpha < \frac{a}{g}$, atunci expresia găsită dă $T_2 < 0$, caz în care această expresie nu mai poate fi obținută, deoarece figura din care a fost dedusă nu mai corespunde problemei.

H – 1.2.19 Soluția 2

$m_1 = 1\,kg$; $2\alpha = 60°$; $a = 4{,}9\,m/s^2$; $T_1 = ?$; $T_2 = ?$



$\vec{G} = m\vec{g}$ $G = mg$

$\vec{F_i} = -m\vec{a}$ $F_i = ma$

Cazul 1

Dacă $\beta < \alpha$

$tg\,\beta < tg\,\alpha$

$\frac{F_i}{G} < tg\,\alpha$; $\boxed{tg\,\alpha > \frac{a}{g}}$

Avem:

$\vec{R} = \vec{F_i} + \vec{G}$; Ox: $R_x = F_i$; $R_y = -G$

$\vec{R} = \vec{T_1} + \vec{T_2}$; Ox: $R_x = T_{1x} + T_{2x}$; $F_i = T_1\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - T_2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$F_i = T_1 \sin\alpha - T_2\sin\alpha$; $\boxed{T_1 - T_2 = \frac{ma}{\sin\alpha}}$ (1)

Oy: $R_y = T_{1y} + T_{2y}$; $-G = -T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha$

$\boxed{T_1 + T_2 = \frac{mg}{\cos\alpha}}$ (2) Rezolvăm sistemul format de (1) și (2):

$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{g}{\cos\alpha}\right)$; $T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right)$

adică: $\boxed{T_{1,2} = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} \pm \frac{a}{\sin\alpha}\right)}$

Cazul 2

Dacă $\alpha = \beta$, adică $tg\,\alpha = \frac{a}{g}$, atunci:

$T_1 = R \cancel{= \sqrt{G^2 + F_i^2} = m\sqrt{g^2+a^2}}$; $\cancel{T_1 = m\sqrt{g^2+a^2}}$; $\cancel{T_2 = 0}$

$\sin\alpha = \frac{F_i}{R} = \frac{ma}{T_1}$; $T_1 = \frac{ma}{\sin\alpha}$

~~ceea ce rezultă din figură~~

sau $\cos\alpha = \frac{G}{R} = \frac{mg}{T_1}$; $T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}$

Acest caz este un caz limită a celui anterior. În adevăr:

$\alpha = \beta \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \sin\beta = \frac{F_i}{R} = \frac{ma}{\sqrt{G^2+F_i^2}} = \frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}}$

$tg\alpha = \frac{a}{g}$

care date în $T_{1,2}$ ne dă:

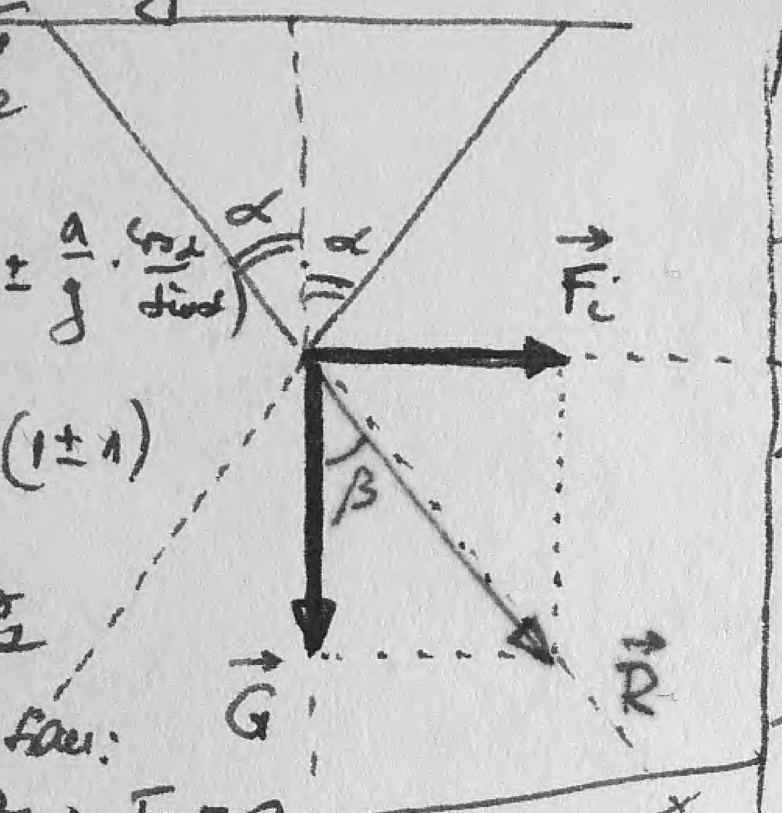
$T_{1,2} = \frac{mg}{2\cos\alpha}\left(1 \pm \frac{a}{g}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

$T_{1,2} = \frac{mg}{2\cos\alpha}(1 \pm 1)$

$T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha}$

$T_2 = 0$ sau:

$T_1 = \frac{ma}{\sin\alpha}$; $T_2 = 0$



$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{a^2}{g^2+a^2}}$

$\cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}$

Introducând sin α și cos α în T_1:

$T_1 = \frac{m}{2}\left(\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{g}{\cos\alpha}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{a}{\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}} + \frac{g}{\frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}}\right) =$

$= \frac{m}{2}\left(\sqrt{g^2+a^2} + \sqrt{g^2+a^2}\right) = m\sqrt{g^2+a^2}$ deci

$T_1 = m\sqrt{g^2+a^2}$

și introducând sin α și cos α în T_2:

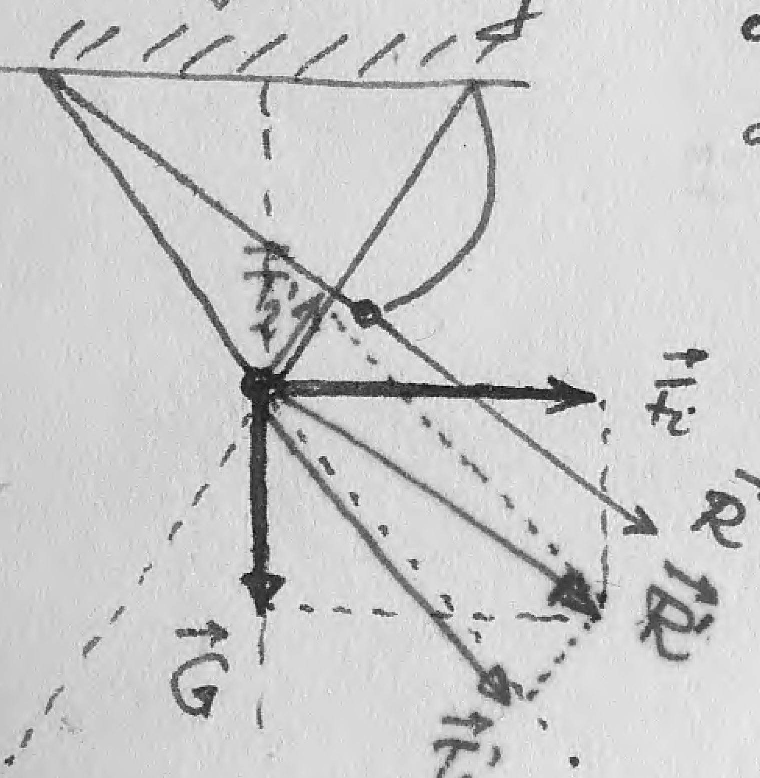
$T_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} - \frac{a}{\sin\alpha}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}} - \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}}\right) = \frac{m}{2}\left(\sqrt{g^2+a^2} - \sqrt{g^2+a^2}\right)$

$T_2 = 0$.

Cazul 3

Dacă: $\alpha < \beta$, deci $tg\alpha < tg\beta = \frac{F_i}{G} = \frac{a}{g}$ adică

$tg\alpha < \frac{a}{g}$

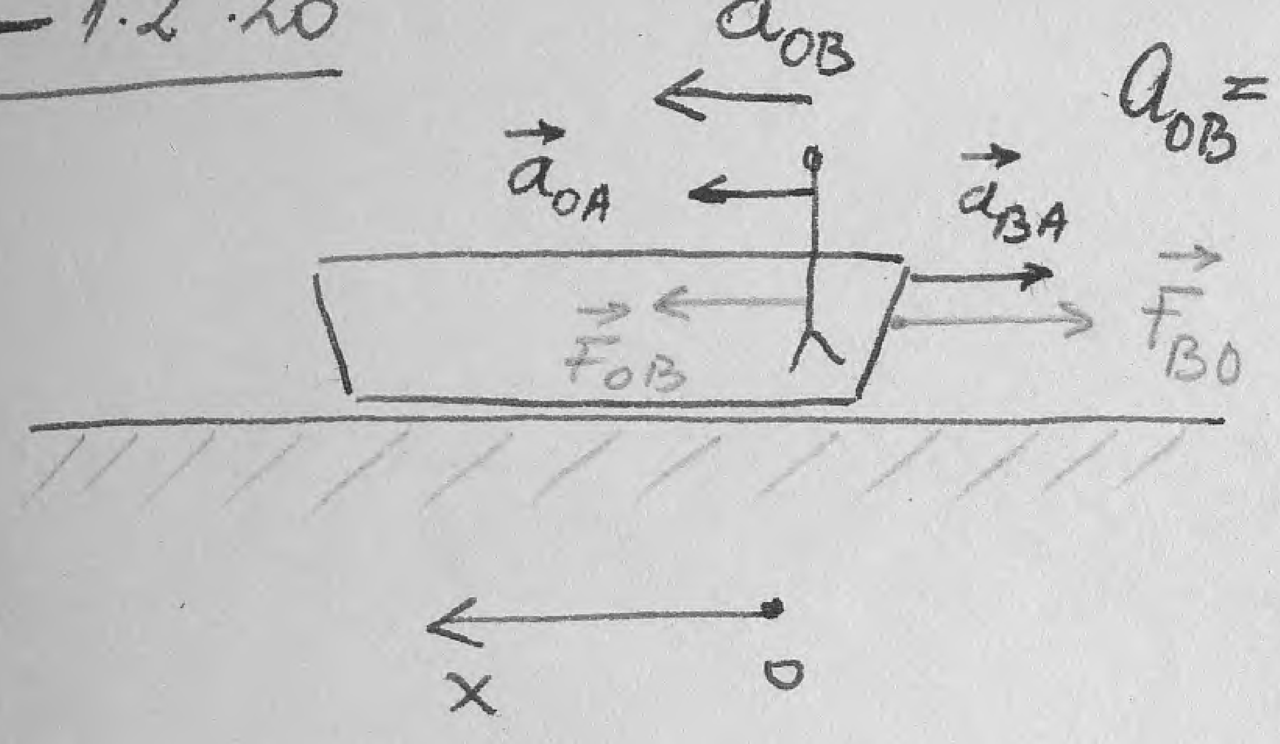


Avem în acest caz, conform figurii alăturate, o deplasare a corpului determinată de componenta $\vec{T_2}'$ a lui $\vec{R}'$, până aceasta se anulează, moment în care $T_2 = 0$ și $T_1 = R$, cazul reducându-se la cel precedent.

Concluzii: Indiferent dacă $tg\alpha \geq \frac{a}{g}$ sau $tg\alpha < \frac{a}{g}$, tensiunile sunt date de $\boxed{T_{1,2} = \frac{m}{2}\left(\frac{g}{\cos\alpha} \mp \frac{a}{\sin\alpha}\right)}$

Hristev[13] 1983

7 – 1.2.20



$a_{OB} = a = 2\,m/s^2$

$m = 60\,kg$

$M = 40\,kg$

$a_{OA} = ?$

$a_{BA} = ?$

$F_{BO} = ?$

$\vec{a}_{OA} = \vec{a}_{OB} + \vec{a}_{BA} \rightarrow$ de unde o știe?

$\vec{v}_{ao} = \vec{v}_{ro} + \vec{v}_{to}$

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$

$\Delta\vec{v}_a = \Delta\vec{v}_r + \Delta\vec{v}_t \quad | : \Delta t$

$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_t}$

$a_{OA} = a_{OB} - a_{BA}$

$a_{OA} = a - a_{BA}$

Omul interacționează numai cu barca, deoarece frecarea de apă a bărcii este neglijabilă

$\vec{F}_{BO} = -\vec{F}_{OB}$;

$M\cdot\vec{a}_{BA} = -m\cdot\vec{a}_{OA}$

$-M\cdot a_{BA} = -m\,a_{OA}$

$M a_{BA} = m(a - a_{BA})$

$(M+m)a_{BA} = ma$

$\boxed{a_{BA} = \frac{m}{m+M}a}$

$a_{BA} = \frac{60}{60+40}\cdot 2 = \frac{60}{100}\cdot 2 = 1{,}2\,m/s^2$

$a_{OA} = a - \frac{m}{m+M}a = a\frac{M}{m+M}$

$\boxed{a_{OA} = \frac{M}{m+M}a}$

$a_{OA} = \frac{40}{100}\cdot 2$

$a_{OA} = 0{,}8\,m/s^2$

$F_{BO} = M\cdot a_{BA}$

$\boxed{F_{BO} = \frac{Mma}{m+M}}$

$F_{BO} = \frac{2400\cdot 2}{100}$

$F_{BO} = 48\,N$

Verso

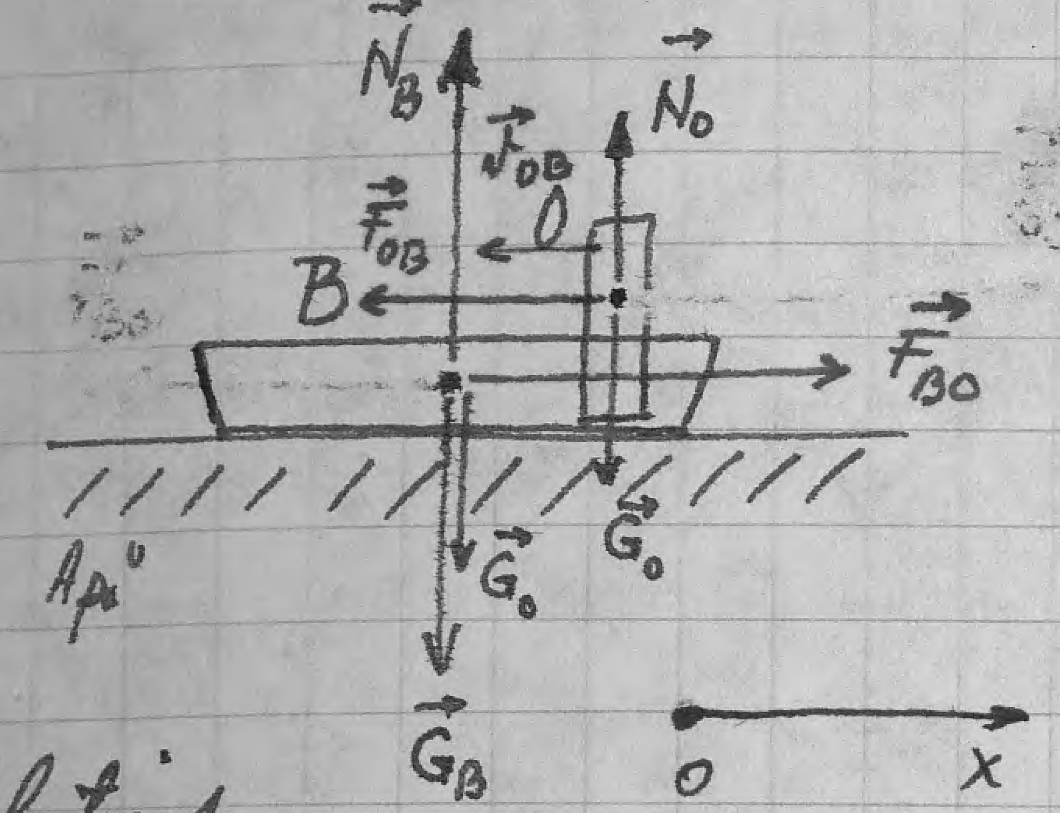
Noi am calculat modulele lui $\vec{a}_{BA}$, $\vec{a}_{OA}$ şi $\vec{F}_{BO}$. Proiecţiile pe axa Ox aleasă vor fi evident:

$$a_{BA} = -\frac{m}{m+M}\,a \quad ; \quad a_{OA} = \frac{M}{m+M}\,a$$

$$F_{BO} = -\frac{mMa}{m+M}$$

. —— .

H. 1.2.20



$$\vec N_0 = -\vec G_0$$

$$\vec N_B = -(\vec G_B + \vec G_0)$$

$$\vec F_0 = \vec G_0 + \vec N_0 + \vec F_{OB} = \vec F_{OB}$$

$$\vec F_B = \vec G_B + \vec G_0 + \vec N_B + \vec F_{BO} = \vec F_{BO}$$

Soluţia 1

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_0}{m} = \frac{\vec F_{OB}}{m} \quad ; \quad \boxed{|\vec a_{BA}| = \frac{|\vec F_B|}{M} = \frac{|\vec F_{BO}|}{M} = \frac{|\vec F_{OB}|}{M}}$$

$$\vec F_{OB} = m\,\vec a_{OA}$$

Barca mişcându-se accelerat faţă de apă, forţa ce accelerează omul faţă de barcă va fi F dată de:

$$\vec F = \vec F_{OB} + \vec F_i \qquad \text{unde } \vec F_i = -m\,\vec a_{BA}$$

$$\text{şi } F = m\cdot\vec a_{OB}$$

deci $m\vec a_{OB} = m\vec a_{OA} - m\vec a_{BA}$ sau

$$\vec a_{OB} = \vec a_{OA} - \vec a_{BA} \quad \text{deci} \quad \boxed{\vec a_{OA} = \vec a_{OB} + \vec a_{BA}}$$

relaţie care putea fi scrisă şi direct.

Cum $\vec a_{BA} = \frac{\vec F_B}{M} = \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\frac{\vec F_{OB}}{M}$ avem:

$$\vec a_{OA} = \vec a_{OB} - \frac{\vec F_{OB}}{M} \quad ; \quad \vec a_{OA} = \vec a_{OB} - \frac{m\vec a_{OA}}{M}$$

$$\vec a_{OA}\left(1 + \frac{m}{M}\right) = \vec a_{OB} \qquad \boxed{\vec a_{OA} = \frac{M}{m+M}\,\vec a_{OB}}$$

şi $\vec a_{BA} = \vec a_{OA} - \vec a_{OB}$; $\vec a_{BA} = \frac{M}{m+M}\vec a_{OB} - \vec a_{OB}$

$$\boxed{\vec a_{BA} = -\frac{m}{m+M}\,\vec a_{OB}} \qquad \boxed{\vec F_{BO} = -\frac{mM}{m+M}\,\vec a_{OB}}$$

care proiectate pe Ox dau:

$$a_{OA} = \frac{M}{m+M} a_{OB} \; ; \; a_{BA} = \frac{m}{m+M} a_{OB} ; \; F_{BO} = \frac{mM}{m+M} a_{OB}$$

Soluția a 2-a (este tot prima soluție, prescurtată):

Acceptând direct $\vec{a}_{OA} = \vec{a}_{OB} + \vec{a}_{BA}$, avem:

$$\vec{a}_{OA} = \frac{\vec{F}_O}{m} = \frac{\vec{F}_{OB}}{m} = -\frac{\vec{F}_{BO}}{m} \text{ și } \vec{a}_{BA} = \frac{\vec{F}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BO}}{M}$$

Astfel:

$$-\frac{\vec{F}_{BO}}{m} = \vec{a}_{OB} + \frac{\vec{F}_{BO}}{M} \quad \text{sau} \quad -\vec{F}_{BO}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right) = \vec{a}_{OB}$$

$$\boxed{\vec{F}_{BO} = -\frac{mM}{m+M}\vec{a}_{OB}} \qquad F_{BO} = \frac{mM}{m+M} a_{OB}$$

$$\boxed{\vec{a}_{OA} = -\frac{1}{m}\vec{F}_{BO} = \frac{M}{m+M}\vec{a}_{OB}} \qquad a_{OA} = \frac{M}{m+M} a_{OB}$$

$$\boxed{\vec{a}_{BA} = \frac{1}{M}\vec{F}_{BO} = -\frac{m}{m+M}\vec{a}_{OB}} \qquad a_{BA} = \frac{m}{m+M} a_{OB}$$

H.1.2.20

Rezolvare folosind articolul D. Roșca

$m = 60$ kg ; $M = 40$ kg ; $a_{OB} = 2\,m/s^2$

$a_{OA} = ?$; $a_{BA} = ?$; $F_{BO} = ?$

Cât timp omul nu se mișcă în barcă și barca stă în repaus față de apă, avem, în baza lui (P''' 7.5) de la pag. 64:

(1) $$\boxed{\frac{\vec{F}_O^0}{m} = \frac{\vec{F}_B^0}{M} = \frac{\vec{F}_A}{M_A}}$$ unde: $\vec{F}_O^0$, $\vec{F}_B^0$ și $\vec{F}_A^0$ sînt, respectiv, forțele care acționează asupra omului, bărcii și apei într-un astfel de moment, iar m, M și M_A sînt masele acestora.

În timp ce omul merge cu accelerația $\vec{a}_{OB}$ față de barcă, el acționează asupra bărcii cu forța $\vec{F}_{BO}$, iar barca reacționează asupra omului cu forța $\vec{F}_{OB}$, având:

$$\boxed{\vec{F}_{OB} = -\vec{F}_{BO}} \quad (2)$$

(vezi P.9.1, pag. 69).

Scriem teorema fundamentală a dinamicii pentru mobilul „om" și reperul „barcă" (P.7.5 pag. 62):

$$\boxed{\vec{a}_{OB} = \frac{\vec{F}_O}{m} - \frac{\vec{F}_B}{M}} \quad (3)$$

unde $\vec{F}_O$ și $\vec{F}_B$ sînt rezultantele forțelor care acționează asupra omului, respectiv a bărcii, cât timp omul aleargă cu $\vec{a}_{OB}$ față de barcă. Avem:

$$\vec{F}_O = \vec{F}_O^0 + \vec{F}_{OB} \quad ; \quad \vec{F}_B = \vec{F}_B^0 + \vec{F}_{BO}$$

care introduse în (3):

$$\vec{a}_{OB} = \frac{\vec{F}_O^0 + \vec{F}_{OB}}{m} - \frac{\vec{F}_B^0 + \vec{F}_{BO}}{M} = \left(\frac{\vec{F}_O^0}{m} - \frac{\vec{F}_B^0}{M}\right) + \frac{\vec{F}_{OB}}{m} - \frac{\vec{F}_{BO}}{M}$$

Cum $\frac{\vec{F}_O^0}{m} - \frac{\vec{F}_B^0}{M} = 0$ în baza lui (1) de mai sus:

$$\boxed{\vec a_{OB} = \frac{\vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M}} \quad (4)$$

Folosind pe (3):

$$\vec a_{OB} = -\frac{\vec F_{BO}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\vec F_{BO}(m+M)\cdot\frac{1}{mM}$$

$$\vec a_{OB} = -\frac{m+M}{mM}\vec F_{BO} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec F_{BO} = -\frac{mM}{m+M}\vec a_{OB}} \ (5)$$

Am aflat forța cu care omul împinge barca.

Luând acum ca mobil „omul" și ca reper apa teorema fundamentală a dinamicii P.7.5, pag. 62 ne dă:

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_O}{m} - \frac{\vec F_A}{M_A}$$ unde $\vec F_O$ este cel de mai sus,

iar $\vec F_A = \vec F_A^0$, deoarece frecarea între barcă și apă fiind neglijabilă, interacțiunea între om și barcă nu se transmite și asupra apei, în timpul alergării omului. Avem:

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_O^0 + \vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_A^0}{M_A} = \frac{\vec F_O^0}{m} + \frac{\vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_A^0}{M_A} = \left(\frac{\vec F_O^0}{m} - \frac{\vec F_A^0}{M_A}\right) + \frac{\vec F_{OB}}{m}$$

Dar $\frac{\vec F_O^0}{m} - \frac{\vec F_A^0}{M_A} = 0$ în baza lui (1), deci:

$$\boxed{\vec a_{OA} = \frac{\vec F_{OB}}{m}} \ (6)$$ unde introducând pe (5) și folosind (2)

$$\boxed{\vec a_{OA} = \frac{M}{m+M}\vec a_{OB}} \ (7)$$

Analog, pentru mobilul „barcă" și reperul „apă":

$$\vec a_{BA} = \frac{\vec F_B}{M} - \frac{\vec F_A}{M_A} = \frac{\vec F_B^0 + \vec F_{BO}}{M} - \frac{\vec F_A^0}{M_A} = \left(\frac{\vec F_B^0}{M} - \frac{\vec F_A^0}{M_A}\right) + \frac{\vec F_{BO}}{M} = \frac{\vec F_{BO}}{M}$$

$$\boxed{\vec a_{BA} = -\frac{m}{m+M}\vec a_{OB}} \ (8)$$

H. 1. 2. 20

Rezolvare folosind articolul D. Rosca

Rezolvare folosind forma ($P^{IV}.7.5$) a teoremei fundamentale a dinamicii (deci consecința acesteia).

a) Pentru mobilul „om" și reperul „barcă", legea a III-a a dinamicii ne dă $\vec F_{OB} = -\vec F_{BO}$

iar teorema $P^{IV}.7.5$:

$$\vec a_{OB} = \frac{\vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\frac{\vec F_{BO}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\vec F_{BO}\frac{m+M}{mM}$$

de unde:

$$\boxed{\vec F_{BO} = -\frac{mM}{m+M}\cdot\vec a_{OB}}$$

b) Pentru mobilul „om" și reperul „apă":

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_A}{m_A}$$ unde m_A este masa apei și $\vec F_A$ este forța care apare asupra apei, ca urmare a alergării omului în barcă. Dacă în timpul acesta asupra omului lucrează din partea bărcii asupra omului $\vec F_{OB} \neq 0$ ce se manifestă prin intermediul frecării dintre tălpile omului și barcă, fluiditatea apei face neglijabilă frecarea bărcii cu apa și asupra apei nu se transmite o acțiune a bărcii, deci $\vec F_A = 0$. Așadar:

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_{OB}}{m} = -\frac{\vec F_{BO}}{m} = -\left(-\frac{mM}{m+M}\vec a_{OB}\frac{1}{m}\right)$$

$$\boxed{\vec a_{OA} = \frac{M}{m+M}\vec a_{OB}}$$

c) Pentru mobilul „barcă" și reperul „apă", avem:

$$\vec a_{BA} = \frac{\vec F_{BO}}{M} - \frac{\vec F_A}{M_A}$$ cum $\vec F_A = 0$ avem

$$\vec a_{BA} = \frac{\vec F_{BO}}{M} = \frac{1}{M}\left(-\frac{mM}{m+M}\vec a_{OB}\right) = -\frac{m}{m+M}\vec a_{OB}$$

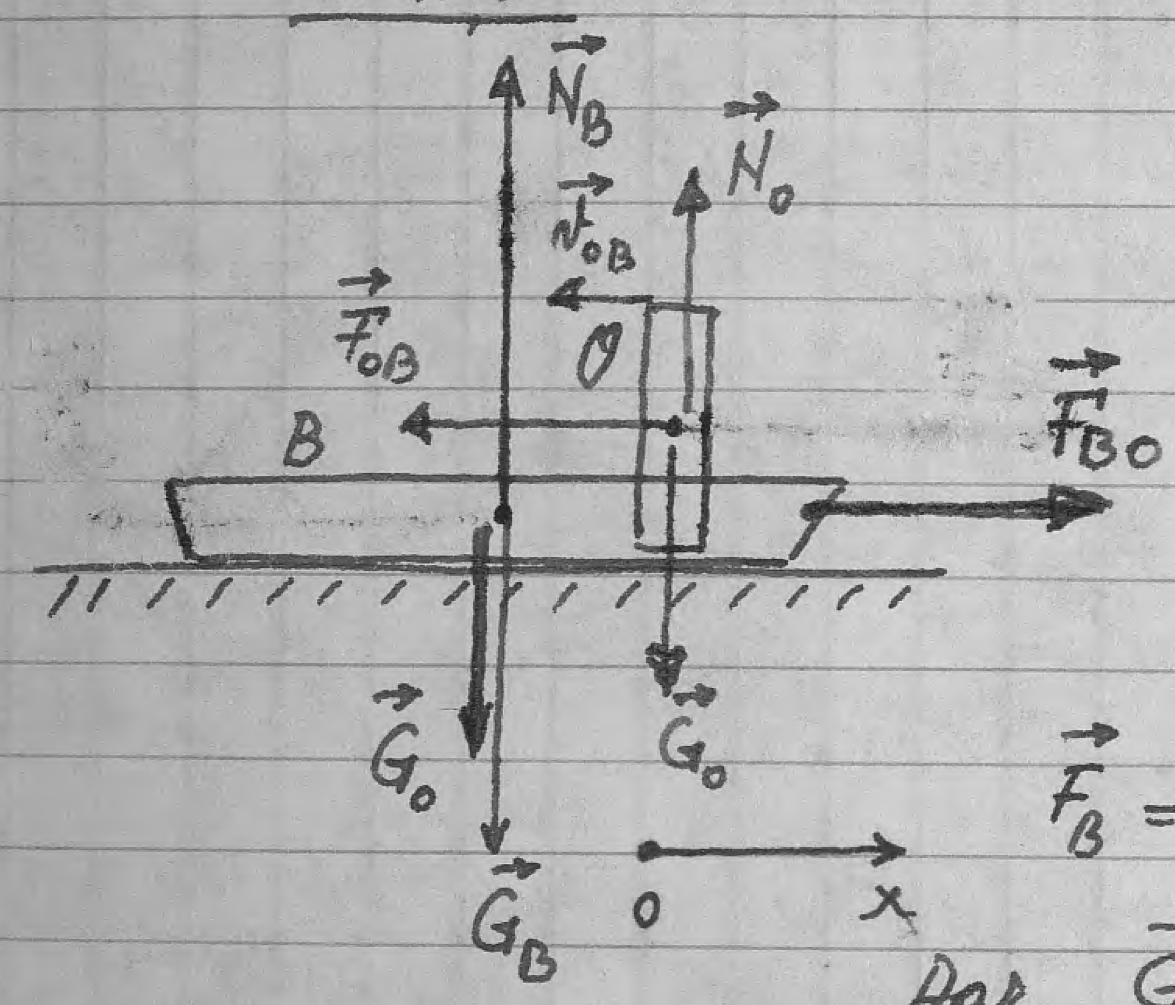
$$\boxed{\vec a_{BA} = -\frac{m}{m+M}\vec a_{OB}}$$

Mecanica Rosca 17 teorema fund (P.7.5) legea a II-a (5.1)

H. 1.2.20

Un om de masă $m = 60\,kg$ aflat într-o barcă de masă $M = 40\,kg$ în repaus, începe să alerge cu accelerația $a = 2{,}0\,m/s^2$ față de barcă. Să se afle accelerațiile cu care se vor mișca omul și barca față de apă, precum și forța cu care omul împinge barca în direcție orizontală.

Soluție:



$$\vec{F}_0 = \vec{G}_0 + \vec{N}_0 + \vec{F}_{0B}$$

Dar $\vec{G}_0 = -\vec{N}_0$, deci

$$\boxed{\vec{F}_0 = \vec{F}_{0B}} \quad (1)$$

Analog:

$$\vec{F}_B = \vec{G}_B + \vec{G}_0 + \vec{N}_B + \vec{F}_{B0}$$

Dar $\vec{G}_B + \vec{G}_0 = -\vec{N}_B$, deci

$$\boxed{\vec{F}_B = \vec{F}_{B0}} \quad (2)$$

$\vec{F}_{0B}$ și $\vec{F}_{B0}$ fiind forțele cu care barca acționează asupra omului, respectiv omul asupra bărcii, ca efect al frecării dintre om și barcă, una este acțiunea și cealaltă reacțiunea, așa că

$$\boxed{\vec{F}_{0B} = -\vec{F}_{B0}} \quad (3)$$

În baza teoremei fundamentale a dinamicii (P.7.5) avem:

$$\vec a_{OB} = \frac{\vec F_O}{m} - \frac{\vec F_B}{M} = \frac{\vec F_{OB}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\frac{\vec F_{BO}}{m} - \frac{\vec F_{BO}}{M} = -\frac{m+M}{mM}\vec F_{BO}$$

Așadar, accelerația omului față de barcă este:

$$\vec a_{OB} = -\frac{m+M}{mM}\vec F_{BO}$$ de unde:

$$\boxed{\vec F_{BO} = -\frac{mM}{m+M}\vec a_{OB}} \quad (4)$$

Frecarea dintre barcă și apă fiind neglijabilă datorită fluidității, putem presupune rezultanta forțelor ce acționează asupra apei ca fiind nulă, și aplicăm legea a II-a a dinamicii (5.1):

pentru barcă: $\vec a_{BA} = \frac{\vec F_B}{M} = \frac{\vec F_{BO}}{M} = \frac{1}{M}\left(-\frac{mM}{m+M}\right)\vec a_{OB}$

$$\boxed{\vec a_{BA} = -\frac{m}{m+M}\vec a_{OB}} \quad (5)$$

pentru om:

$$\vec a_{OA} = \frac{\vec F_O}{m} = \frac{\vec F_{OB}}{m} = -\frac{\vec F_{BO}}{m} = -\frac{1}{m}\left(-\frac{mM}{m+M}\right)\vec a_{OB}$$

$$\boxed{\vec a_{OA} = \frac{M}{m+M}\vec a_{OB}} \quad (6)$$

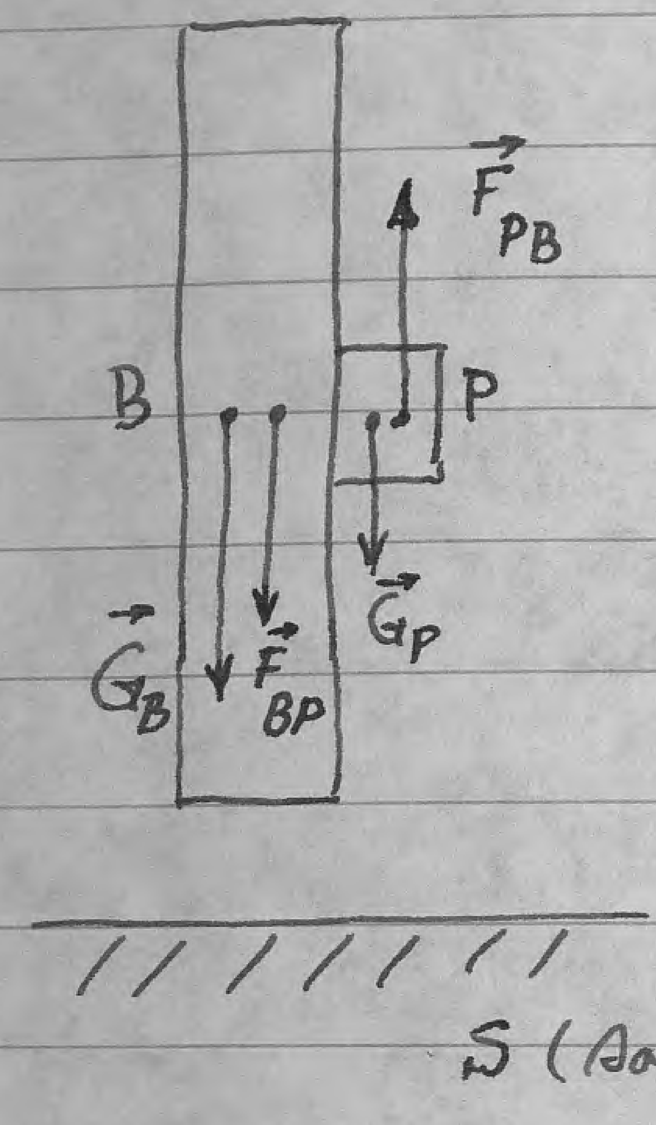
Proiectând (4), (5) și (6) pe ox avem:

$F_{BO} = \frac{mM}{m+M}a_{OB}$; $a_{BA} = \frac{m}{m+M}a_{OB}$; $a_{OA} = \frac{M}{m+M}a_{OB}$

Obs. $\vec N_O$ este reacțiunea bărcii asupra omului; $\vec N_B$ este reacțiunea apei asupra bărcii; $\vec F_O$ și $\vec F_B$ sunt rezultantele forțelor ce acționează asupra omului, respectiv a bărcii.

H. 1.2.21

$M = 1\ kg$; $m = 0,5\ kg$; $h = ct.$ $(a_{PS} = 0)$; $a_{BS} = ?$



$\vec a_{PS} = \frac{\vec F_P}{m} = \frac{\vec F_{PB} + \vec G_P}{m}$ Cum $a_{PS} = 0$:

$\frac{\vec F_{PB}}{m} + \frac{\vec G_P}{m} = 0$ $\boxed{\vec F_{PB} = -\vec G_P}$

$\vec a_{BS} = \frac{\vec F_B}{M} = \frac{\vec F_{BP} + \vec G_B}{M} = \frac{-\vec F_{PB} + \vec G_B}{M}$

$\cancel{\vec a_{BS} = -\frac{\vec F_{PB}}{M} + \frac{\vec G_B}{M} = \frac{\vec G_P}{M} + \frac{\vec G_B}{M}}$

$\vec a_{BS} = \frac{\vec G_P + \vec G_B}{M} = \frac{m\vec g + M\vec g}{M}$

$$\boxed{\vec a_{BS} = \frac{m+M}{M}\vec g}$$

Altă soluție (de fapt altă formă de scriere):

$a_{PS} = 0$ deci $G_P = F_{PB}$. Dar $F_{BP} = F_{PB} = G_P$

$M a_{BS} = G_B + G_P$

$a_{BS} = \frac{(M+m)g}{M}$

Rezolvare cu articol
D. Roșca.

H. 1.2.21

a) Ințiem modelul „bară" și reperul „sol":

$(P^{IV}.7.5)$: $$\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{F}_B}{M} - \frac{\vec{F}_S}{M_S}$$

unde $\vec{F}_S = 0$, deoarece la cățărarea pisicii pe bară nu se transmit interacțiuni asupra solului, din cele ce duc la apariția lui $\vec{a}_{BS}$.

$$\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{F}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BP} + \vec{G}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BP}}{M} + \frac{\vec{G}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BP}}{M} + \vec{g}$$

$$\boxed{\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{F}_{BP}}{M} + \vec{g}}$$

Am luat în considerare $\vec{G}_B$ deoarece ea apare în momentul ruperii firului (nu mai ste anulată de tensiunea din fir) și contribuie, alături de $\vec{F}_{BP}$, forța cu care pisica acționează asupra barei, la crearea lui $\vec{a}_{BS}$.

b) Ințiem modelul „pisică" și reperul „sol", observând că avem: $\vec{a}_{PS} = 0$:

$$\vec{a}_{PS} = \frac{\vec{F}_P}{m} - \frac{\vec{F}_S}{M_S}$$ Cum $\vec{F}_S = 0$, avem:

$$\vec{a}_{PS} = \frac{\vec{F}_P}{m} = \frac{\vec{F}_{PB} + \vec{G}_P}{m}$$ deoarece greutatea pisicii și forța cu care bara acționează asupra pisicii creează $\vec{a}_{PS}$.

$$0 = \frac{\vec{F}_{PB}}{m} + \frac{\vec{G}_P}{m} \qquad \vec{F}_{PB} = -m\vec{g} \qquad \boxed{\vec{F}_{BP} = m\vec{g}}$$

Așadar: $$\vec{a}_{BS} = \frac{1}{M} \cdot m\vec{g} + \vec{g} = \vec{g}\left(\frac{m}{M} + 1\right)$$

$$\boxed{\vec{a}_{BS} = \frac{m+M}{M}\vec{g}}$$

Scrierea condensată a soluției:

$$\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{F}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BP} + \vec{G}_B}{M} \quad ; \quad \vec{a}_{PS} = \frac{\vec{F}_P}{m} = \frac{\vec{F}_{PB} + \vec{G}_P}{m} \quad \text{Cum } \vec{a}_{PS} = 0$$

$$\vec{F}_{PB} = -\vec{G}_P$$

$$\boxed{\vec{F}_{BP} = \vec{G}_P}$$

Așadar: $$\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{G}_P + \vec{G}_B}{M} = \frac{m+M}{M}\vec{g}$$

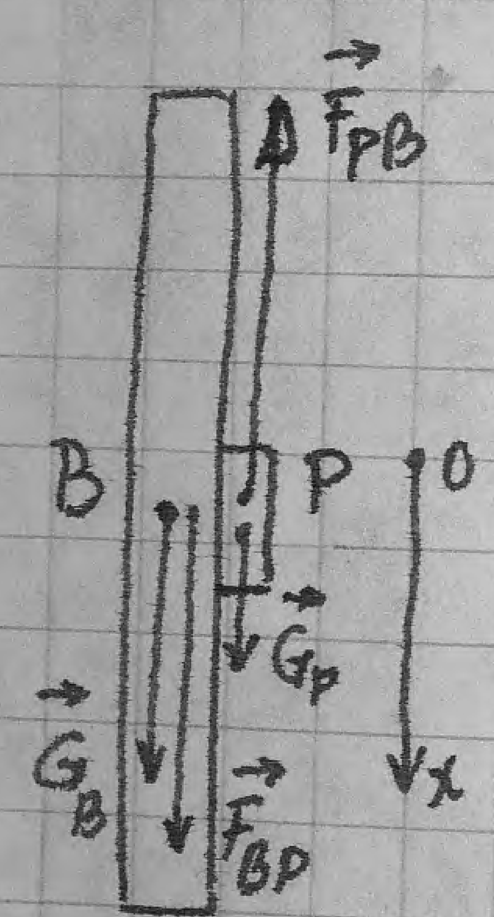
$$\boxed{\vec{a}_{BS} = \frac{m+M}{M}\vec{g}}$$

Mec. Rosca

H. 1.2.21 ~~[illegible]~~ Legea a II-a a dinamicii

De tavanul unei săli de sport este suspendată printr-un fir o bară de masă $M = 1{,}0\,kg$. O pisică de masă $m = 0{,}50\,kg$ sare și se agață de bară, dar în același moment firul de suspensie se rupe și atunci pisica se cațără pe bară astfel încît rămîne mereu la aceeași înălțime față de sol. Cu ce accelerație cade bara?

Soluție



Putem admite că rezultanta forțelor ce acționează asupra pisicii este nulă, și aplicăm pisicii legea a II-a a dinamicii (5.1):

$$\vec{a}_{PS} = \frac{\vec{F}_P}{m} = \frac{\vec{F}_{PB} + \vec{G}_P}{m}$$

Cum $\vec{a}_{PS} = 0$ avem $\boxed{\vec{F}_{PB} = -\vec{G}_P}$ (1)

Pentru ~~bară~~ aceeași lege ne dă:

$$\vec{a}_{BS} = \frac{\vec{F}_B}{M} = \frac{\vec{F}_{BP} + \vec{G}_B}{M}$$ Dar $\vec{F}_{BP} = -\vec{F}_{PB}$. Deci

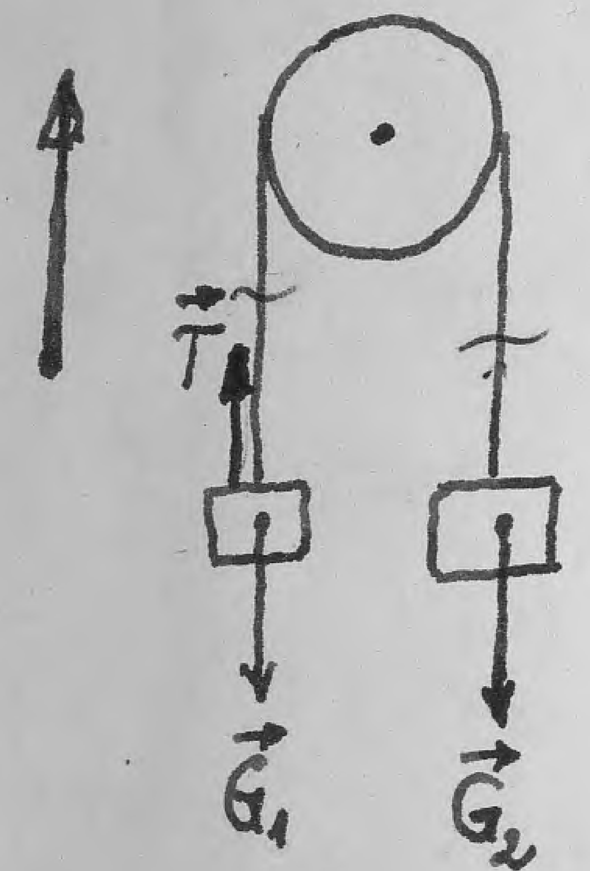
acțiunea și reacțiunea

$$\vec{a}_{BS} = \frac{-\vec{F}_{PB} + \vec{G}_B}{M} = \frac{\vec{G}_P + \vec{G}_B}{M} = \frac{m+M}{M}\vec{g}$$

$$\boxed{\vec{a}_{BS} = \frac{m+M}{M}\vec{g}}$$

1.2.23

Două corpuri de greutate $G_1 = 10N$, $G_2 = 30N$ sunt legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal. Care este accelerația sistemului și tensiunea din fir? Se dezleagă apoi corpul G_2 și în locul său se trage în jos cu o forță egală cu greutatea corpului: $F = G_2$. Care va fi acum accelerația și tensiunea din fir?



a) $G_2 - G_1 = (m_1 + m_2)a$

$$a = \frac{G_2 - G_1}{m_1 + m_2} = \frac{G_2 - G_1}{m_1 g + m_2 g}\,g$$

$$\boxed{a = \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1}\,g}$$

$$\vec{G}_1 + \vec{T} = \vec{F}_{1a}$$

$$-G_1 + T = m_1 a \quad ; \quad T = m_1 a + G_1$$

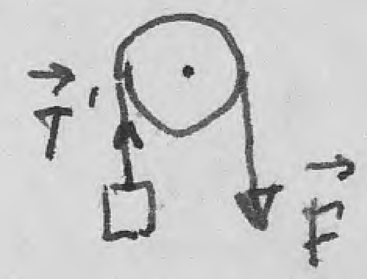
$$T = m_1 \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1}\,g + G_1 = G_1 \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} + G_1$$

$$T = G_1 \frac{G_2 - G_1 + G_2 + G_1}{G_1 + G_2} = \frac{2G_1G_2}{G_1 + G_2}; \quad \boxed{T = \frac{2G_1G_2}{G_1 + G_2}}$$

b) $F - G_1 = m_1 a$ $\quad a = \frac{F - G_1}{m_1} = \frac{F - G_1}{G_1}\cdot g$

$$a = \frac{F - G_1}{G_1}\,g \quad ; \quad T' = F = G_2$$

$$\boxed{a = \frac{G_2 - G_1}{G_1}\cdot g} \qquad \boxed{T' = G_2}$$

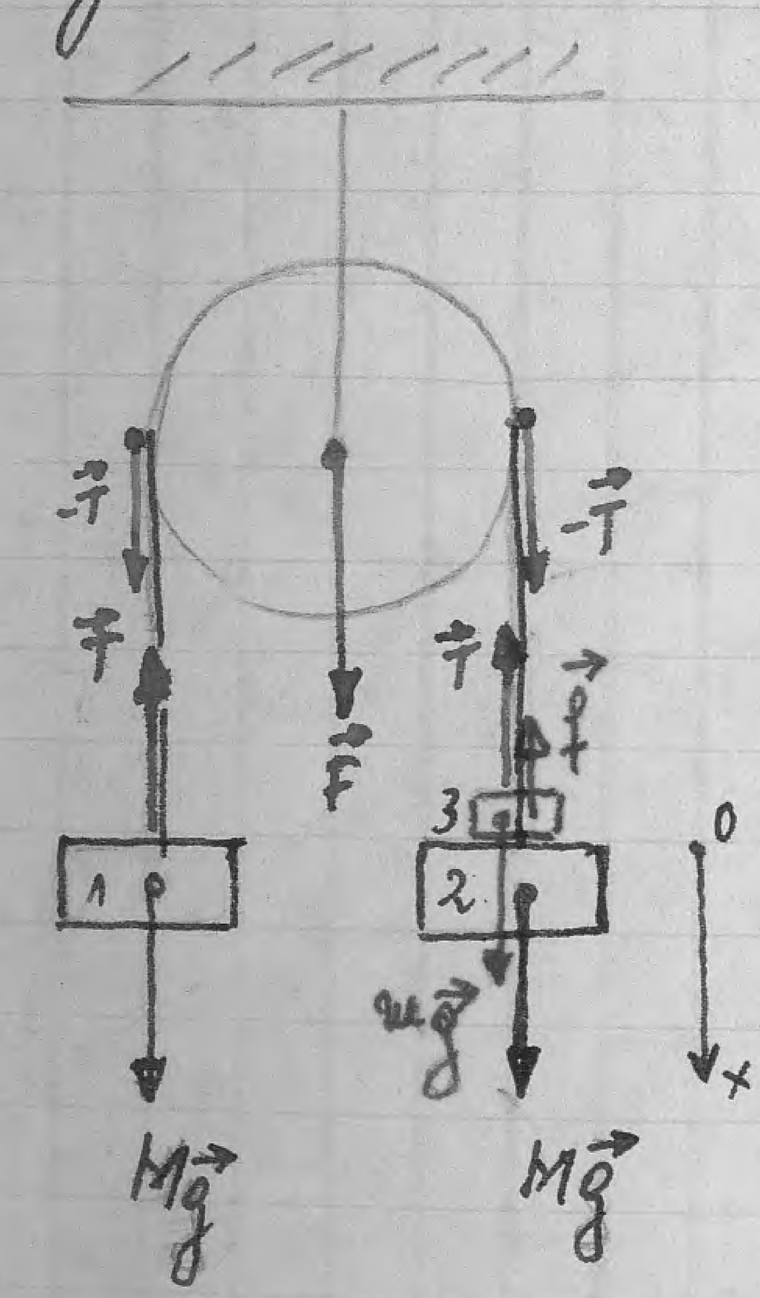


Evident $T' = F$

U

1.2.24 Rosca Diana

Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri de masă $M=200g$ fiecare. Peste unul din corpurile M se așază un mic corp adițional de masă $m=20g$. Cu ce forță f apasă corpul adițional m asupra corpului M peste care el este așezat? Cu ce forță apasă scripetele asupra lagărelor sale?



a) Pentru sistemul celor trei corpuri în mișcare cu accelerația a, avem:

$$Mg+mg-Mg=(m+2M)a$$

$$a=\frac{mg}{m+2M}$$

Pentru corpul adițional, asupra căruia acționează forțele exterioare $m\vec{g}$ și $\vec{f}$, reacțiunea din partea corpului al doilea:

$$mg-f=ma \quad \text{de unde:} \quad f=m(g-a)$$

$$f=m\left(g-\frac{mg}{m+2M}\right)=m\,\frac{mg+2Mg-mg}{m+2M}=\frac{2mMg}{m+2M}.$$

b) $F = 2T$

Aplic legea a II-a a dinamicii corpului (1):

$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}$$

Ox: $\quad +Mg - T = -Ma \quad ; \quad T = Mg + Ma$

$$T = M(g+a) = M\left(g + \frac{mg}{m+2M}\right)$$

$$T = M\,\frac{mg+2Mg+mg}{m+2M} = \frac{2mg+2Mg}{m+2M}\,M$$

$$T = 2g\,\frac{m+M}{m+2M}\,M$$ Cum $F = 2T$ avem:

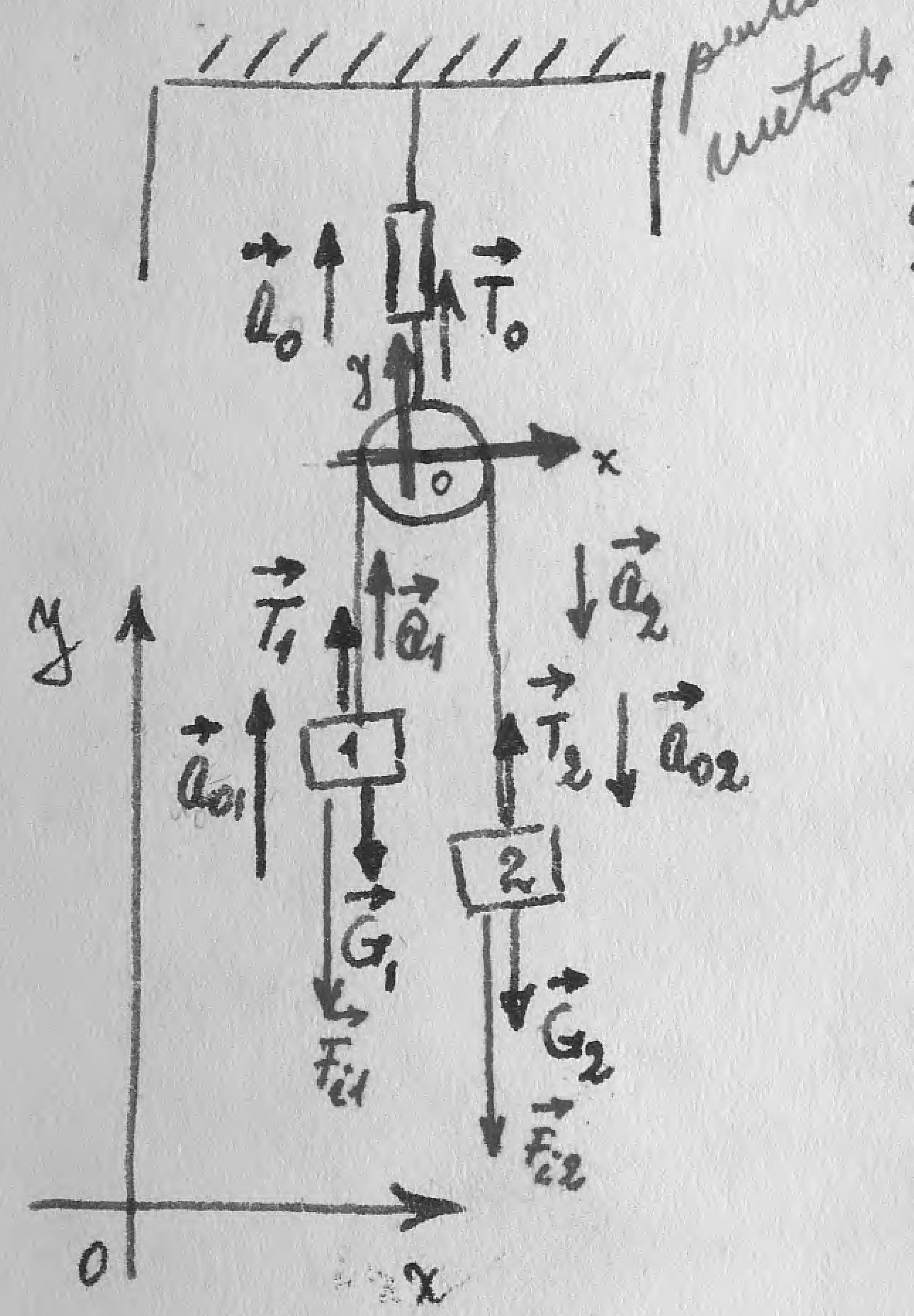
$$\boxed{F = 4Mg\,\frac{m+M}{m+2M}}$$

1.2.25. Soluție Roșca Dana

De tavanul unui lift este agățat un scripete ideal prin intermediul unui dinamometru. Peste scripete este trecut un fir cu două corpuri la capete, de mase $m_1 = 100\,g$, $m_2 = 300\,g$. Liftul urcă accelerat cu accelerația $a_0 = 2{,}2\ m/s^2$. Ce forță indică dinamometrul?

Metoda 1.

cu roșu este pentru metoda a 2-a



Față de un reper inerțial, legat de Pământ, avem:

$\vec{a}_0$ accelerația liftului;

$\vec{a}_{01}$ accelerația lui m_1;

$\vec{a}_{02}$ accelerația lui m_2

Scriind forțele care produc accelerațiile lui m_1 și m_2:

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_{01} &= \vec{G}_1 + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a}_{02} &= \vec{G}_2 + \vec{T}_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Dar $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Avem, față de un reper legat de scripete:

$\vec{a}_1$ accelerația lui m_1;

$\vec{a}_2$ accelerația lui m_2, cu $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$

Observăm: $\vec{a}_{01} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$; $\vec{a}_{02} = \vec{a}_0 + \vec{a}_2$.

Relațiile (1) se scriu:

$$m_1(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = \vec{G}_1 + \vec{T}_1$$

$$m_2(\vec{a}_0 + \vec{a}_2) = \vec{G}_2 + \vec{T}_2$$

care în proiecție pe ~~[illegible]~~ reperul legat de Pământ se scriu:

$$m_1(a_0 + a) = -m_1 g + T$$

$$m_2(a_0 - a) = -m_2 g + T$$

prin scădere:

$$(m_1 - m_2)a_0 + (m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)(g + a_0)}{m_2 + m_1}$$

$$T = m_1 a_0 + m_1 \frac{(m_2 - m_1)(g + a_0)}{m_2 + m_1} + m_1 g$$

$$T = \frac{m_1(g + a_0)(m_2 + m_1 + m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2 (g + a_0)}{m_2 + m_1}$$

Cum $T_0 = 2T$ avem $\boxed{T_0 = \frac{4 m_1 m_2 (g + a_0)}{m_1 + m_2}}$

Metoda a 2-a

Față de un reper legat de scripete:

$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{i1} + \vec{T}_1$ și $m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{i2} + \vec{T}_2$

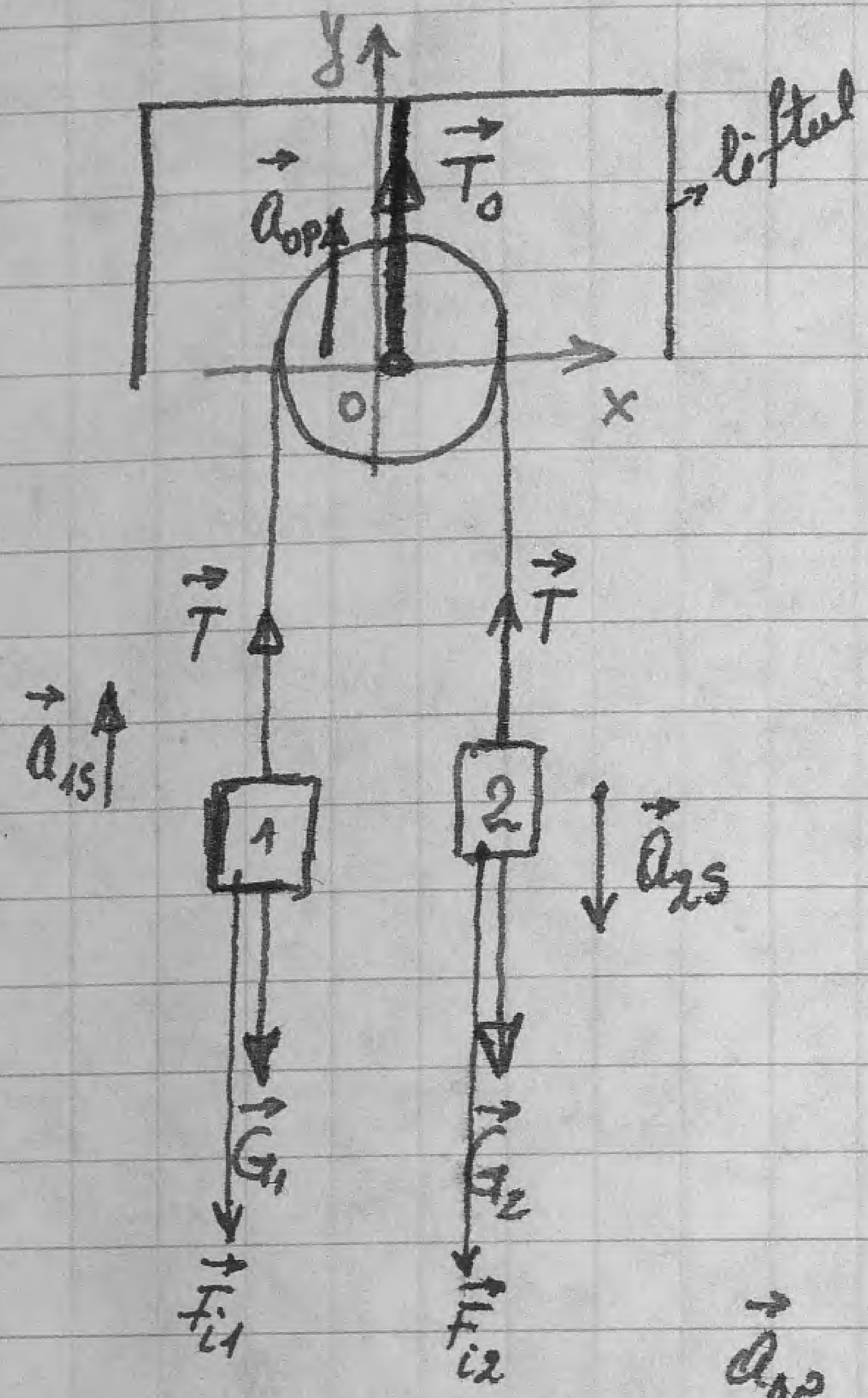
cu $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$; $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$; $\vec{F}_{i1} = -m_1 \vec{a}_0$

$\vec{F}_{i2} = -m_2 \vec{a}_0$; $|\vec{T}_0| = 2T = T_0$.

Se obține aceeași soluție pentru a și T_0.

V

H. 1.2.25



Față de un reper legat de scripete corpurile (1) și (2) au accelerațiile $\vec{a}_{1S}$ și $\vec{a}_{2S}$ produse, respectiv, de forțele:

$$\vec{F}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T} + \vec{F}_{i1}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{G}_2 + \vec{T} + \vec{F}_{i2}$$

unde $\vec{F}_{i1} = -m_1 \vec{a}_{0P}$; $\vec{F}_{i2} = -m_2 \vec{a}_{0P}$

$\vec{a}_{0P}$ fiind accelerația scripetelui, egală cu a liftului, față de Pământ. Astfel:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_{1S} = m_1 \vec{g} + \vec{T} - m_1 \vec{a}_{0P} \\ m_2 \vec{a}_{2S} = m_2 \vec{g} + \vec{T} - m_2 \vec{a}_{0P} \end{cases}$$

care proiectate pe Oy și ținând cont că $a_{1S} = a_{2S}$:

$$\begin{cases} m_1 a = -m_1 g + T - m_1 a_{0P} \\ -m_2 a = -m_2 g + T - m_2 a_{0P} \end{cases}$$

$$(m_1 + m_2) a = (m_2 - m_1) g + (m_2 - m_1) a_{0P}$$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}(g + a_{0P})$$

$T_0 = 2T$. ~~[illegible]~~ Pe T îl aflăm dintr-o ecuație a sistemului

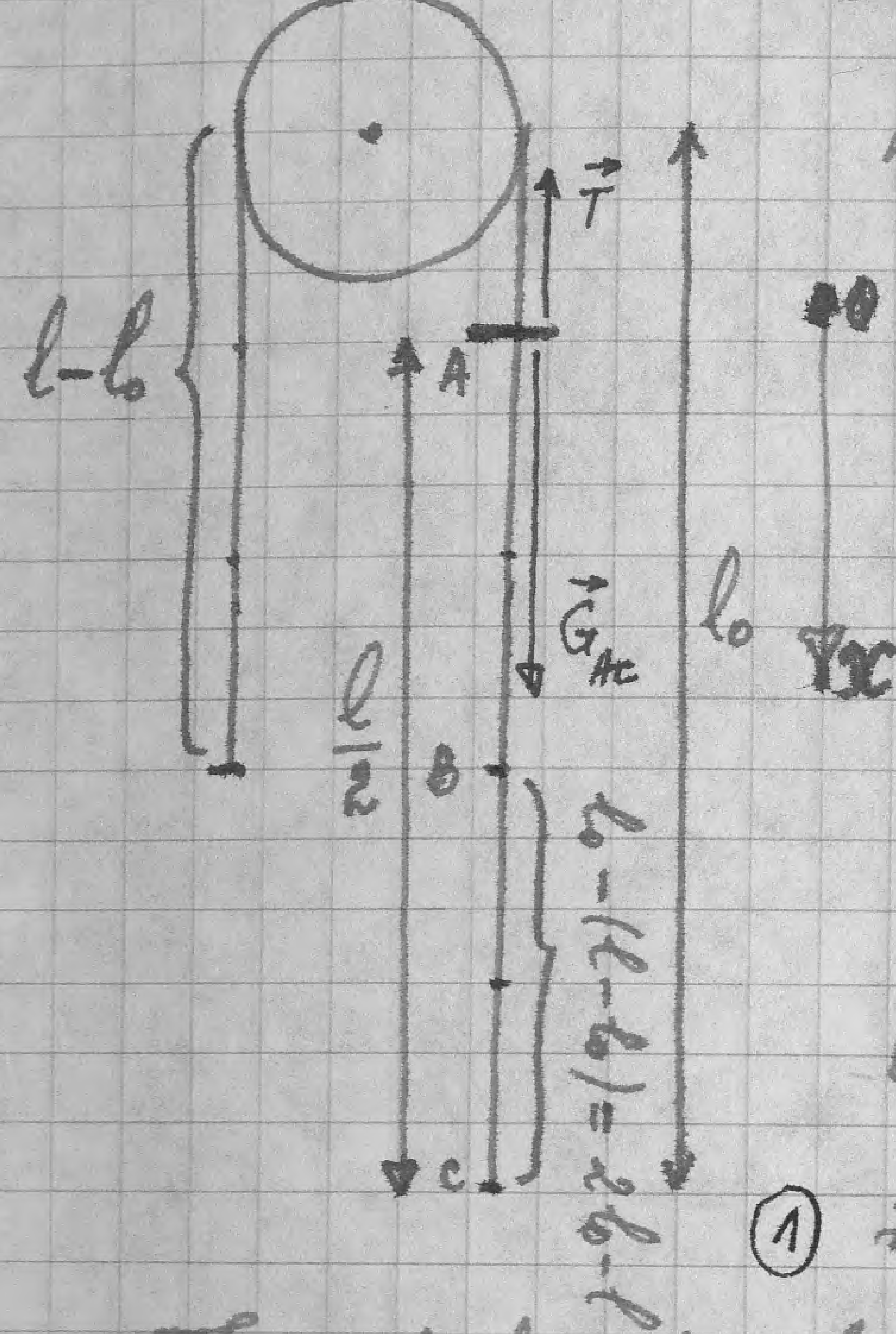
$$T = m_1 a + m_1 g + m_1 a_{0P} = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}(g + a_{0P}) + m_1(g + a_{0P})$$

$$T = m_1(g + a_{0P})\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} + 1\right) = \frac{2 m_2 m_1}{m_1 + m_2}(g + a_{0P})$$

$$T_0 = \frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}(g+a_0)$$

H-1.2.27

Se va citi în ordinea numerotată cu roșu.



② Forța care accelerează porțiunea AC de lanț este:

$$\vec F_{AC} = \vec G_{AC} + \vec T$$

$$\frac{m}{2}a = \frac{mg}{2} - T$$

$$T = \frac{mg}{2} - \frac{ma}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{m}{2}(g-a)}$$

① Forța care accelerează întregul lanț este greutatea porțiunii AC de lanț: $F_e = G_{AC}$. Dar

$$G_{AC} = \frac{AC}{l}G = \frac{2l_0-l}{l}mg$$ și

$$F_e = ma$$ Deci

$$ma = \left(\frac{2l_0}{l}-1\right)mg$$

$$\boxed{a = g\left(\frac{2l_0}{l}-1\right)}$$ ③ Acum

$$T = \frac{m}{2}\left[g - g\left(\frac{2l_0}{l}-1\right)\right] = \frac{mg}{2}\left(2-\frac{2l_0}{l}\right)$$

$$\boxed{T = \frac{l - l_0}{l}\, mg}$$

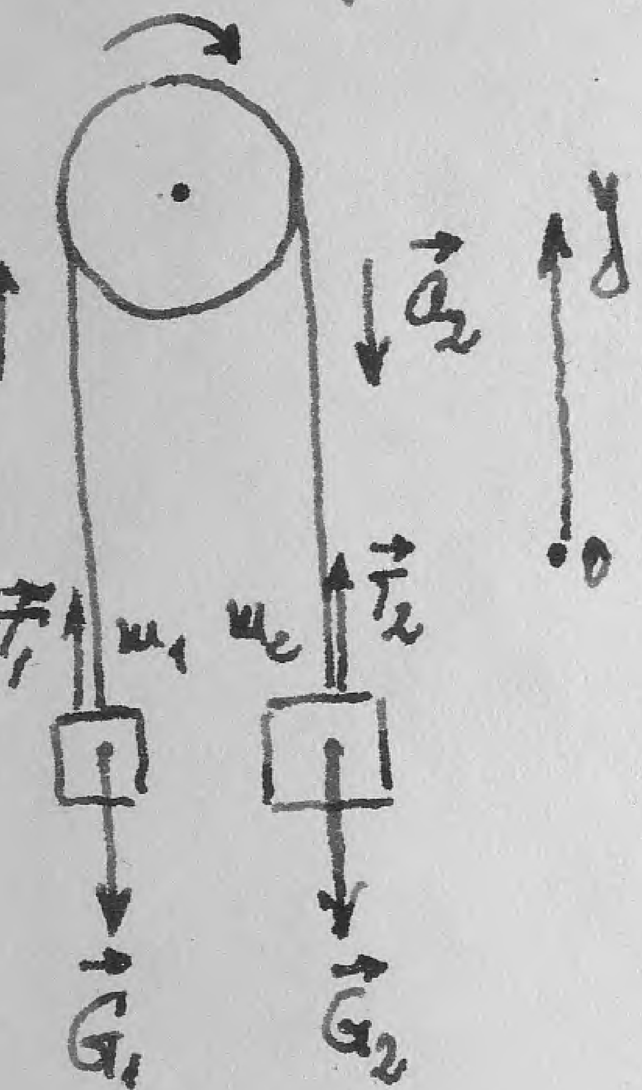
1.2.28. Soluție - prof. Dumitru Rosca

Peste un scripete ideal este trecută o sfoară de masă neglijabilă de capetele căreia se agață doi sportivi de mase $m_1 = 40$ kg, $m_2 = 60$ kg care încep simultan să urce cu accelerații constante $w_1 = 0,5$ m/s², respectiv $w_2 = 0,7$ m/s² față de sfoară. Să se afle:

a) Tensiunea și accelerația sforii;

b) accelerațiile sportivilor față de pământ;

c) care sportiv ajunge primul la scripete.



a) Observând că $m_2 > m_1$ și $w_2 > w_1$, ne dăm seama că sfoara alunecă spre m_2, având:

$$a_1 = a_2 = a$$

unde $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ sunt accelerațiile capetelor sforii față de pământ.

Folosind legea a II-a a dinamicii față de pământ, scriem:

$$\begin{cases} m_1(\vec{a}_1 + \vec{w}_1) = \vec{G}_1 + \vec{T}_1 \\ m_2(\vec{a}_2 + \vec{w}_2) = \vec{G}_2 + \vec{T}_2 \end{cases}$$

cu $T_1 = T_2 = T$. Proiectând pe axa Oy avem:

$$\begin{cases} m_1(a + w_1) = -m_1 g + T \\ m_2(-a + w_2) = -m_2 g + T \end{cases}$$ de unde:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g + m_2 w_2 - m_1 w_1}{m_1 + m_2} = 2,182 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(g + \frac{w_1 + w_2}{2}\right) = 499,68 \text{ N}$$

b) Dacă $\vec{a}_{1p}$ și $\vec{a}_{2p}$ sînt accelerațiile sportivilor față de Pămînt, avem:

$$\vec{a}_{1p} = \vec{a}_1 + \vec{w}_1 \quad ; \quad \vec{a}_{2p} = \vec{a}_2 + \vec{w}_2 \qquad \text{sau}$$

$$a_{1p} = a + w_1 \quad ; \quad a_{2p} = -a + w_2$$

Observăm că despre $\vec{a}_{1p}$ știm că are sensul axei oy, dar despre $\vec{a}_{2p}$ nu știm ce sens are. Ca urmare, cînd am proiectat relațiile vectoriale pe oy am știut că a_{1p} este modulul lui $\vec{a}_{1p}$, dar a_{2p} trebuie considerat componenta lui $\vec{a}_{2p}$ pe oy, putînd fi privită ca modul numai dacă calculul furnizează $a_{2p} > 0$, ceea ce nu este cazul:

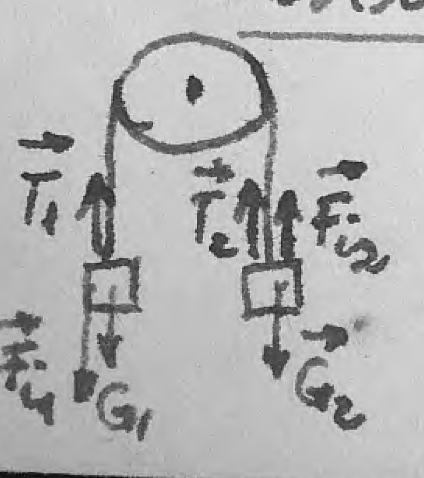
$$a_{1p} = 2,682 \text{ m/s}^2 \quad ; \quad a_{2p} = -1,48 \text{ m/s}^2$$

Desigur $|\vec{a}_{2p}| = 1,48 \text{ m/s}^2$.

c) Cum $\vec{a}_{1p}$ este îndreptat în sus și $\vec{a}_{2p}$ în jos față de Pămînt, înseamnă că experimentul va fi posibil numai dacă sportivii pornesc a „urca" pe sfoară de la un nivel suficient de ridicat deasupra Pămîntului, pentru ca cel de masă m_2 să poată „coborî" spre Pămînt.

Este evident că scripetele fiind fix față de Pămînt, sportivul al doilea se depărtează de scripete și nu se poate pune problema să „ajungă" la el. Deci numai primul sportiv poate ajunge la scripete.

Observații. Se puteau folosi forțe de inerție

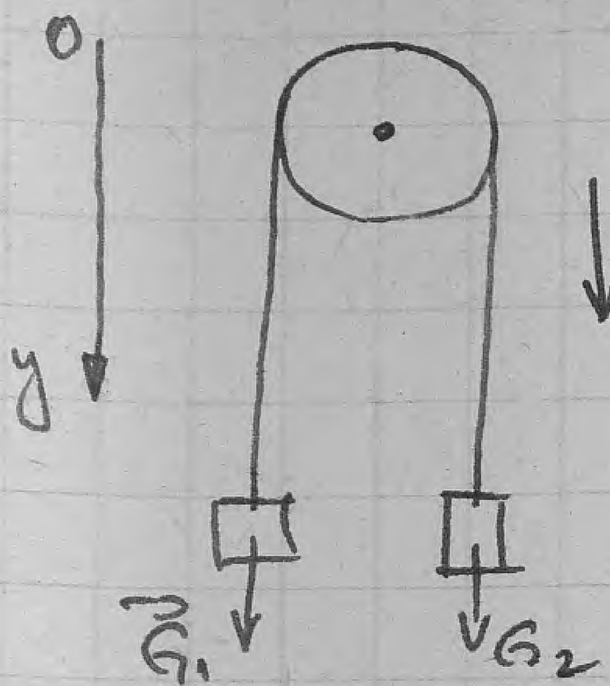


$$\begin{cases} m_1 \vec{w}_1 = m_1 \vec{g} + m_1 \vec{a}_1 + \vec{T}_1 \\ m_2 \vec{w}_2 = m_2 \vec{g} + m_2 \vec{a}_2 + \vec{T}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 w_1 = -m_1 g - m_1 a + T \\ m_2 w_2 = -m_2 g + m_2 a + T \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (a + w_1) = -m_1 g + T \\ m_2 (-a + w_2) = -m_2 g + T \end{cases}$$ adică același sistem ca la prima rezolvare.

1.2.28. (Momonu Radu clasa XI^a A)

Sfoara



Evident sistemul format din cei doi sportivi se va deplasa cu accelerația „a" în sensul indicat în figură. (Aceasta se datorează faptului că sportivul de masă m_2 are greutatea mai ~~mare~~ mare ca a primului și în plus trage mai tare de sfoară întrucît urcă cu o accelerație relativă față de sfoară mai mare ca a primului)

a) Vom alege un sistem de referință legat de pămînt

Accelerația absolută a sportivului 2 față de pămînt este: $a_2 = a - w_2$ (1)

iar a primului este $a_1 = -a - w_1$ (2)

În continuare voi aplica principiul doi al dinamicii pentru fiecare din cele două corpuri:

$$\begin{cases} G_2 - T = m_2 (a - w_2) \\ G_1 - T = m_1 (-a - w_1) \end{cases} \Rightarrow G_2 - G_1 = (m_1 + m_2) a + m_1 w_1 - m_2 w_2$$

deci $$a = \frac{(m_2 - m_1) g - m_1 w_1 + m_2 w_2}{m_1 + m_2} = 2,18 \text{ m/s}^2$$

Înlocuind pe a în una din ecuațiile sistemului

obținem $T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(g+\frac{w_1+w_2}{2}\right) = 500\ N$

b) Din ecuațiile (1) și (2) obținem

$$a_2 = \frac{(m_1-m_2)g + m_1(w_1+w_2)}{m_1+m_2} = 1,48\ m/s^2$$

$$a_1 = -\frac{(m_2-m_1)g + m_2(w_1+w_2)}{m_1+m_2} = -2,68\ m/s^2$$

c) Primul care ajunge la scripete este sportivul de masă m_1 (de fapt celălalt sportiv nu ajunge niciodată la scripete)

H. 1.2.28

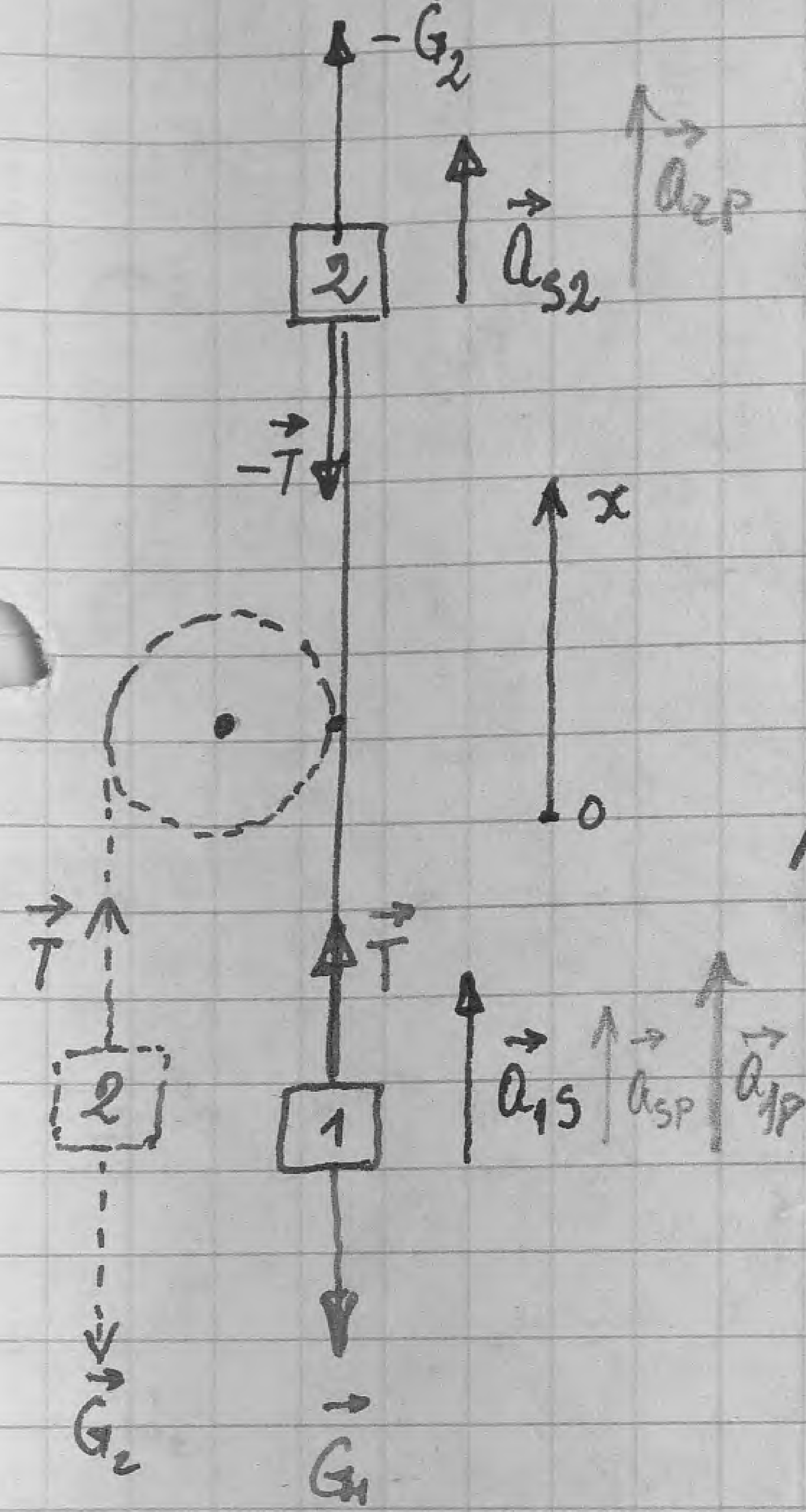
28 Mecanica Roșca - Teor. fund. dinamicii

Peste un scripete ideal este trecută o sfoară de masă neglijabilă de capetele căreia se agață doi sportivi de mase $m_1 = 40\ kg$, $m_2 = 60\ kg$ care încep simultan să urce cu accelerații constante $w_1 = 0,50\ m/s^2$, respectiv $w_2 = 0,70\ m/s^2$ față de sfoară. Să se afle:

a) tensiunea și accelerația sforii;

b) accelerațiile sportivilor față de pământ;

c) care sportiv ajunge primul la scripete.



Soluție: $m_2 > m_1$ și $w_2 > w_1$, deci sfoara alunecă pe m_2 pe scripete cu accelerația $\vec a_{SP}$ față de pământ.

$a_{1S} = w_1$; $a_{2S} = a_{S2} = w_2$; $\vec a_{12} = \vec a_{1S} + \vec a_{S2}$

$$a_{12} = a_{1S} + a_{S2} ; \boxed{a_{12} = w_1 + w_2}$$

Aplicăm teorema fundamentală a dinamicii lui (1):

$$\vec a_{12} = \frac{\vec F_1}{m_1} - \frac{\vec F_2}{m_2} = \frac{\vec G_1 + \vec T}{m_1} - \frac{-\vec G_2 - \vec T}{m_2} = \vec g + \frac{\vec T}{m_1} + \vec g + \frac{\vec T}{m_2}$$

$$\vec a_{12} = 2\vec g + \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\vec T \quad \text{sau} \quad a_{12} = -2g + \frac{m_1+m_2}{m_1m_2}T$$

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(a_{12}+2g) ; \quad T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(2g + w_1 + w_2)$$

$$\boxed{T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(g + \frac{w_1+w_2}{2}\right)} \quad \boxed{T = 499,68\ N}$$

Aplicăm legea a II-a a dinamicii corpului I, în raport cu pământul (asupra căruia rezultanta forțelor ce acționează poate fi considerată nulă):

$$\vec a_{1P} = \frac{\vec F_1}{m_1} = \frac{\vec G_1+\vec T}{m_1} = \vec g + \frac{\vec T}{m_1} \; ; \quad a_{1P} = -g + \frac{T}{m_1}$$

$$\boxed{a_{1P} = \frac{T}{m_1} - g} \quad \boxed{a_{1P} = 2,692\ m/s^2}$$

Pentru corpul (2) avem analog:

$$\vec a_{2P} = \frac{\vec F_2}{m_2} = \frac{-\vec G_2-\vec T}{m_2} = -\vec g - \frac{\vec T}{m_2} \; ; \quad pr._{Ox}\vec a_{2P} = -(-g) - \frac{T}{m_2}$$

$$\boxed{a_{2P} = g - \frac{T}{m_2}} \quad \boxed{a_{2P} = +1,482\ m/s^2}$$ deci $\vec a_{2P}$ are sensul lui Ox.

Pentru sistemul sfoară - corpul (1) avem:

$$\vec a_{1P} = \vec a_{1S} + \vec a_{SP} \; ; \quad \vec a_{SP} = \vec a_{1P} - \vec a_{1S} \; ; \quad a_{SP} = a_{1P} - a_{1S}$$

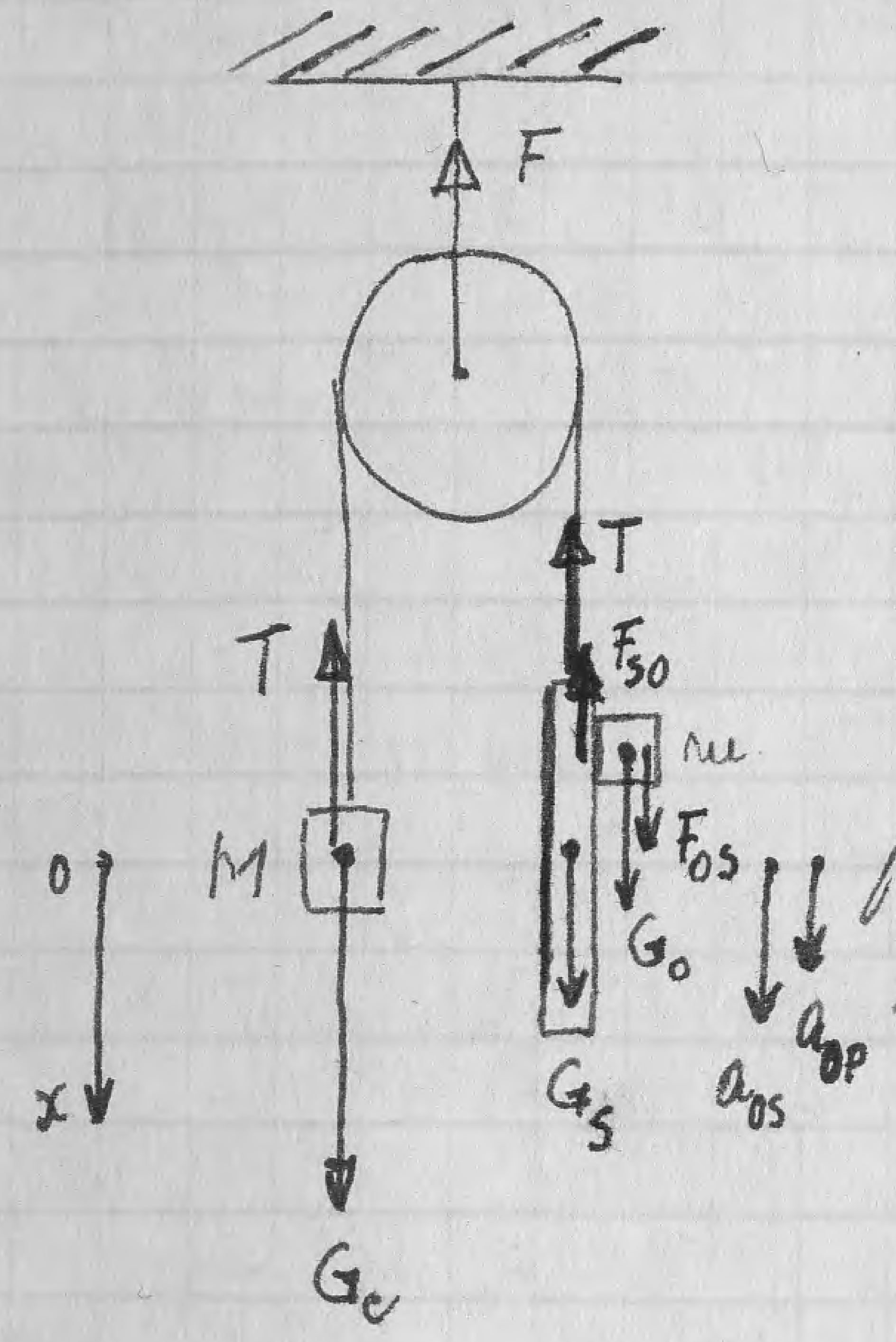
$$\boxed{a_{SP} = a_{1P} - w_1} \quad \boxed{a_{SP} = 2,192\ m/s^2}$$

c) Scripetele urcă față de pământ, odată cu liftul, cu a_{0P}/H. În timp ce sportivul (1) urcă spre scripete cu $a_{1P} = 2,692\ m/s^2$, al doilea coboară față de scripete cu $a_{2P} = 1,482\ m/s^2$. Așadar primul va ajunge la scripete, al doilea nu.

H.1.2.29

29

$M = 60\ kg$; $m = 50\ kg$; $a_{0S} = ?$



Când scara stă în repaus:

$$\vec G_c = \vec G_S + \vec G_0 \; ; \quad M = m_S + m$$

$$\boxed{m_S = M - m}$$

Când omul se mișcă pe scară cu a_{0S} astfel încât să avem $F = 0$, avem și $F = 2T$ deci $T = 0$.

Legat de corpul M:

$$\vec G_c + \vec T = \vec F_{ac} \quad \text{cu } \vec T = 0, \text{ deci } \vec G_c = \vec F_{ac}$$

$$M\vec g = M\vec a_{cP} \quad \text{adică} \quad \boxed{\vec a_{cP} = \vec g}$$

În această situație, evident:

$$\vec a_{SP} = -\vec a_{cP} \; ; \quad \boxed{\vec a_{SP} = -\vec g}$$ deci scara urcă.

Pentru a urca scara, omul trebuie să coboare pe ea: $\vec a_{0P} = \vec a_{0S} + \vec a_{SP}$; $\boxed{\vec a_{0S} = \vec a_{0P} - \vec a_{SP}}$ (*)

În interacțiunea scară - om: $\vec F_{S0} = -\vec F_{0S}$

Legat de scară:

$$\vec G_S + \vec F_{S0} + \vec T = m_S \vec a_{SP} \quad \text{cu } \vec T = 0 \quad \text{Deci:}$$

$$m_S\vec g + \vec F_{S0} = m_S\vec a_{SP} \; ; \quad \vec F_{S0} = -m_S\vec g - m_S\vec g$$

$\vec F_{S0} = -2m_S\vec g\,'$

legat de om:

$\vec G_0 + \vec F_{OS} = m\vec a_{OP}$; $m\vec g + \vec F_{OS} = m\vec a_{OP}$

$m\vec g - \vec F_{SO} = m\vec a_{OP}$; $m\vec g - (-2m_S\vec g) = m\vec a_{OP}$

$m\vec g + 2m_S\vec g = m\vec a_{OP}$; $\boxed{\vec a_{OP} = \vec g + 2\frac{m_S}{m}\vec g}$

Ducem aceasta în (*):

$\vec a_{OS} = \vec g + 2\frac{m_S}{m}\vec g - (-\vec g)$

$\vec a_{OS} = \vec g + 2\frac{m_S}{m}\vec g + \vec g$; $\vec a_{OS} = 2\vec g + 2\frac{m_S}{m}\vec g$

$\vec a_{OS} = 2\vec g\left(1 + \frac{m_S}{m}\right)$; $\vec a_{OS} = 2\vec g\,\frac{m+m_S}{m}$

$\vec a_{OS} = \frac{2\vec g}{m}(m + M - m)$; $\boxed{\vec a_{OS} = 2\frac{M}{m}\vec g}$

H. 1.2.30

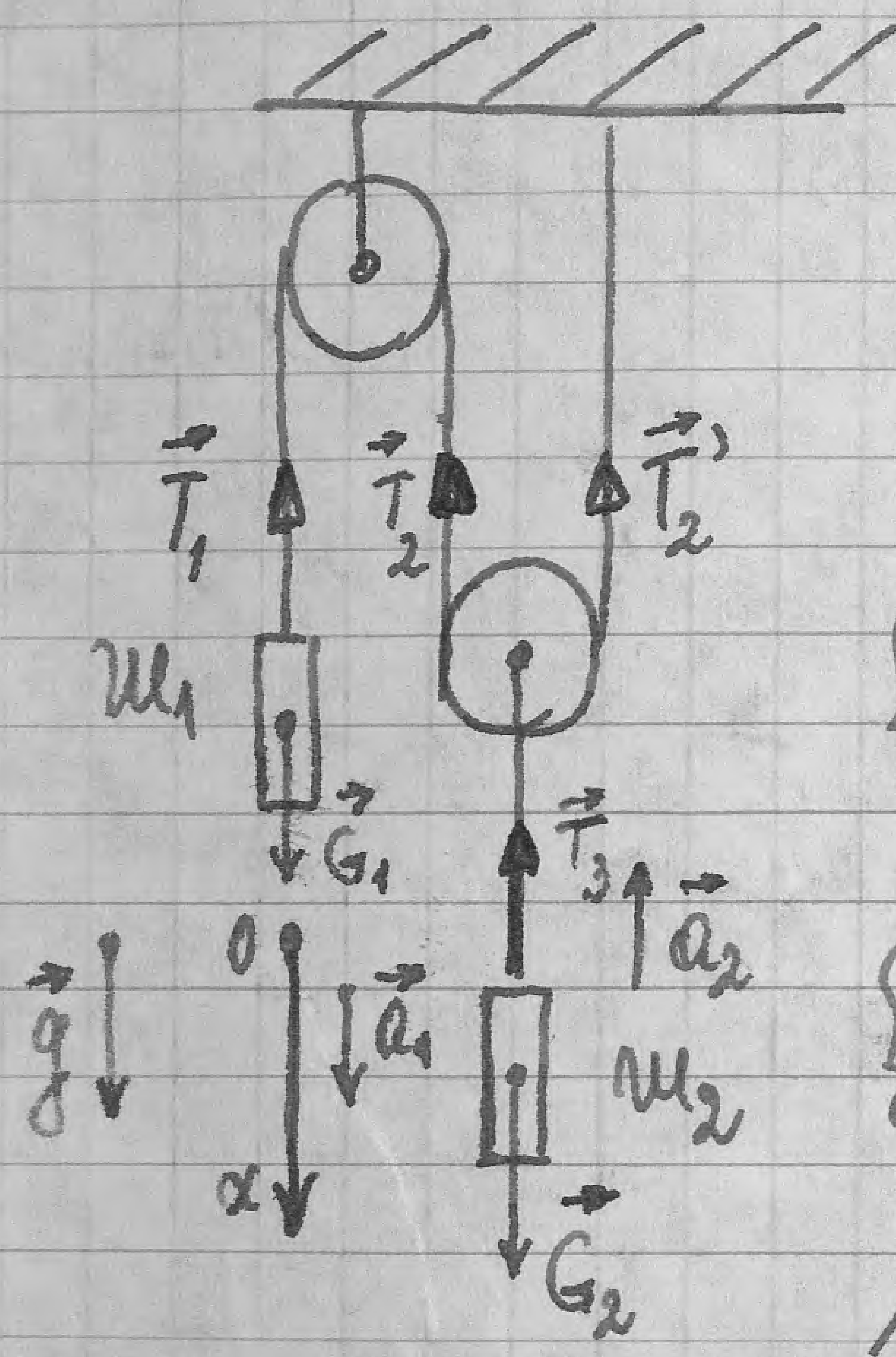
3,0

$m_1 = 350g$; $m_2 = 100g$.

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$ $T = ?$

$\vec T_3 = \vec T_2 + \vec T_2\,' = 2\vec T$

$\vec T_1 = \vec T_2 = \vec T_2\,' = \vec T$



Scriem forța care accelerează fiecare din cele două corpuri:

$$\begin{cases} \vec F_{a_1} = \vec G_1 + \vec T_1 \\ \vec F_{a_2} = \vec G_2 + \vec T_2 + \vec T_2\,' \end{cases}$$ sau

$$\begin{cases} \vec F_{a_1} = \vec G_1 + \vec T \\ \vec F_{a_2} = \vec G_2 + 2\vec T \end{cases}$$ care proiectate pe Ox:

$$\begin{cases} m_1a_1 = m_1g - T \\ -m_2a_2 = m_2g - 2T \end{cases} \Bigg| \cdot(-2) \quad \begin{cases} -2m_1a_1 = -2m_1g + 2T \\ -m_2a_2 = m_2g - 2T \end{cases}$$

$\cancel{a_2(4m_1+m_2) = (2m_1-m_2)g}$

$\boxed{2m_1a_1 + m_2a_2 = 2m_1g - m_2g}$ (1)

Scriem că distanța parcursă de (1) este dublul distanței parcurse de (2):

$\frac{1}{2}a_1\Delta t^2 = 2\,\frac{1}{2}a_2\Delta t^2$ sau

$\boxed{a_1 = 2a_2}$ (2)

ducem (2) în (1):

$$4m_1 a_2 + m_2 a_2 = (2m_1 - m_2)\, g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g}$$

$$\boxed{a_1 = 2\,\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g}$$

$$T = m_1 (g - a_1) = m_1 \left[g - 2\,\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g \right]$$

$$T = m_1 g\, \frac{4m_1 + m_2 - 4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2}$$

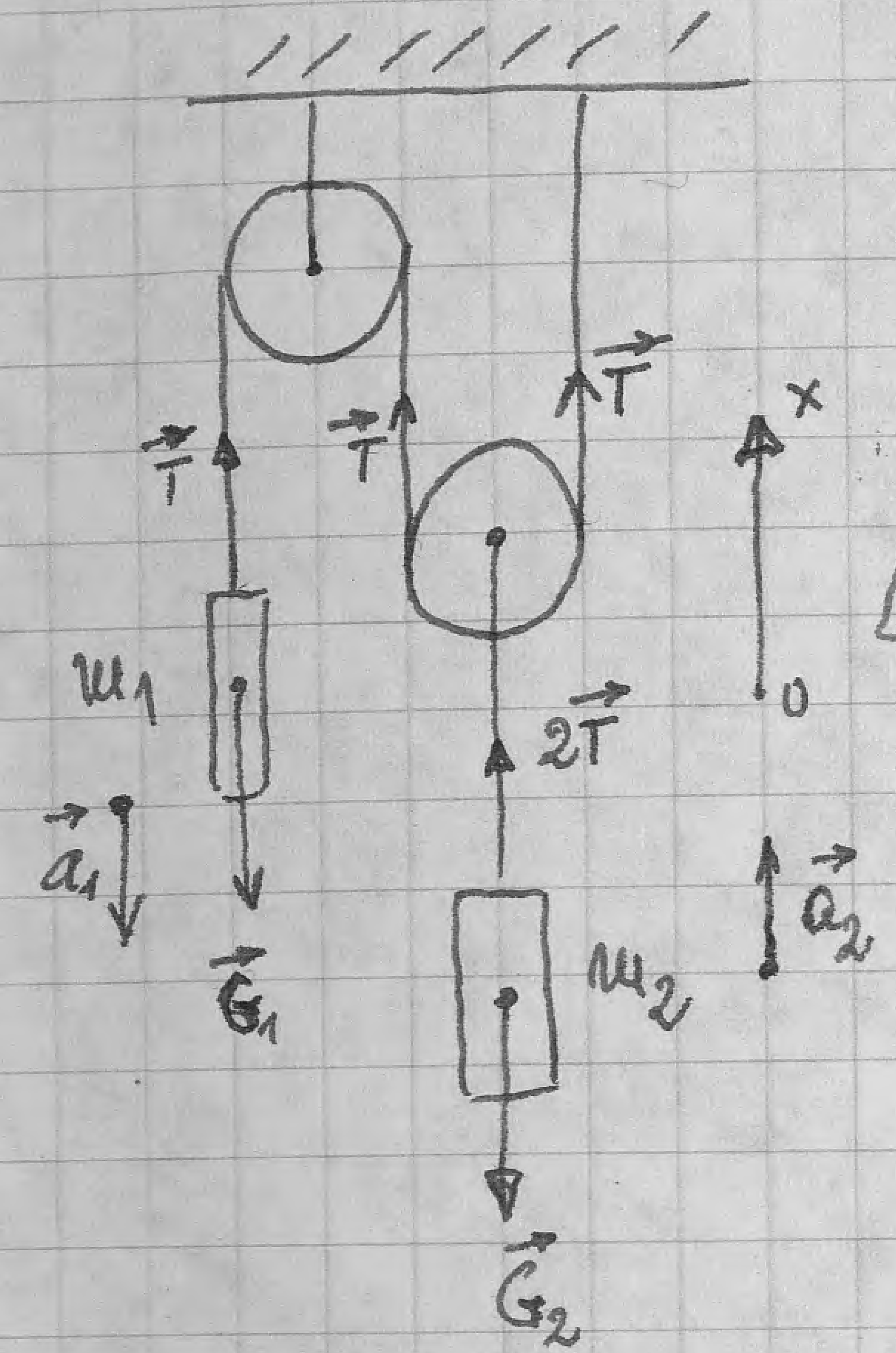
$$\boxed{T = m_1 g\, \frac{3m_2}{4m_1 + m_2}}$$

$$\cancel{T = m_1 g\, \frac{6m_1 + 3m_2}{m_2 - 2m_1}}$$

H.1.2.30 31

$m_1 = 350\ g$; $m_2 = 100\ g$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$ $T = ?$



$$\begin{cases} \vec{F}_{a_1} = \vec{G}_1 + \vec{T} \\ \vec{F}_{a_2} = \vec{G}_2 + 2\vec{T} \end{cases} \qquad \begin{cases} -m_1 a_1 = -m_1 g + T \\ m_2 a_2 = -m_2 g + 2T \end{cases}$$

$$\boxed{T + m_1 a_1 = m_1 g} \quad (1)$$

$$\boxed{2T - m_2 a_2 = m_2 g} \quad (2)$$

a_1, a_2 și T necunoscute. A treia ecuație se obține observând că distanța parcursă de m_1 este de două ori distanța parcursă de m_2:

$$\frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 \;;\; \frac{1}{2} a_1 = a_2 \;;\; \boxed{a_1 = 2a_2} \quad (3)$$

Rezolvăm sistemul (1), (2), (3):

$$\begin{array}{l|l} T + 2m_1 a_2 = m_1 g & \cdot(-2) \\ 2T - m_2 a_2 = m_2 g & \end{array}$$

$$(-4m_1 - m_2)\, a_2 = (m_2 - 2m_1)\, g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g}$$

$$\boxed{a_1 = 2\,\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g}$$

$$T = m_1 g - 2m_1\, \frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\, g$$

$$T = m_1 g \left(1 - 2\,\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\right)$$

$$T = m_1 g\, \frac{4m_1 + m_2 - 4m_1 + 2m_2}{4m_1 + m_2}$$

$$\boxed{T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}}$$

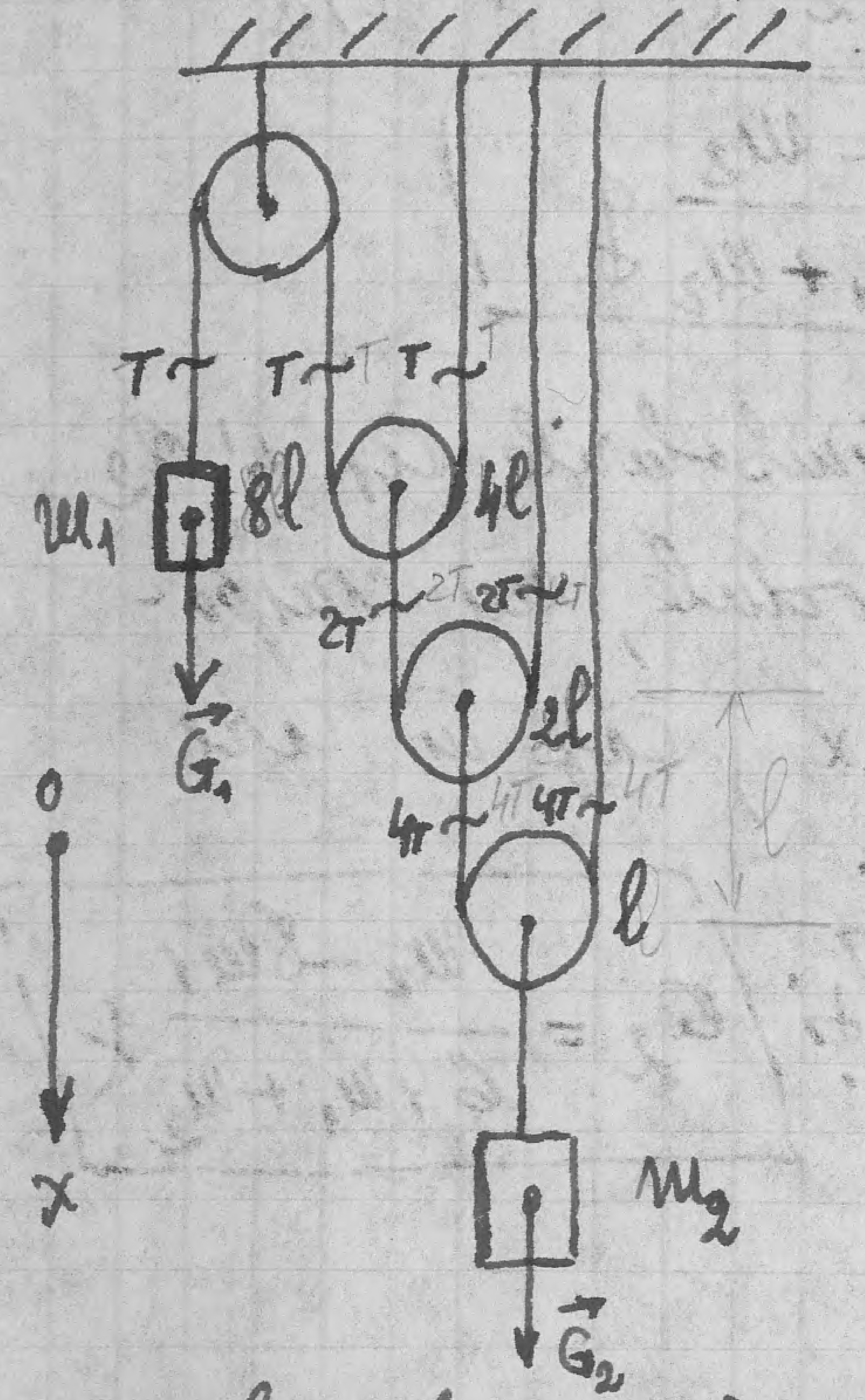
H. 1.2.31

32

$m_1 = 1\,kg$

$m_2 = 16\,kg$

$a_1 = ?\quad a_2 = ?$



În timp ce corpul (2) cu scripetele de care este legat urcă pe distanța l, corpul (1) coboară pe distanța 8l. Dar:

$$\begin{cases} l = \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 \\ 8l = \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2 \end{cases}$$

deci $8 \cdot \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2 = \frac{1}{2} a_1 \Delta t^2$

$$\boxed{a_1 = 8 a_2} \quad (1)$$

Scriem forțele care accelerează corpurile:

$$\begin{cases} \vec{F}_{a_1} = \vec{G}_1 + \vec{T} \\ \vec{F}_{a_2} = \vec{G}_2 + 8\vec{T} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T} \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + 8\vec{T} \end{cases}$$

proiectăm pe Ox:

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - T \\ -m_2 a_2 = m_2 g - 8T \end{cases} \Bigg| \cdot (-8)$$

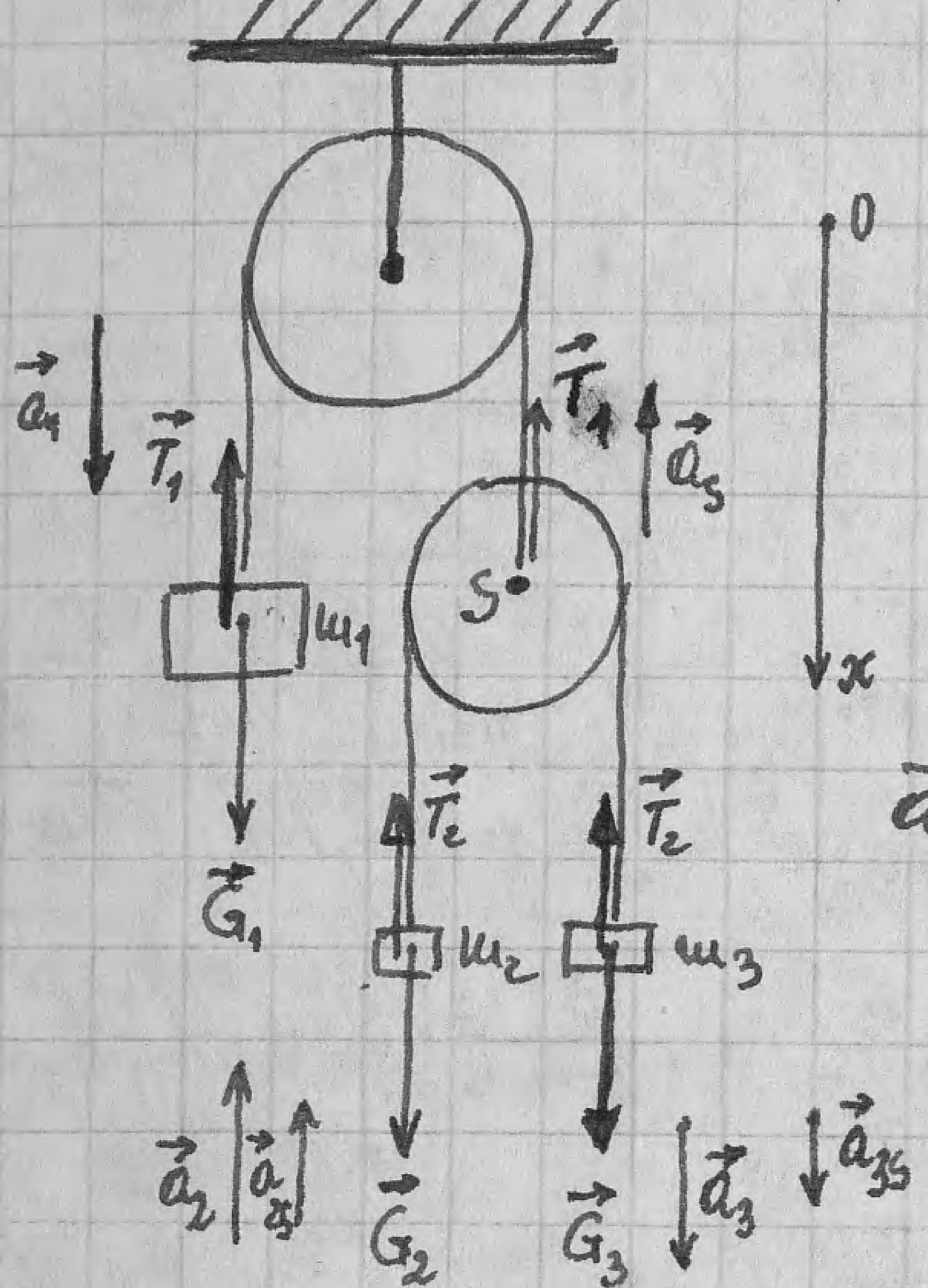
$$(-64 m_1 - m_2)\, a_2 = (-8 m_1 + m_2)\, g$$

$$\boxed{a_2 = \frac{8 m_1 - m_2}{64 m_1 + m_2}\, g}$$

Observație: simbolurile a_1 și a_2 reprezintă module, nu componente pe Ox, caz în care am fi avut:

$$\boxed{a_2 = -8 a_1} \text{ și } \boxed{a_2 = \frac{m_2 - 8 m_1}{64 m_1 + m_2}\, g}$$

H- 1.2.32 33



$m_1 = 0{,}4\,kg$; $m_2 = 0{,}1\,kg$; $m_3 = 0{,}2\,kg$

$a_1 = ?$ $a_2 = ?$ $a_3 = ?$

$T_1 = ?$ $T_2 = ?$

$m_3 = ?$ ca m_2 să fie în repaus

$\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3, \vec a_S$ sunt față de Pământ.

$\vec a_{2S}, \vec a_{3S}$ sunt față de scripetele S.

Evident: $\vec a_1 = -\vec a_S$ (1)

$\vec a_{2S} = -\vec a_{3S}$ (2)

$\vec a_2 = \vec a_{2S} + \vec a_S$ (3); $\vec a_3 = \vec a_{3S} + \vec a_S$ (4); $\vec T_1 = 2\vec T_2$ (5)

$m_1 \vec a_1 = m_1 \vec g + \vec T_1$ (6); $m_2 \vec a_2 = m_2 \vec g + \vec T_2$ (7); $m_3 \vec a_3 = m_3 \vec g + \vec T_2$ (8)

Din 6, 7 și 8, după înlocuirea lui 5 în 6:

$\boxed{\vec a_1 = \vec g + \frac{2\vec T_2}{m_1}}$ (9) $\boxed{\vec a_2 = \vec g + \frac{\vec T_2}{m_2}}$ (10) $\boxed{\vec a_3 = \vec g + \frac{\vec T_2}{m_3}}$ (11)

Înlocuind 1 în 3 și 4, și 2 în 4:

$\vec a_2 = \vec a_{2S} - \vec a_1$ (3') $\vec a_3 = -\vec a_{2S} - \vec a_1$ (4')

care adunate: $\vec a_2 + \vec a_3 = -2\vec a_1$ sau

$\boxed{2\vec a_1 + \vec a_2 + \vec a_3 = 0}$ (12)

Înlocuind pe 9, 10 și 11 în 12 calculăm $\vec T_2$:

$2\vec g + \frac{4\vec T_2}{m_1} + \vec g + \frac{\vec T_2}{m_2} + \vec g + \frac{\vec T_2}{m_3} = 0$; $4\vec g + \left(\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right)\vec T_2 = 0$

$$\boxed{\vec T_2 = -\frac{4 m_1 m_2 m_3}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + 4 m_2 m_3}\, \vec g} \quad (13)$$

Ducând 13 pe rând în 9, 10 și 11:

$$\vec{a}_1 = \vec{g} + \frac{2}{m_1}\,\frac{-4m_1m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\,\vec{g} = \vec{g}\left[1-\frac{8m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_1 = \vec{g}\,\frac{m_1(m_2+m_3)-4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}} \quad (14)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g} + \frac{1}{m_2}\,\frac{-4m_1m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\,\vec{g} = \vec{g}\left[1-\frac{4m_1m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\right]$$

$$\vec{a}_2 = \vec{g}\,\frac{m_1m_2-3m_1m_3+4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3} \qquad \boxed{\vec{a}_2 = \vec{g}\,\frac{m_1(m_2-3m_3)+4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}} \quad (15)$$

$$\vec{a}_3 = \vec{g} + \frac{1}{m_3}\,\frac{-4m_1m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}\,\vec{g} = \vec{g}\,\frac{-3m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}{m_1m_2+m_1m_3+4m_2m_3}$$

$$\boxed{\vec{a}_3 = \vec{g}\,\frac{m_1(m_3-3m_2)+4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)+4m_2m_3}} \quad (16)$$

Pentru calculul lui m_3 astfel ca $\vec{a}_2=0$, introducem în 12 și obținem: $\boxed{2\vec{a}_1+\vec{a}_3=0}$, (12')

și din 10: $\vec{T}_2 = -m_2\vec{g}$ care dusă în 9 și 11:

$$\vec{a}_1 = \vec{g} + \frac{2}{m_1}(-m_2\vec{g}) = \vec{g}\left(1-\frac{2m_2}{m_1}\right) \qquad \boxed{\vec{a}_1 = \frac{m_1-2m_2}{m_1}\,\vec{g}} \quad (14')$$

$$\vec{a}_3 = \vec{g} + \frac{1}{m_3}(-m_2\vec{g}) = \vec{g}\left(1-\frac{m_2}{m_3}\right) \qquad \boxed{\vec{a}_3 = \frac{m_3-m_2}{m_3}\,\vec{g}} \quad (16')$$

Ducând 14' și 16' în 12':

$$2\,\frac{m_1-2m_2}{m_1}\,\vec{g} + \frac{m_3-m_2}{m_3}\,\vec{g} = 0 \qquad \frac{2m_1-4m_2}{m_1}+\frac{m_3-m_2}{m_3}=0$$

$$2m_1m_3-4m_2m_3+m_1m_3-m_1m_2=0$$

$$(3m_1-4m_2)\,m_3 = m_1m_2 \qquad \boxed{m_3 = \frac{m_1m_2}{3m_1-4m_2}}$$

. — .

1.3.1 Soluție, Gheorghe Alina, X A

Pavel Mihai, X B

Conform definiției

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad (1)$$

Dar: $\Delta r = 2d$; $\Delta t_1 = \frac{d}{v_1}$; $\Delta t_2 = \frac{d}{v_2}$

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$; $\Delta t = \frac{v_1+v_2}{v_1v_2}\cdot d$

Înlocuind în (1) pe Δr și Δt avem

$$v_m = \frac{2d}{\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}\,d} \quad ; \quad v_m = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$$

Numeric: $v_m = 9{,}6\ Km/h$

1.3.2. Soluție: Gheorghe Alina, XA

Notăm $AB = d$

$$\Delta s = AB + AB = 2d$$

$$\Delta t_1 = \frac{d}{v_1} \;;\; \Delta t_2 = \frac{d}{v_2}$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 \;;\quad \Delta t = \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \cdot d$$

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \;;\quad v_m = \frac{2d}{\frac{(v_1+v_2)d}{v_1 v_2}}$$

$$v_m = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Numeric: $v_m = 48\ Km/h$

1.3.3. Soluție, Gheorghe Alina, XA

Fie d drumul total. Din el

$$d_1 = f \cdot d$$

a fost parcurs cu viteza v_1, respectiv

$$d_2 = d - d_1 \quad \text{sau} \quad d_2 = (1-f)d$$

a fost parcurs cu viteza v_2.

Duratele vor fi

$$\Delta t_1 = \frac{d_1}{v_1} = \frac{f \cdot d}{v_1} \;;\quad \Delta t_2 = \frac{d_2}{v_2} = \frac{(1-f)d}{v_2}$$

și $$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{fd}{v_1} + \frac{(1-f)d}{v_2} = d\,\frac{v_2 f + (1-f)v_1}{v_1 v_2}$$

Așadar

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = d\,\frac{v_1 v_2}{d[v_2 f + (1-f)v_1]} = \frac{v_1 v_2}{v_2 f + (1-f)v_1}$$

Numeric: $\quad v_m = 60\ Km/h$

H.1.3.4

$v_1 = 12\ km/h;\ v_2 = 8\ km/h;\ v_3 = 4\ km/h$

$v_m = ?$

$$v_m = \frac{d}{t}$$

$$t_1 = \frac{d}{2v_1};\quad \frac{t-t_1}{2} = \frac{d_2}{v_2};\quad \frac{d}{2} - d_2 = v_3\frac{t-t_1}{2}$$

$$\frac{d}{2} - d_2 = v_3 \cdot \frac{d_2}{v_2};$$

$$d_2\left(\frac{v_3}{v_2}+1\right) = \frac{d}{2}$$

$$d_2 = \frac{d}{2}\frac{v_2}{v_2+v_3}$$

$$t - t_1 = \frac{2d_2}{v_2}$$

$$t = \frac{2}{v_2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{v_2}{v_2+v_3} + \frac{d}{2v_1}$$

$$t = d\,\frac{2v_1+v_2+v_3}{2v_1(v_2+v_3)}$$

$$\boxed{v_m = \frac{2v_1(v_2+v_3)}{2v_1+v_2+v_3}}$$

1.3.5 Solutie, Gheorghe Alina, X A

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{d_1+d_2+d_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}$$

$$d_1 = v_1\cdot\Delta t_1;\quad d_2 = v_2\cdot\Delta t_2;\quad d_3 = v_3\cdot\Delta t_3$$

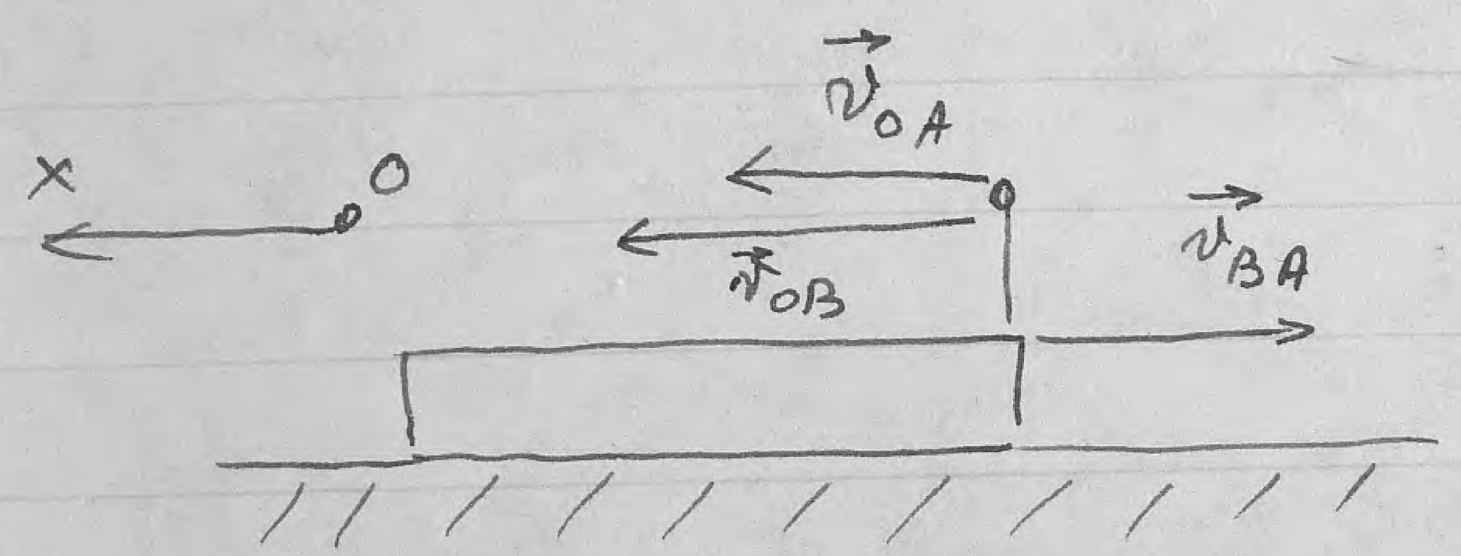
$$v_m = \frac{v_1\cdot\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + v_3\Delta t_3}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3}$$

Numeric:

$$v_m = \frac{\frac{0,5}{60}\cdot 10 + \frac{1}{60}\cdot 20 + \frac{2}{60}\cdot 40}{\frac{0,5}{60}+\frac{1}{60}+\frac{2}{60}}\ km/h$$

$$v_m = 30\ km/h$$

H- 1.3.6



Bară: M; l

om: m, $u = v_{OB}$

Rezolvare fără conservarea impulsului:

$\vec v_{OA} = \vec v_{OB} + \vec v_{BA}$

$\boxed{v_{OA} = v_{OB} - v_{BA}}$ Relație între vitezele momentane în mom. pornirii

$\vec F_{OB} = -\vec F_{BO}$ Relație între forțele momentane în mom. pornirii

$-F_{OB} = -F_{BO}$

$\boxed{F_{OB} = F_{BO}}$ $M a_{BA} = m a_{OA}$ aici având accelerații

$\boxed{a_{BA} = \frac{m}{M} a_{OA}}$ momentane în mom. pornirii

Dar $\vec a_{OA} = \vec a_{OB} + \vec a_{BA}$ (acc. momentane) în mom. pornirii

$\boxed{a_{OA} = a_{OB} - a_{BA}}$

$a_{OA} = a_{OB} - \frac{m}{M} a_{OA}$

$a_{OA} \frac{m+M}{M} = a_{OB}$; $\boxed{a_{OA} = \frac{M}{m+M} a_{OB}}$

Pe durata „t" f. scurtă cât durează variația vitezelor omului și barcii; la pornirea omului, putem considera accelerațiile constante! Atunci

$\cancel{v_{OB} = a_{OB} t}$; $\cancel{v_{OA} = a_{OA} t = \frac{M}{m+M} a_{OB} t}$

$\cancel{v_{BA} = a_{BA} t = \frac{m}{M} \frac{M}{m+M} a_{OB}}$

$\cancel{\frac{M}{m+M} a_{OB} t = u + \frac{m}{m+M} a_{OB}}$

$$v_{OB} = a_{OB}\,t \quad ; \quad a_{OB} = \frac{v_{OB}}{t}$$

$$v_{OA} = a_{OA} \cdot t = \frac{M}{m+M}\, a_{OB} t = \frac{M}{m+M}\, \frac{v_{OB}}{t} \cdot t$$

$$v_{OA} = \frac{M}{m+M} \cdot v_{OB} \qquad \text{Cum } v_{OB} = u$$

$$\boxed{v_{OA} = \frac{M}{m+M}\, u}$$

$$v_{BA} = a_{BA} \cdot t = \frac{m}{M} \cdot a_{OA} \cdot t = \frac{m}{M} \cdot \frac{M}{m+M} \cdot a_{OB} \cdot t$$

$$v_{BA} = \frac{m}{m+M}\, \frac{v_{OB}}{t} \cdot t$$

$$v_{BA} = \frac{m}{m+M} \cdot v_{OB} \; ; \; \boxed{v_{BA} = \frac{m}{m+M}\, u}$$

ultima se scrie și din

$v_{OA} = v_{OB} - v_{BA}$ înlocuind pe v_{OB} și v_{OA}.

Drumurile parcurse. Mișcările uniform

$$l_{OB} = v_{OB} \cdot t \Rightarrow \quad t = \frac{l_{OB}}{v_{OB}}$$

$$l_{OA} = v_{OA} \cdot t = v_{OA} \cdot \frac{l_{OB}}{v_{OB}}$$

$$l_{OA} = \frac{M}{m+M} \cdot u \cdot \frac{l}{u} \qquad \boxed{l_{OA} = \frac{M}{m+M}\, l}$$

$$l_{BA} = v_{BA} \cdot t = \frac{m}{m+M}\, u \cdot \frac{l}{u} = \frac{m}{m+M}\, l$$

$$\boxed{l_{BA} = \frac{m}{m+M}\, l}$$

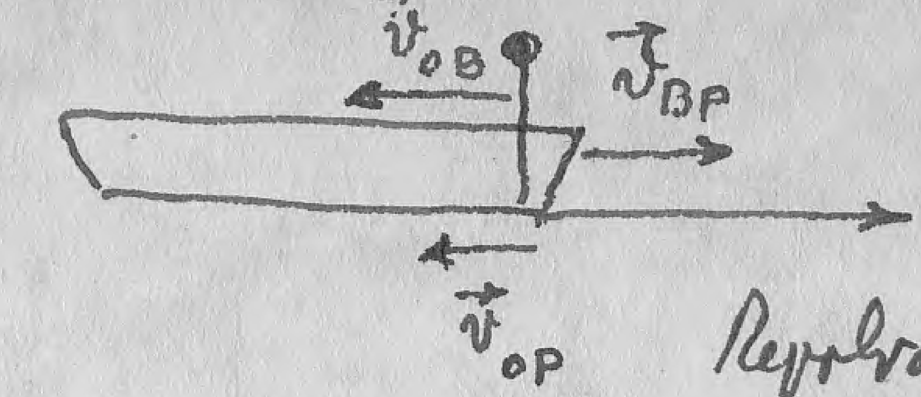
10 – 1.3.6 Hristev 1983

$M = 40\,kg$ $\quad v_{OP} =$

$m = 60\,kg$ $\quad v_{BP} =$

$v_{OB} = 1\,m/s$ $\quad l_{OP} =$

$l_{OB} = 2\,m$ $\quad l_{BP} =$



Rezolvare cu conservarea impulsului

1) $\vec{v}_{OA} = \vec{v}_{OB} + \vec{v}_{BA}$

$$-v_{OA} = -v_{OB} + v_{BA}$$

$$\boxed{v_{OA} + v_{BA} = v_{OB}}$$

3) $v_{OB} = \frac{l_{OB}}{t}$; $\quad t = \frac{l_{OB}}{v_{OB}}$

$l_{BA} = \underbrace{v_{BA}}_{\text{nu știu dacă este const.}} \cdot t \; ; \; l_{OA} = \underbrace{v_{OA}}\cdot t$

$$\boxed{l_{BA} = v_{BA} \cdot \frac{l_{OB}}{v_{OB}}} \; ; \; \boxed{l_{OA} = v_{OA}\, \frac{l_{OB}}{v_{OB}}}$$

Asadar aceste relații nu pot fi scrise acum, ci după aplicarea conservării impulsului

2) $m\,\vec{v}_{OA} + M\,\vec{v}_{BA} = 0$; $\; -m\,v_{OA} + M\,v_{BA} = 0$

$$\boxed{v_{OA} = \frac{M}{m}\, v_{BA}} \qquad v_{BA} = v_{OB} - \frac{M}{m}\, v_{BA} \; ; \; v_{BA}\,\frac{m+M}{m} = v_{OB}$$

$$\boxed{v_{BA} = \frac{m}{m+M}\, v_{OB}} = ct \qquad \boxed{v_{OA} = \frac{M}{m+M}\, v_{OB}} = ct$$

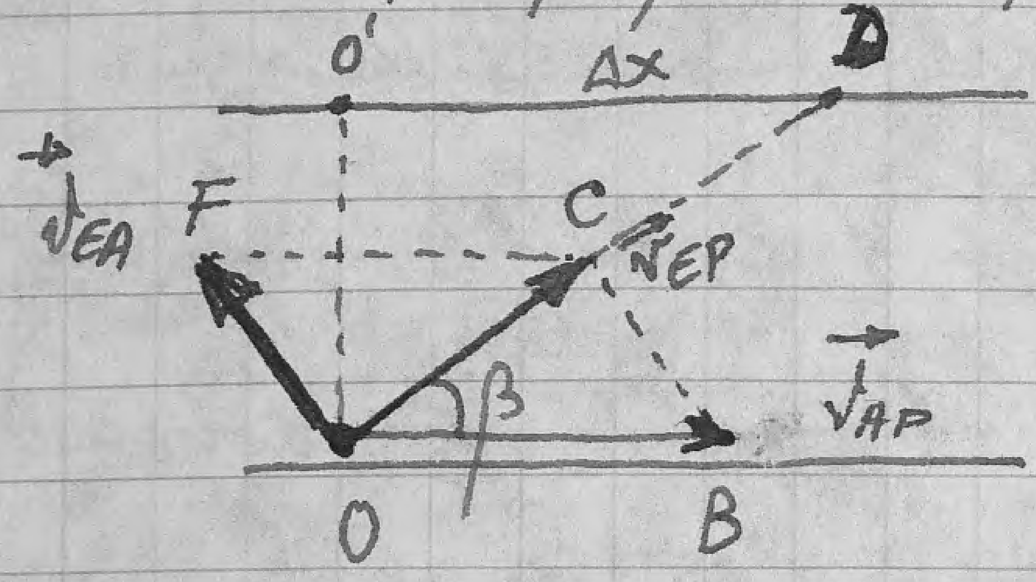
4) $\boxed{l_{BA} = \frac{m}{m+M} \cdot l_{OB}}$ $\qquad$ $\boxed{l_{OA} = \frac{M}{m+M}\, l_{OB}}$

Obs. Conservarea impulsului se scrie între momentul inițial, când totul era în repaus, și cel în care omul are viteza $\vec{v}_{OB}$ față de barcă și barca $\vec{v}_{BA}$ față de apă.

În toată această perioadă de timp sistemul rămâne izolat, deci impulsul se conservă.

H.1.3.8

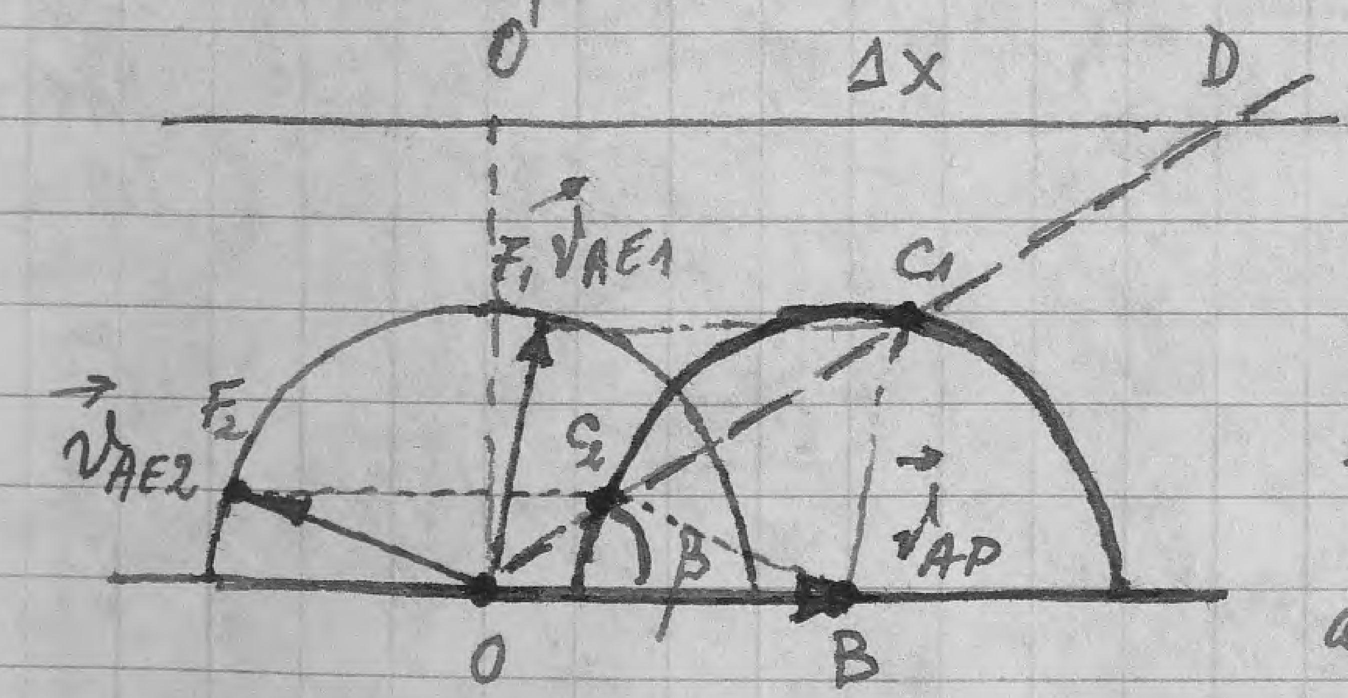
$v = 0{,}5\ m/s$; $v_0 = 1\ m/s$; $\alpha = ?$



$$\vec{v}_{EP} = \vec{v}_{EA} + \vec{v}_{AP}$$

Deplasarea „la vale" a elevului, $\Delta x = O'D$ este determinată de unghiul β al direcției rezultantei $\vec{v}_{EP}$ a vitezelor apei $\vec{v}_{AP}$ și a elevului față de apă $\vec{v}_{EA}$.

Cum $\vec{v}_{AP} = ct.$ și $v_{EA} = ct$, urmează că β este determinat de direcția lui $\vec{v}_{EA}$. Dar vîrful F al paralelogramului OBCF se află pe cercul de centru O și rază v_{EA}, iar vîrful C se află pe cercul de centru B și rază v_{EA}.

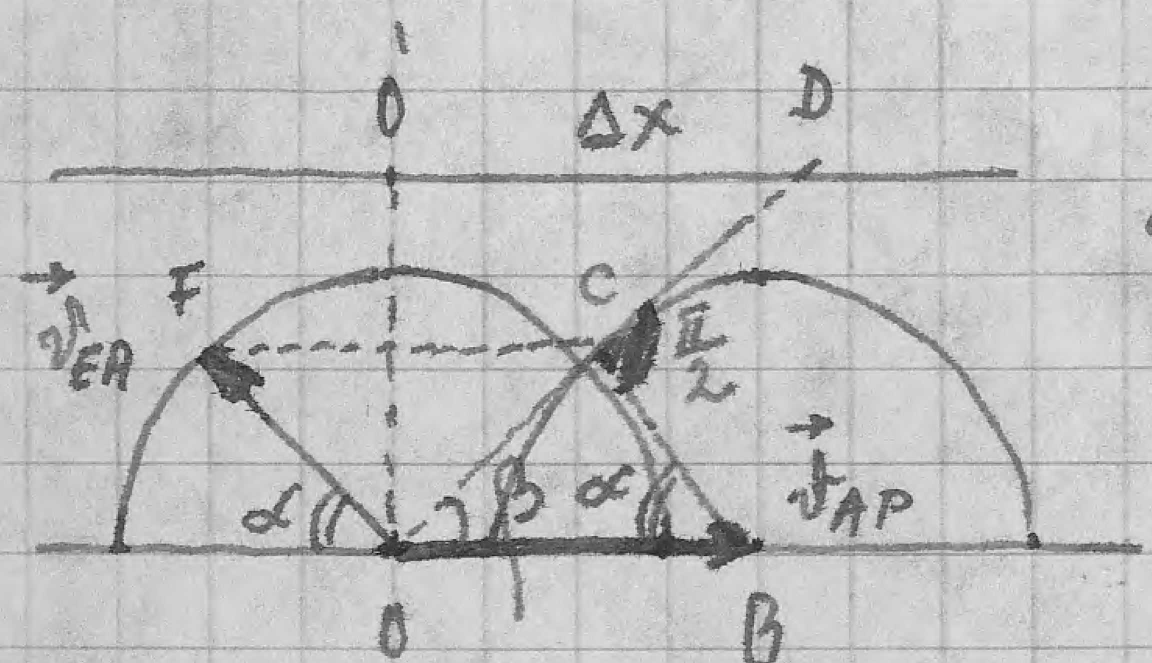


Cazul 1: $v_{AP} > v_{EA}$

O deplasare „la vale" Δx, dată de o valoare a lui β, este realizată de două direcții diferite a lui $\vec{v}_{AE}$ ($\vec{v}_{AE1}$ și $\vec{v}_{AE2}$) după cum vîrful C al rezultantei vitezelor se ia în unul, sau altul din punctele C_1 și C_2 de intersecție a direcției rezultantei pe semicercul cu centrul în B.

~~Paralelogramul vitezelor există numai dacă β nu depășește valoarea ce face direcția rezultantei tangentă la semicercul de centru B. Așadar,~~ Valoarea maximă a lui β este când rezultanta vitezelor este tangentă la semicercul cu centrul în B și raza v_{EA}.

Evident, la cea mai mare valoare a lui β corespunde cea mai mică valoare a lui Δx. Să determinăm unghiul α al lui $\vec{v}_{EA}$ cu direcția malului râului în acest caz.



Triunghiul BCO este dreptunghic în C:

$$\cos\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{OF}{OB} = \frac{v_{EA}}{v_{AP}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{v}{v_0}}$$

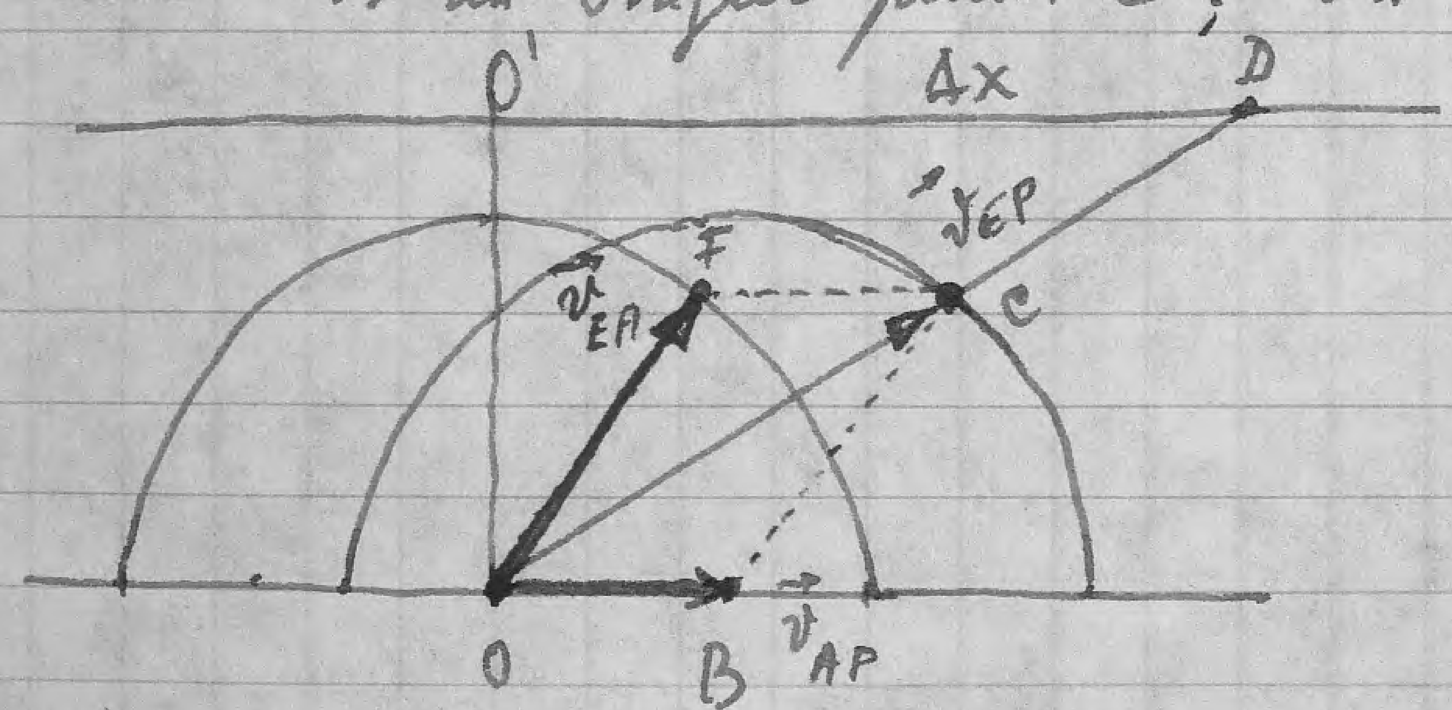
$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \qquad \boxed{\alpha = 60^\circ}$$

Observație: soluția nu este valabilă pentru cazul $v_{EA} > v_{AP}$, când punctul O ar fi interior sau pe semicercul de centru B și raza v_{AE}.

H.1.3.8 - continuare

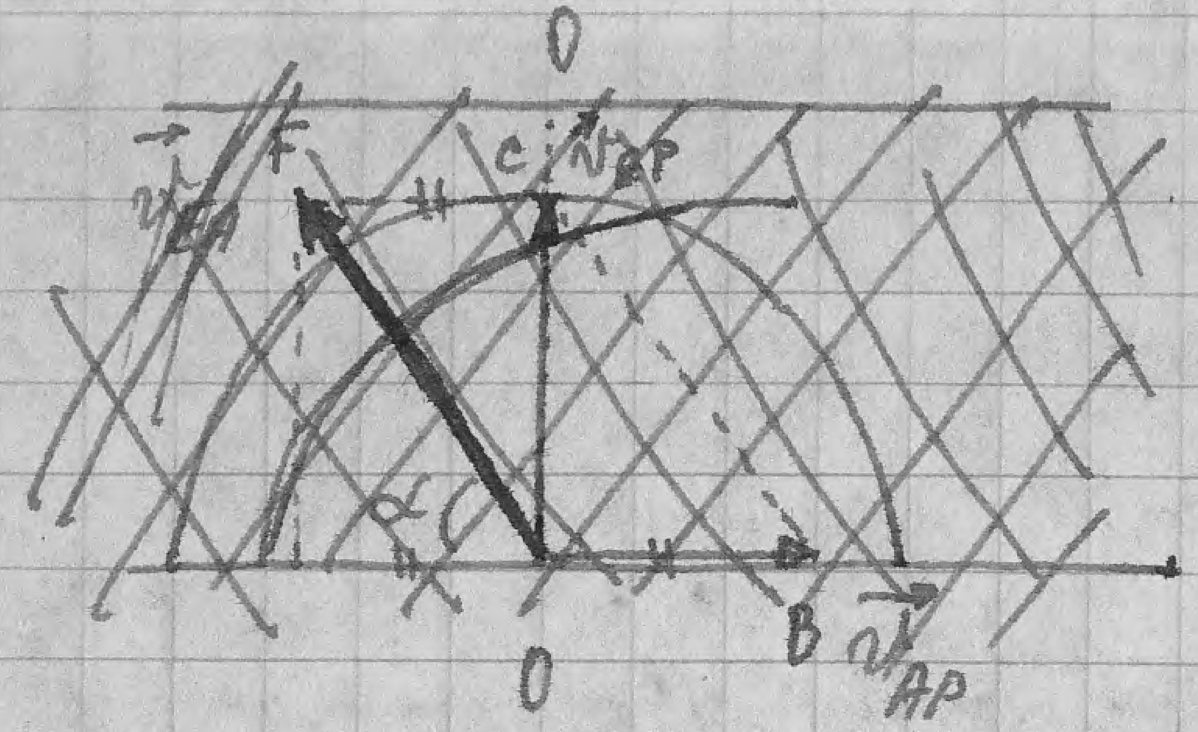
În adevăr, pentru $v_{EA} = v_{AP}$ semicercul cu centrul în B va trece prin O și punctul C va coincide cu O, deci OCB nu mai este triunghi ci segment. Ar urma $\alpha = 0$. Dar în acest caz elevul înotând stă pe loc în O și nu traversează râul, contrar celor cerute de enunț.

Pentru $v_{EA} > v_{AP}$ punctul O va fi interior semicercului menționat și din el nu se va putea duce tangentă la acel semicerc și soluția propusă nu se menține. În schiță rezultanta OC a vitezelor va tăia acest semicerc într-un singur punct C; adică o deplasare Δx



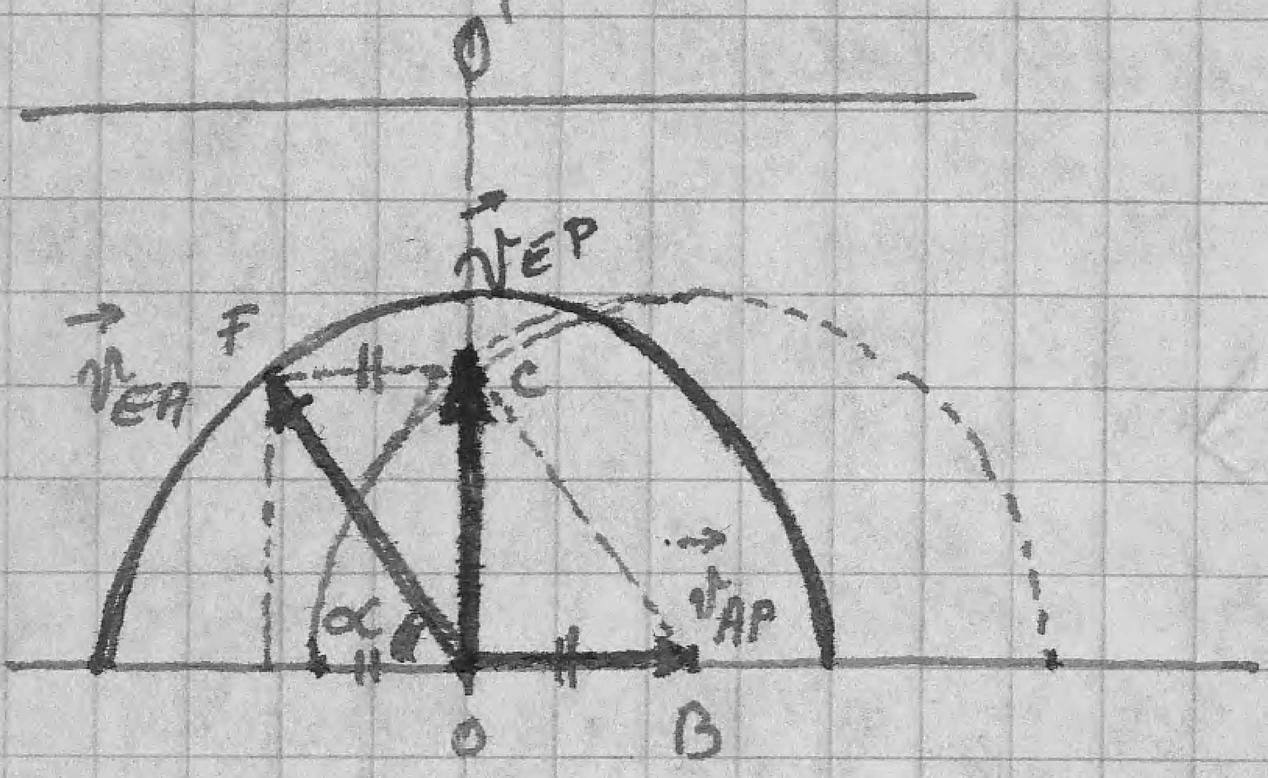
este realizată de o singură direcție a lui $\vec{v}_{EA}$.

În cazul 1 valoarea minimă a lui Δx era limitată de poziția tangentei la semicercul cu centrul B și raza v_{EA}, dusă din O. Acum această limitare nu există, direcția lui $\vec{v}_{EP}$ putând fi oarecare, în particular putând coincide cu OO', când Δx = 0.



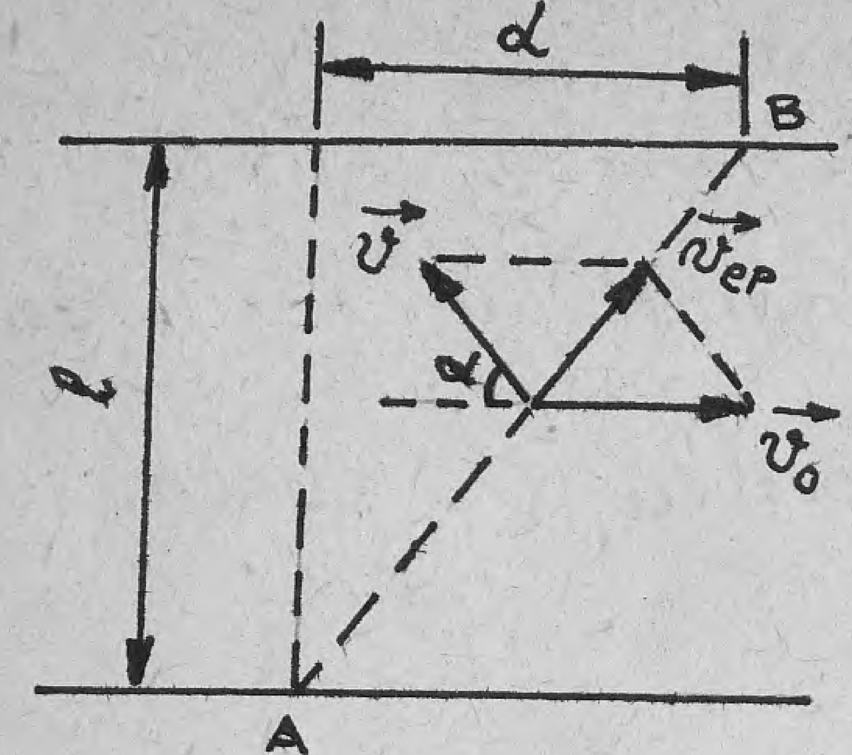
$$\cos\alpha = \frac{v_{AP}}{v_{EA}} = \frac{v_0}{v}$$

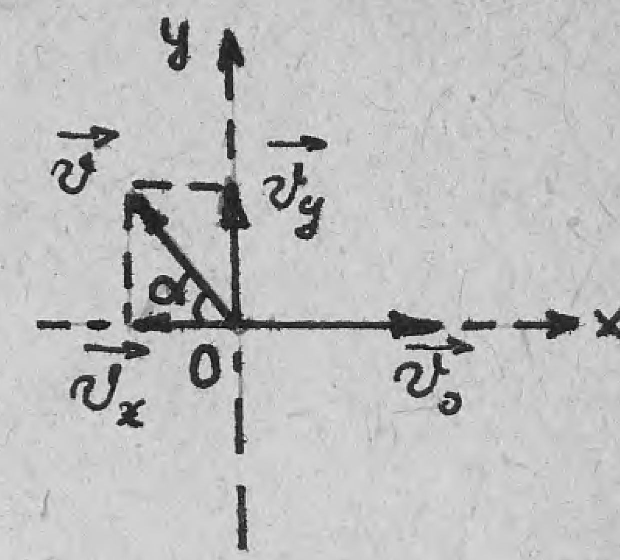
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{v_0}{v}}$$



H – 1.3.8 43

Soluție: Corjin George, cl. a XII^a B, 1987/88





Conform regulii compunerii vitezelor:

$$\vec{v}_{EP} = \vec{v} + \vec{v}_0 \qquad (1)$$

unde $\vec{v}_{EP}$ este viteza elevului față de Pămînt.

Proiectînd pe Ox, Oy, respectiv:

$$\begin{cases} v_{EPx} = -v_x + v_0 & (2) \\ v_{EPy} = v_y & (2') \end{cases}$$

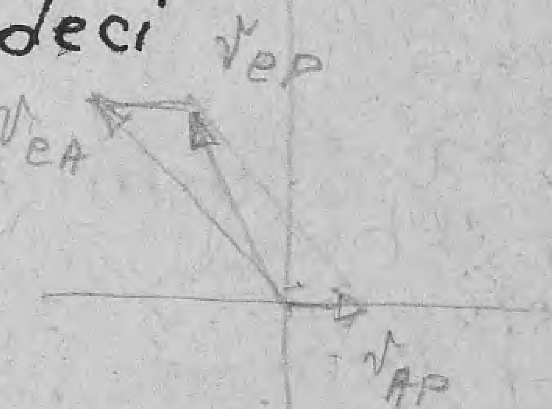
valabile pentru cazul din figură

Figura a impus semnele!

Aici $v_{EPx} > 0$

Dar $v_x = v\cos\alpha$ și $v_y = v\sin\alpha$, deci

$$\begin{cases} v_{EPx} = v_0 - v\cdot\cos\alpha & (3) \\ v_{EPy} = v\cdot\sin\alpha & (3') \end{cases}$$



Situația nu-i posibilă ea ar duce la deplasarea elevului „la deal" nu la vale cum spune problema

Fie t durata traversării apei. Atunci

$$\ell = v_{EPy}\cdot t$$

$$d = v_{EPx}\cdot t$$

deci $\dfrac{d}{\ell} = \dfrac{v_{EPx}}{v_{EPy}}$; $d = \ell\,\dfrac{v_{EPx}}{v_{EPy}}$. Ținînd cont de (3) și (3') rezultă

$$d = l \cdot \frac{v_0 - v \cdot \cos\alpha}{v \cdot \sin\alpha} \qquad (4)$$

Pentru a obține minimul lui d derivăm expresia (3) în raport cu α și punem condiția $\frac{dd}{d\alpha} = 0$;

$$\frac{dd}{d\alpha} = \frac{l}{v} \cdot \frac{v\sin\alpha \cdot \sin\alpha - (v_0 - v\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

deci :

$$v\sin^2\alpha - v_0\cos\alpha + v\cos^2\alpha = 0 \qquad (5)$$

Rezultă

$$v = v_0 \cos\alpha$$

de unde

$$\cos\alpha = \frac{v}{v_0} \qquad (6)$$

Prin urmare $\alpha = \arccos\frac{v}{v_0}$ (6')

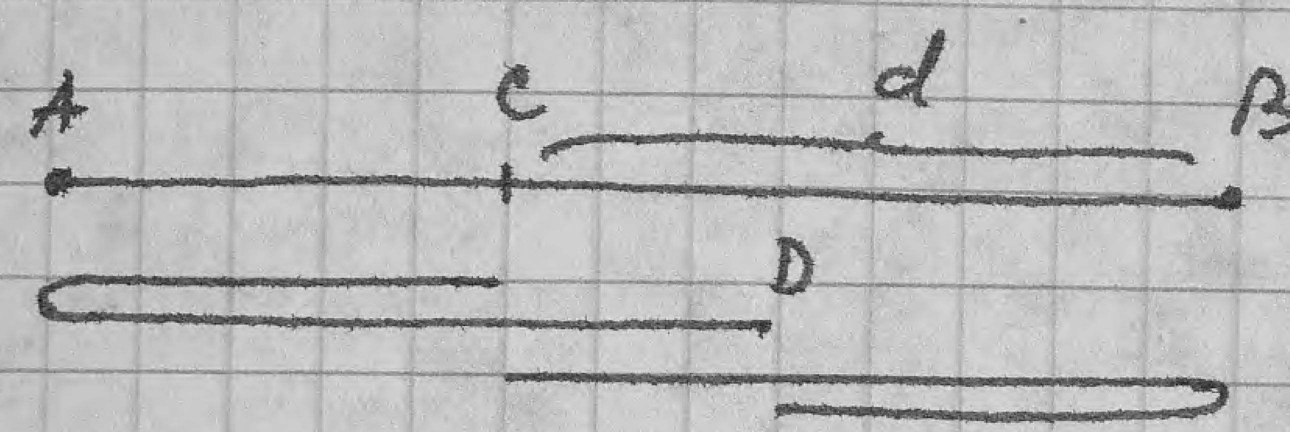
Numeric,

$$\alpha = \arccos\frac{0{,}5}{1} = \arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$$

Obs. Soluția valabilă pentru $v < v_0$.
Dar dacă $v \geq v_0$?

44

H. 1.3.10



$d = 45$ Km

$\tau = 3$ ore

$AB = x$

Din figură se vede că în timpul τ camioanele au parcurs drumul $2x$:

$$2x = (v_A + v_B)\tau \qquad (1)$$

Notând cu t timpul de la pornire la prima lor întâlnire, avem

$$x = (v_A + v_B)t \qquad (2)$$

$$d = v_B t \qquad (3)$$

Făcând raportul lui (1) la (2) avem :

$$\frac{2}{1} = \frac{\tau}{t} \qquad \boxed{t = \frac{\tau}{2}} \quad (4)$$

Ducând (4) în 3 avem :

$$v_B = \frac{d}{t} = \frac{d}{\frac{\tau}{2}} = \frac{2d}{\tau}$$

$$\boxed{v_B = \frac{2d}{\tau}} = \frac{2\cdot 45}{3} = 2\cdot 15 = 30 \text{ Km/h}.$$

Obs. $v_A = v_B$.

$$\begin{cases}(v_A+v_B)t=\frac{1}{2}(v_A+v_B)\tau \\ t=\frac{d}{v_B}\end{cases}$$

$$\frac{d}{v_B}=\frac{\tau}{2}$$

$$\boxed{v_B=\frac{2d}{\tau}}$$

Sau: t fiind timpul în care camioanele parcurg AB, iar τ cel în care ele parcurg 2·AB, avem

$$t=\frac{\tau}{2}$$

și $v_B=\frac{d}{\frac{\tau}{2}}=\frac{2d}{\tau}$

H.13.11

$l = 400\,m$; $v = 4\,km/h$; $v_0 = 12\,km/h$. Față de un reper legat de coloană, biciclistul la dus are viteza

$$v_{BC}=v_0-v$$

iar la întors

$$v^*_{BC}=v_0+v$$

Durata va fi: $t=\frac{l}{v_0-v}+\frac{l}{v_0+v}$

$$\boxed{t=\frac{l(v_0+v+v_0-v)}{v_0^2-v^2}=\frac{2v_0 l}{v_0^2-v^2}}$$

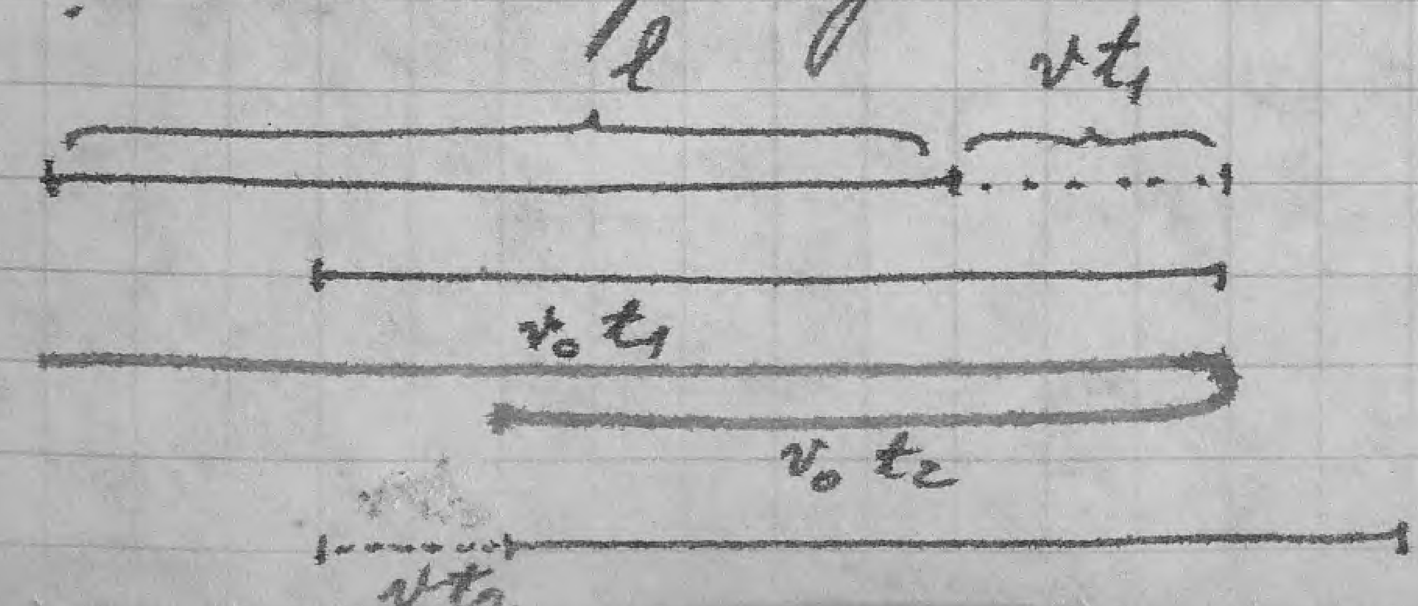
b) Față de un reper legat de biciclist, coloana are la dus viteza

$$v_{CB}=v_0-v$$

iar la întors $v^*_{CB}=v_0+v$

durata fiind $\boxed{t=\frac{l}{v_{CB}}+\frac{l}{v^*_{CB}}=\frac{2v_0 l}{v_0^2-v^2}}$

c) Față de un reper legat de pământ



$v_0 t_1 = l + v t_1$

$v_0 t_2 = l - v t_2$

$(v_0 - v)t_1 = l \qquad t_1 = \frac{l}{v_0 - v}$

$(v_0 + v)t_2 = l \qquad t_2 = \frac{l}{v_0 + v}$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{v_0 - v} + \frac{l}{v_0 + v} = \boxed{\frac{2v_0 l}{v_0^2 - v^2}}$$

1.3.14. Soluție, Gheorghe Alina, x A

Pentru $t \in (0;5)s$, $a = ct. = 4\ m/s^2$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Delta v = a\Delta t$$

$$v = v_0 + a\Delta t$$

$$v = -20 + 4(t - t_0)\ ;\ t_0 = 0$$

$$v = -20 + 4t$$

$t = 0s$; $v = v_0 = -20\ m/s$

$t = 5s$; $v = 0\ m/s$

Viteza are sens opus accelerației în intervalul de timp $(0;5)s$. Deci mișcarea este uniform încetinită

Pentru $t \in (5;10s)$, accelerația a este nulă. Deci corpul execută o mișcare rectilinie uniformă sau este în repaus. Dar cum viteza la momentul $t = 5s$ este zero rezultă că corpul este în repaus.

Pentru $t \in (10; 15)$ s:

$$a = -2\ m/s^2$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0'}{\Delta t}$$

$$v = v_0' + a\,\Delta t$$

v_0' este viteza la momentul $t = 10$ s și este nulă.

$$v = -2\,(t - t_0)$$

$$t_0 = 10\ s \quad , v = 20 - 2t$$

$$t \in (10, 15)\ s$$

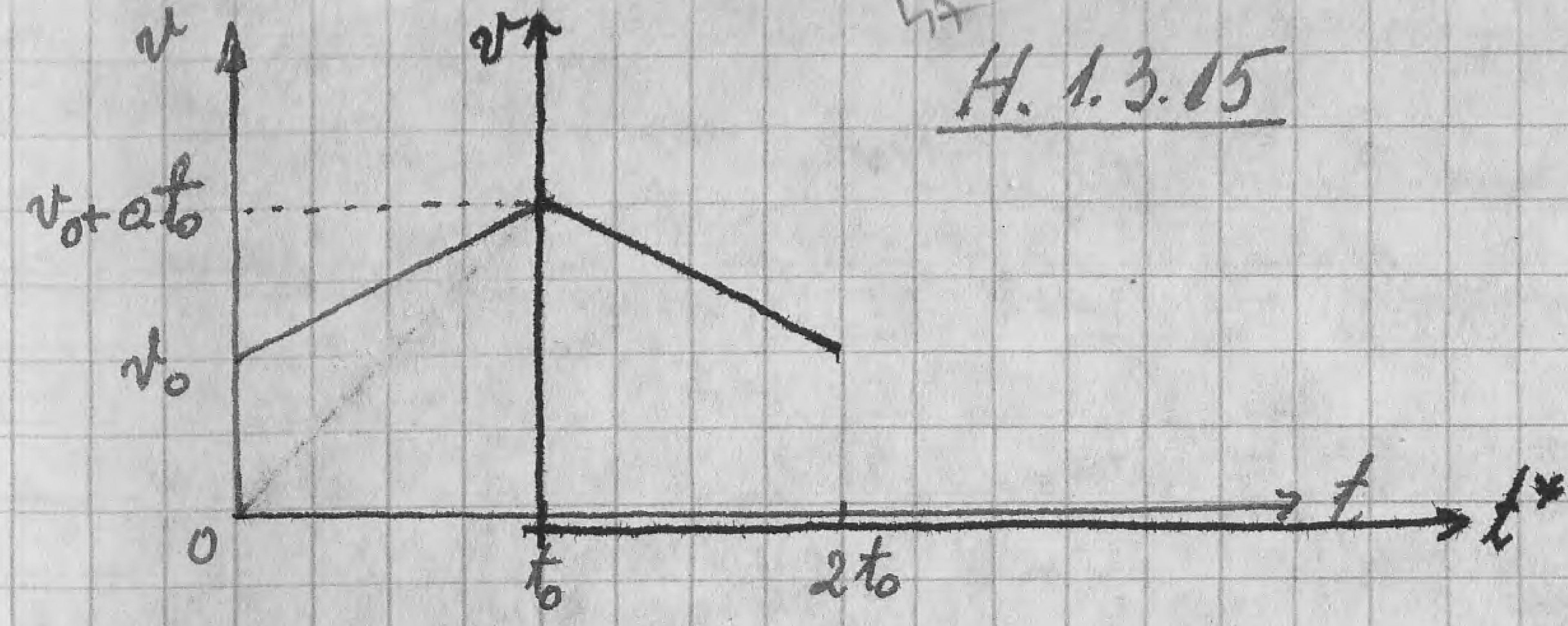
La momentul $t = 15$ s, viteza este:

$$v = -10\ m/s$$

Vectorul viteză și vectorul accelerație au același semn, deci mișcarea mobilului este uniform accelerată.

47

H. 1.3.15



$\boxed{v = v_0 + at}$ $\boxed{t \in [0; t_0)}$ $\boxed{v \in [v_0; v_0 + at_0)}$

$v = v_0 + at_0 - at^*$ $\quad t^* \in [0; t_0]$

$\boxed{v = (v_0 + at_0) - a(t - t_0)}$ $\boxed{t \in [t_0; 2t_0]}$

$v(t_0) = v_0 + at_0$

$\boxed{v \in [v_0 + at_0;\ v_0]}$

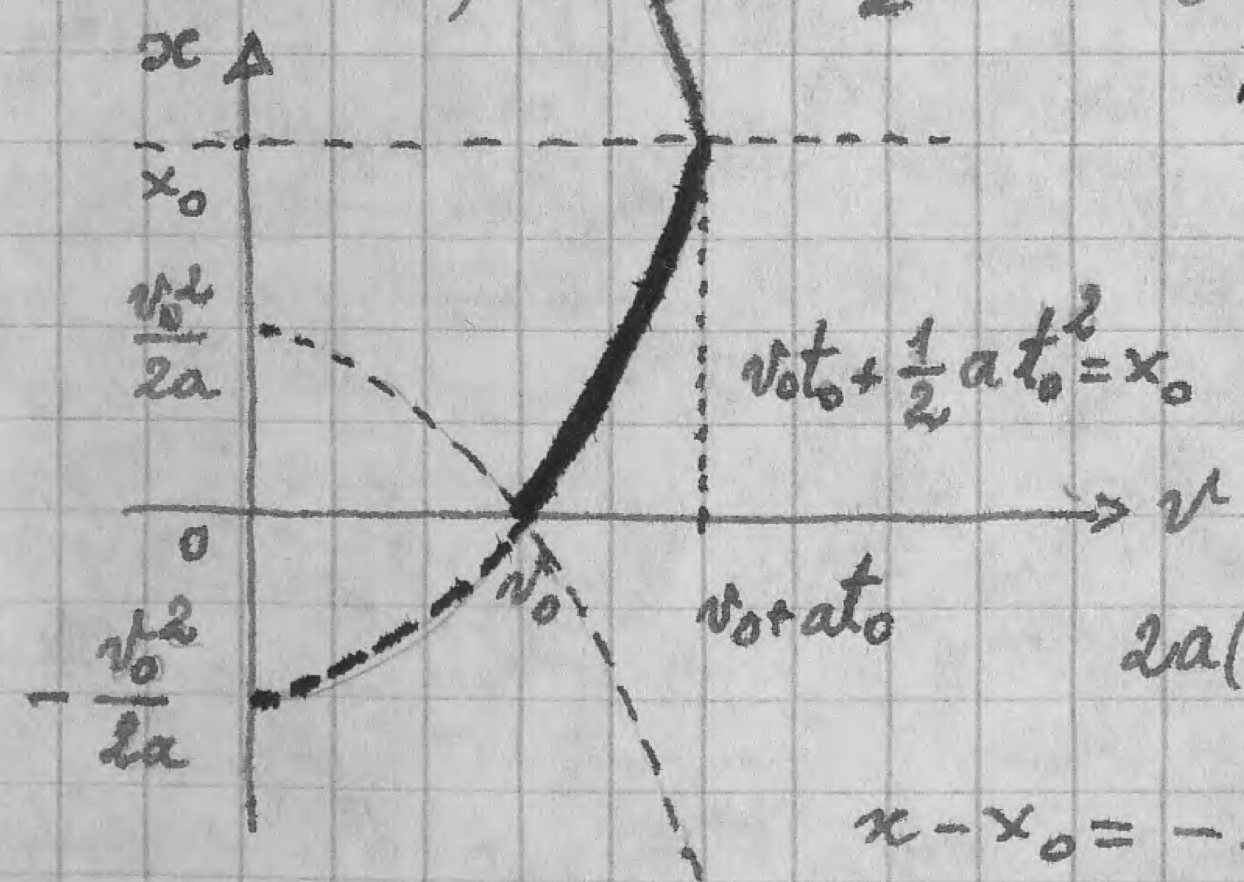
$v(2t_0) = v_0$

$v \in [v_0; v_0 + at_0)$ $\quad v^2 = v_0^2 + 2ax$ $\quad \boxed{x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}}$

$x(v_0) = 0$; $x(v_0 + at_0) = \frac{(v_0 + at_0)^2 - v_0^2}{2a} =$

$= \frac{v_0^2 + a^2t_0^2 + 2v_0at_0 - v_0^2}{2a} = at_0\,\frac{at_0 + 2v_0}{2a} = v_0t_0 + \frac{1}{2}at_0^2$

$x(v_0 + at_0) = v_0t_0 + \frac{1}{2}at_0^2$ (ceea ce se putea scrie direct)



$v \in [v_0 + at_0;\ v_0]$

Ecuația Galilei ia forma:

$$v^2 = (v_0 + at_0)^2 - 2a(x - x_0)$$

$$2a(x - x_0) = (v_0 + at_0)^2 - v^2$$

$$x - x_0 = -\frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} + \frac{1}{2}at_0^2 + v_0t_0$$

$x - x_0 = -\frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} + x_0$; $\boxed{x = -\frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} + 2x_0}$

Funcția $x = -\frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a}$ are drept grafic curba albastră punctată din figură.

Curba $x = -\frac{v^2}{2a} + \frac{v_0^2}{2a} + 2x_0$ se obține din cea anterioară, translatată în sus cu $2x_0$. Se obține curba verde din figură. Cum domeniul este $v \in [v_0 + at_0, v_0]$ reținem doar linia verde continuă.

Graficul cerut este linia continuă roșie și verde, luate în ansamblu.

1.3.18. Soluție, Gheorghe Alina, XA

Calculăm distanța pe care o parcurge mobilul în a n-a secundă:

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1}\,\Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

unde $\Delta t = \tau$, $v_{n-1} = a(n-1)\tau$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = s_n$$

$$s_n = a(n-1)\tau^2 + \frac{1}{2} a \tau^2$$

$$s_n = (2n-1)\frac{a\tau^2}{2}$$

s_n este spațiul parcurs în a n-a secundă dacă mobilul s-ar deplasa uniform accelerat cu accelerația a. Dar cum mobilul parcurge în a n-a secundă n metri rezultă că mișcarea sa nu este uniform accelerată.

Altă soluție (D. Rosca)

$\Delta t_1 = 1\,s$; $s_1 = 1\,m$

$\Delta t_2 = 2\,s$; $s_2 = 1+2 = 3\,m$

$\Delta t_3 = 3\,s$; $s_3 = 3+3 = 6\,m$

etc.

Dacă luăm $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ avem $v = v_0 + a_m \cdot \Delta t$. Se arată că $s = s_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_m \Delta t^2$. În cazul problemei: $v_0 = 0$; $s_0 = 0$, deci $s = \frac{1}{2} a_m \Delta t^2$ și $\boxed{a_m = \frac{2s}{\Delta t^2}}$

Dacă $a = ct.$, atunci $a_m = ct.$ pentru orice interval. S-ar calcula: Dar: $a_{m_1} = \frac{2s_1}{\Delta t_1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2\,m/s^2$; $a_{m_2} = \frac{2 \cdot 3}{2^2} = \frac{3}{2}\,m/s^2$ Cum [illegible]

1.3.24. Soluție, Bulcu Teodora, XA

Din ecuația Galilei pentru mișcarea uniform accelerată:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2ad$$

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$$

Numeric: $a = 2{,}5\,m/s^2$

Din ecuația Galilei:

$$v^2 = v_1^2 + 2a\,d'$$

Unde $d' = \frac{d}{2}$

Deci:

$$v^2 = v_1^2 + ad$$

$$v^2 = v_1^2 + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\,d$$

$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}}$$

Numeric

$$v = 14{,}5\,m/s.$$

H.1.3.32

$v_0 = 20\,m/s$; $t = 20\,s$; $a = ?$ $d = ?$

$t = ?$ $\frac{d}{2}$; $d^* = ?$

$v = v_0 - at$ cu $v = 0$

$$\boxed{a = \frac{v_0}{t}}$$

$v^2 = v_0^2 - 2ad$ cu $v = 0$

$$d = \frac{v_0^2}{2a} = v_0^2\,\frac{t}{2v_0} = \frac{v_0 t}{2}$$

$$\boxed{d = \frac{v_0 t}{2}}$$

$$\frac{v_0 t}{4} = v_0 t^* - \frac{1}{2} a t^{*2}; \quad \frac{v_0 t}{4} = v_0 t^* - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t} t^{*2}$$

$$\frac{t}{4} = t^* - \frac{1}{2}\frac{t^{*2}}{t}; \quad t^2 = 4tt^* - 2t^{*2}$$

$$2t^{*2} - 4tt^* + t^2 = 0 \quad t^* = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 2t^2}}{2}$$

$$t^* = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\,t = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)t.$$

Observând că $t^* < t$ soluția cu + nu convine, așa că:

$$\boxed{t^* = (1 - 1/\sqrt{2})\,t}$$

$$d^* = v_0 t^* - \frac{1}{2} a t^{*2} = v_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)t - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 t^2$$

$$= v_0 t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2} v_0 t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= v_0 t\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[1 - \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right] = \frac{v_0 t(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$\cancel{d^* = \frac{v_0 t}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{v_0 t}{4}(2-1)}$$

$$\cancel{\boxed{d^* = \frac{v_0 t}{4}}}$$

$$d^* = v_0\frac{t}{2} - \frac{1}{2}a\frac{t^2}{4} = v_0\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\frac{v_0}{t}\frac{t^2}{4} =$$

$$= \frac{v_0 t}{2} - \frac{1}{8}v_0 t = \frac{v_0 t}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{v_0 t}{2}\frac{3}{4}$$

$\boxed{d^* = \frac{3}{8}v_0 t}$ sau $\boxed{d^* = \frac{3}{4}d}$

V

1.3.35. Soluție, Bulcu Teodora, XA

Scriind principiul fundamental al dinamicii pentru sistemul format din cele două corpuri, obținem

$$a = \frac{G_2-G_1}{m_1+m_2} \quad ; \quad a = g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}$$

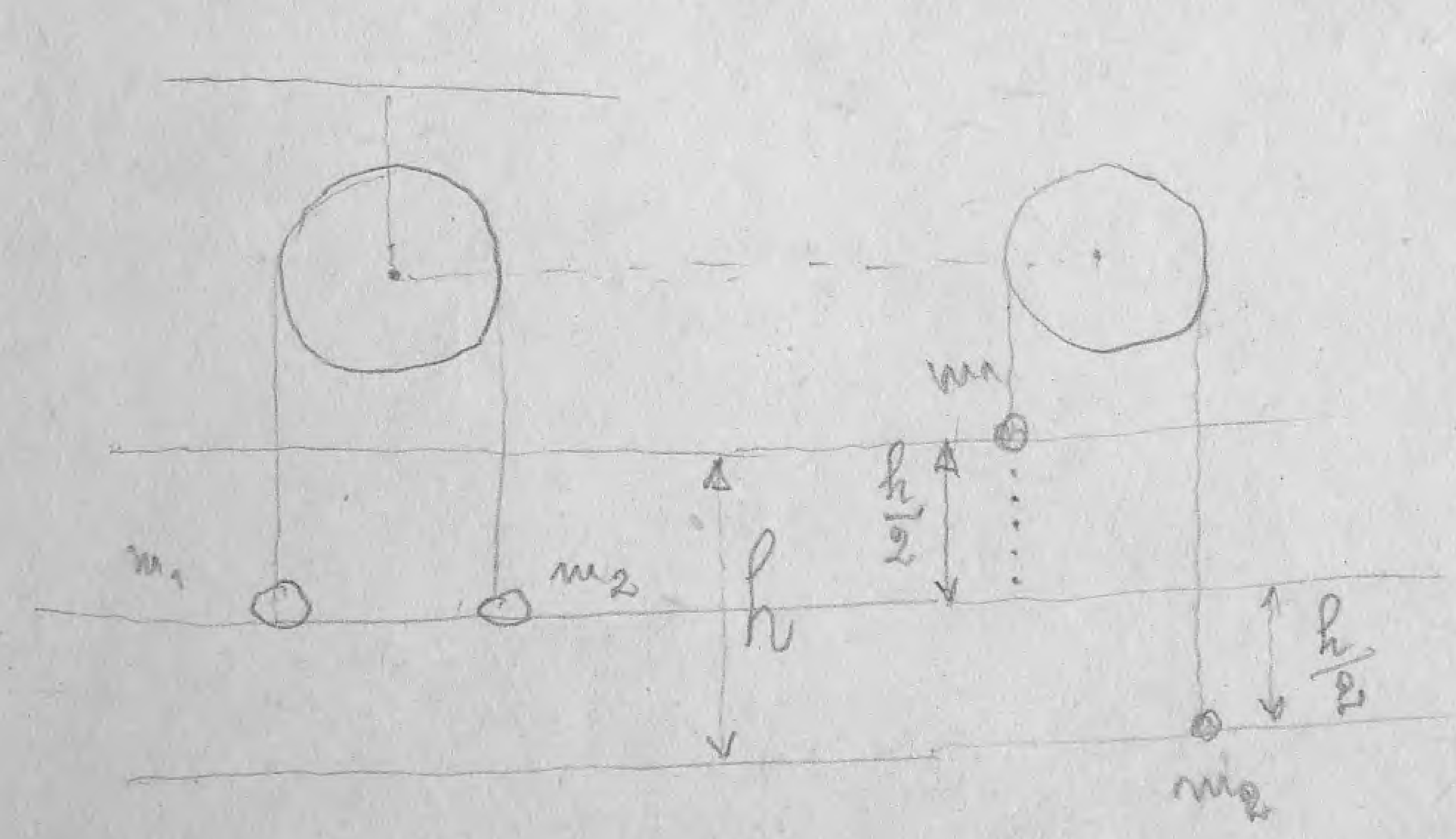
Din legea mișcării pe distanța $\frac{h}{2}$, avem:

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}at^2, \quad t^2 = \frac{\cancel{2}h}{a}$$

$$t = \sqrt{\frac{\cancel{2}h\,(m_1+m_2)}{g\,(m_2-m_1)}}$$

Numeric:

$$t \approx 0,21\,s$$



1.3.36. Soluție, Buleu Teodora, XA

Alegînd axa Oy cu sensul pozitiv în jos, putem scrie

$$h = \frac{1}{2} a t^2 ; \quad a = \frac{2h}{t^2} \quad (1)$$

Din principiul fundamental al dinamicii:

$$a = \frac{G - T}{m} ; \quad T = (g - a) m \quad (2)$$

Înlocuind (1) în (2), obținem:

$$T = \left(g - \frac{2h}{t^2}\right) m$$

Numeric:

$$T = 2,7 \text{ KN}$$

1.3.39. Soluție; Buleu Teodora, XA

Din principiul fundamental al dinamicii:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{G} + \vec{T}_m}{m} ; \quad a_m = \frac{-G + T_m}{m}$$

$$T_m = G + m a_m \quad (1)$$

$$V_2 = V_1 - a \tau ; \quad a = \frac{V_1 - V_2}{\tau} \quad (2)$$

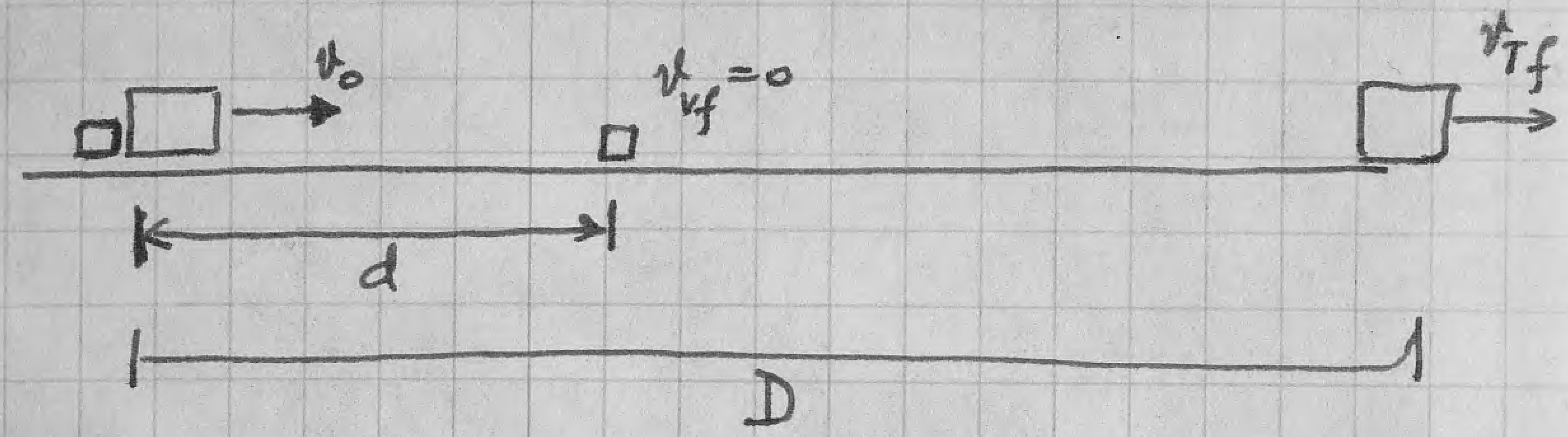
Înlocuind (2) în (1), obținem:

$$T = G + \frac{V_1 - V_2}{\tau} \frac{G}{g}$$

$$\frac{T}{G} = 1 + \frac{V_1 - V_2}{g \tau}$$

Numeric: $\frac{T}{G} = 3$.

H. 1.3.41



a) Se dau a_1 şi a_2; se cere $\frac{D}{d}$.

Pentru vagon: $v_{vf} = v_0 - a_2 t$; $0 = v_0 - a_2 t$; $\boxed{t = \frac{v_0}{a_2}}$

$v_0^2 = 2a_2 d$; $\boxed{d = \frac{v_0^2}{2a_2}}$

Pentru tren: $D = v_0 t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{v_0^2}{a_2} + \frac{1}{2}a_1\frac{v_0^2}{a_2^2}$

$D = \frac{v_0^2}{a_2}\left(1+\frac{a_1}{2a_2}\right)$; $\frac{D}{d} = \frac{v_0^2}{a_2}\left(1+\frac{a_1}{2a_2}\right)\frac{2a_2}{v_0^2} = 2+\frac{a_1}{a_2}$

$$\boxed{\frac{D}{d} = 2+\frac{a_1}{a_2}}$$

b) M masa trenului cu vagon; m masa vagonului.

Înaintea desprinderii: $F_t = F_{f0}$ cu $F_{f0} = \mu M g$

După desprindere:

Pentru tren $F_t = F_{f1} + F_{a_1}$; $\mu M g = \mu(M-m)g + (M-m)a_1$

$\mu m g = (M-m)a_1$; $\boxed{a_1 = \frac{m}{M-m}\mu g}$

Pentru vagon $F_{a_2} = \mu m g$; $m a_2 = \mu m g$; $\boxed{a_2 = \mu g}$

Deci $\boxed{a_1 = \frac{m}{M-m}a_2}$ Aşadar:

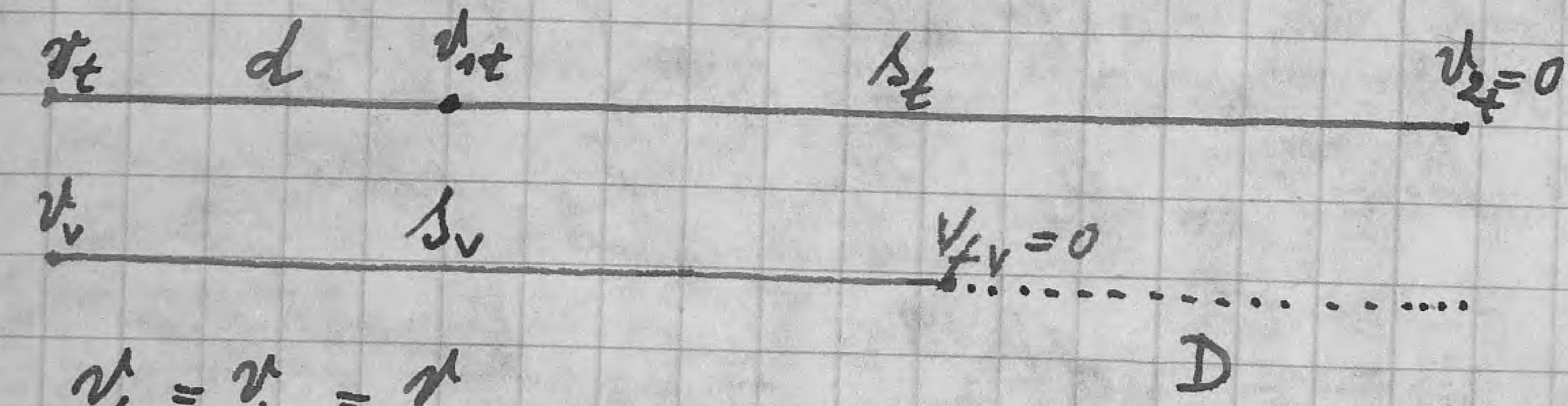
$\frac{D}{d} = 2 + \frac{m}{M-m}a_2 \cdot \frac{1}{a_2} = \frac{2M-2m+m}{M-m}$

$$\boxed{\frac{D}{d} = \frac{2M-m}{M-m}}$$

$\boxed{\text{H. 1.3.42}}$

25.11.1988

$M = 100t$; $v = ct$; $m = 10t$; $d = 270m$; $D = ?$



$v_t = v_v = v$

Mişcarea vagonului după desprindere ste sub acţiunea $F_{fv} = \mu m g$ care dă $a_v = \mu g$.

$s_v = \frac{v_v^2}{2a_v}$ din ec. Galilei

$$\boxed{s_v = \frac{v^2}{2\mu g}}$$

Trenul parcurge d cu aceeaşi F_t a locomotivei ca înaintea desprinderii. Cum $v_t = ct$ înaintea desprinderii, decurge $F_t - F_f = \mu M g$; $F_t = \mu M g$

După desprindere: $F_t - F_f = F_{a_1}$; $\mu M g - \mu(M-m)g = (M-m)a_1$

$\boxed{a_1 = \frac{\mu M g}{M-m} - \mu g}$ valabilă până la întreruperea curentului.

Din ec. Galilei pe această porţiune:

$\boxed{v_{1t}^2 = v_t^2 + 2a_1 d}$ $\boxed{v_{1t}^2 = v^2 + 2a_1 d}$

După întreruperea curentului, ec. Galilei dă:

$v_{2t}^2 = v_{1t}^2 - 2a_2 s_t$; $s_t = \frac{v_{1t}^2}{2a_2}$; $\boxed{s_t = \frac{v^2+2a_1 d}{2a_2}}$

Pe această etapă asupra trenului de masă $M-m$

acționează doar frecarea : $F_f = F_{a_2}$

$$\mu(M-m)g = (M-m)a_2 ; \quad \boxed{a_2 = \mu g} \qquad a_1 = \frac{m}{M-m}a_2$$

Înlocuind a_1 și a_2 în s_t avem: $\quad s_t = \frac{v^2}{2a_2} + \frac{m}{M-m}d$

$$s_t = \frac{v^2}{2\mu g} + d\left(\frac{M}{M-m} - 1\right) \qquad D = d + \frac{v^2}{2\mu g} + \frac{m}{M-m}d - \frac{v^2}{2\mu g}$$

$$D = d + s_t - s_v = d + \frac{v^2}{2\mu g} + \frac{dM}{M-m} - d - \frac{v^2}{2\mu g} \qquad D = \frac{M}{M-m}d$$

$$\cancel{D = 2d + \frac{dM}{M-m} = d\left(\frac{2M-2m+M}{M-m}\right) = d\left(\frac{M-\mu m}{M-m}\right)}$$

$$\boxed{D = \frac{M+\cancel{m}}{M-m}d}$$

~~În Culegere~~ : $\cancel{\boxed{D = \frac{M}{M-m}d}}$

V

1.343. (Soluție Pavel Mihai - X B)

Fiind vorba de căderi în cîmpuri gravitaționale, fără viteze inițiale, de la aceeași înălțime, înălțimea de la care cad cele două corpuri se scrie:

pe Lună: $h = \frac{1}{2}g_L t_L^2$

pe Pămînt: $h = \frac{1}{2}g_p \cdot t_p^2$

unde t_p, t_L sînt timpurile de cădere pe Pămînt, respectiv pe Lună.

Relațiile de mai sus sînt echivalente cu:

$$t_L = \sqrt{\frac{2h}{g_L}} \; ; \; t_p = \sqrt{\frac{2h}{g_p}}$$

Făcînd raportul lor, obținem:

$$\frac{t_L}{t_p} = \sqrt{\frac{g_p}{g_L}}, \quad \text{Numeric } \frac{t_L}{t_p} \simeq 2{,}46.$$

14 — 1.3.46 Hristev 1983

$\tau = 1\,s$; $\boxed{x_n = n\, x_{n-1}}$; $n = 2$; $h = ?$

Solutia 1

$$\begin{cases} x_n = v_{n-1}\tau + \frac{1}{2} g \tau^2 ; \\ v_n = v_{n-1} + g\tau \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n-1} = v_{n-2}\tau + \frac{1}{2} g \tau^2 \\ v_{n-1} = v_{n-2} + g\tau \end{cases}$$

$$v_{n-1}\tau + \frac{1}{2} g \tau^2 = n \cdot v_{n-2}\tau + \frac{n}{2} g \tau^2 \quad \Big| : \tau$$

$$v_{n-1} + \frac{1}{2} g \tau = n\, v_{n-2} + \frac{n}{2} g \tau$$

$$v_{n-1} \cancel{+ \frac{1}{2} g \tau} = n\left(v_{n-1} - g\tau\right) + \frac{n}{2} g \tau$$

$$v_{n-1}(1-n) = -\frac{1}{2} g\tau - n g\tau + \frac{n}{2} g\tau$$

$$v_{n-1} = \frac{\frac{n}{2} - \frac{1}{2} - n}{1-n}\, g\tau = \frac{-n-1}{2(1-n)}\, g\tau$$

$$\boxed{v_{n-1} = \frac{n+1}{2(n-1)}\, g\tau}$$

$$v_n = \frac{n+1}{2(n-1)}\, g\tau + g\tau = \frac{n+1+2n-2}{2(n-1)}\, g\tau$$

$$\boxed{v_n = \frac{3n-1}{2(n-1)}\, g\tau}$$ aceasta este viteza finală.

Din ecuatia Galilei : $h = \dfrac{v_n^2}{2g}$

$$h=\left(\frac{3n-1}{2(n-1)}\right)^2\frac{g^2\tau^2}{2g}=\frac{(3n-1)^2}{4(n-1)^2}\,\frac{g\tau^2}{2}$$

$$\boxed{h=\frac{(3n-1)^2}{4(n-1)^2}\,\frac{g\tau^2}{2}}$$

$$h=\frac{(3\cdot 2-1)^2}{4(2-1)^2}\cdot\frac{9{,}8\cdot 1^2}{2}=\frac{25}{4}\cdot 4{,}9=30{,}6$$

$$\boxed{h=30{,}6\,m}$$

Soluția a 2^a. Fie t_n durata mișcării; avem:

$$x_n=\frac{1}{2}g t_n^2 \; ; \; x_{n-1}=\frac{1}{2}g(t_n-\tau)^2$$

$$x_{n-2}=\frac{1}{2}g(t_n-2\tau)^2.$$

Din $x_n-x_{n-1}=n(x_{n-1}-x_{n-2})$ avem:

$$\frac{1}{2}g\left[t_n^2-(t_n-\tau)^2\right]=n\,\frac{1}{2}g\left[(t_n-\tau)^2-(t_n-2\tau)^2\right]$$

$$(t_n-t_n+\tau)(t_n+t_n-\tau)=n\left[t_n-\tau+t_n-2\tau\right]\left[t_n-\tau-t_n+2\tau\right]$$

$$\tau(2t_n-\tau)=n\left[2t_n-3\tau\right]\left[\tau\right]$$

$$2t_n-\tau=2nt_n-3n\tau$$

$$2t_n(n-1)=(3n-1)\tau$$

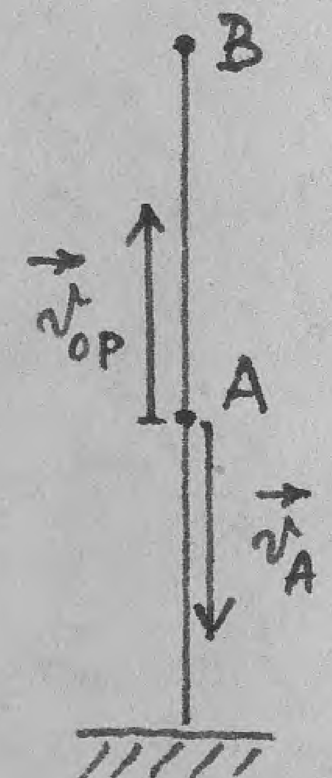
$$\boxed{t_n=\frac{3n-1}{2(n-1)}\tau} \quad \boxed{h=x_n=\frac{1}{2}g\,\frac{(3n-1)^2}{4(n-1)^2}\tau^2}$$

1.3.47 Soluție, Chirica Bogdana, XB

Aerostatul are viteză pe verticală, putându-se deplasa în sus, sau în jos. Viteza sa din momentul aruncării pietrei, va fi viteza inițială a pietrei.

În câmpul gravitațional terestru piatra va avea o mișcare uniform accelerată cu viteză inițială.

Vom demonstra că la aruncarea în sus pe verticală a unui corp dintr-un punct A, cu viteza $\vec{v}_{OP}$ față de Pământ, de modul v_{OP}, la cădere trece prin A cu o viteză $\vec{v}_P$, având același modul ca la aruncare



$$|\vec{v}_{OP}|=|\vec{v}_A|$$

În adevăr, fie B punctul de înălțime maximă, $AB=h_m$. Avem, la urcare:

$$v_B^2=v_{OP}^2-2g h_m \quad \text{cum } v_B=0$$

$$h_m=\frac{v_{OP}^2}{2g} \qquad (1)$$

La coborîrea din B, avem în punctul A:

$$v_A^2 = 2g\,h_m \qquad (2)$$

şi înlocuind (1) în (2)

$$v_A^2 = 2g\frac{v_{0P}^2}{2g} \;;\; v_A^2 = v_{0P}^2 \;;\; |\vec{v}_A| = |\vec{v}_{0P}|$$

Rezultă că indiferent de sensul vitezei a

rostatului (urcă sau coboară), putem scrie

teza pietrei în momentul atingerii solului:

$$v_P^2 = v_{0P}^2 + 2gh$$

unde v_{0P} este modulul vitezei aerostatului î

momentul aruncării pietrei, în raport cu Pămînt

Cu notaţiile din enunţ, $v_{0P} = v$:

$$v_P^2 = v^2 + 2gh \;;\; v_P = \sqrt{v^2+2gh}$$

Pentru durata căderii, alegînd ca orig

ne a timpului momentul aruncării pietrei,

din legea vitezei la momentul t_c al atingerii solu

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t_c$$

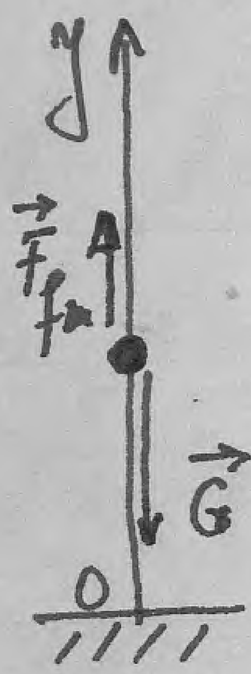
proiectată pe o axă verticală cu sensul în jos şi în

cuind $|\vec{v}_0|$ cu v, obţinem

$$v_P = \pm v + g t_c \;;\; t_c = \frac{v_P \mp v}{g}$$ (se ia „–" cînd aerostatul

H. 1.3.49

$m = 0,5\ kg$; $a = 3,8\ m/s^2$; $F_{fm} = ?$



$$\vec{F}_a = \vec{G} + \vec{F}_{fm}$$

$$-ma = -mg + F_{fm}$$

$$\boxed{F_{fm} = m(g-a)}$$

$$F_{fm} = 0,5(9,8-3,8) = 0,5\cdot 6 = 3\ N$$

$$\boxed{F_{fm} = 3N}$$

1.3.51. (Soluție Ciubotaru Cristina-XI c)

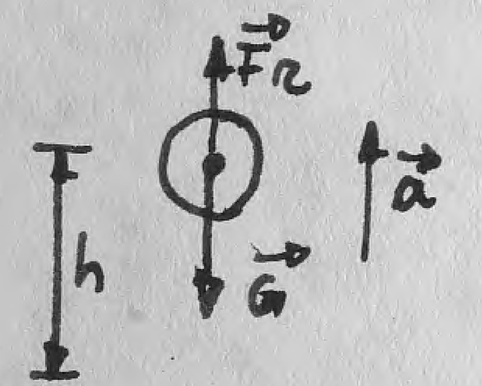
Mișcarea bilei s-ar putea studia împărțind-o în două etape:

① Căderea

Cum scopul acestei etape este de a afla viteza cu care bila atinge pămîntul, aplicăm ecuația Galilei pentru mișcarea pînă la suprafața solului:

$$v_p^2 = v_0^2 + 2gH \quad (1)$$

② Mișcarea în sol



Scriem forța care produce accelerația: $\vec{F_a} = \vec{G} + \vec{F_r}$ (2), relație care proiectată pe o axă verticală cu sensul în sus devine:

$$F_r - G = m \cdot a \quad (3)$$

Accelerația o aflăm din ecuația Galilei, pentru mișcarea bilei în sol, în momentul cînd viteza finală este nulă:

$0 = v_p^2 - 2ah$, de unde rezultă:

$$a = \frac{v_p^2}{2h} \quad (4)$$

Înlocuind (4) și (1) în (3) obținem:

$$F_r = G + ma = m\left(g + \frac{v_0^2}{2h} + \frac{gH}{h}\right)$$

Numeric: $F_r = 201{,}96\,N \simeq 202\,N$.

H.1.3.52

Rezolvarea 1

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} g (t-\tau)^2$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2} g \left[t^2 - (t-\tau)^2\right]$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2} g \left(2t\tau - \tau^2\right)$$

$$\boxed{x_1 - x_2 = g\tau t - \frac{1}{2} g \tau^2}$$

Δx crește liniar cu t.

Rezolvarea a 2-a

La un moment oarecare t de la căderea primului corp:

$v_{1P} = gt$; $v_{2P} = g(t-\tau)$. Din $\vec{v}_{1P} = \vec{v}_{12} + \vec{v}_{2P}$ avem

$v_{1P} = v_{12} + v_{2P}$; $v_{12} = v_{1P} - v_{2P}$

$v_{12} = gt - gt + g\tau$; $\boxed{v_{12} = g\tau = \text{const}}$

Față de al doilea corp privit ca reper, primul se mișcă cu viteză constantă, deci uniform. Astfel:

$x_{12} = v_{12} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g\tau^2$ unde Δt este durata scursă de la căderea celui de al doilea corp și $\frac{1}{2} g \tau^2$ este distanța creată până la plecarea corpului al doilea.

$$x_{12} = v_{12}(t-\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2 = g\tau(t-\tau) + \frac{1}{2} g\tau^2$$

$\boxed{x_{12} = g\tau t - g\frac{\tau^2}{2}}$ deci distanța crește liniar cu t.

61

H.1.3.53

Vezi: H.1.3.52 :

Rezolvarea 1

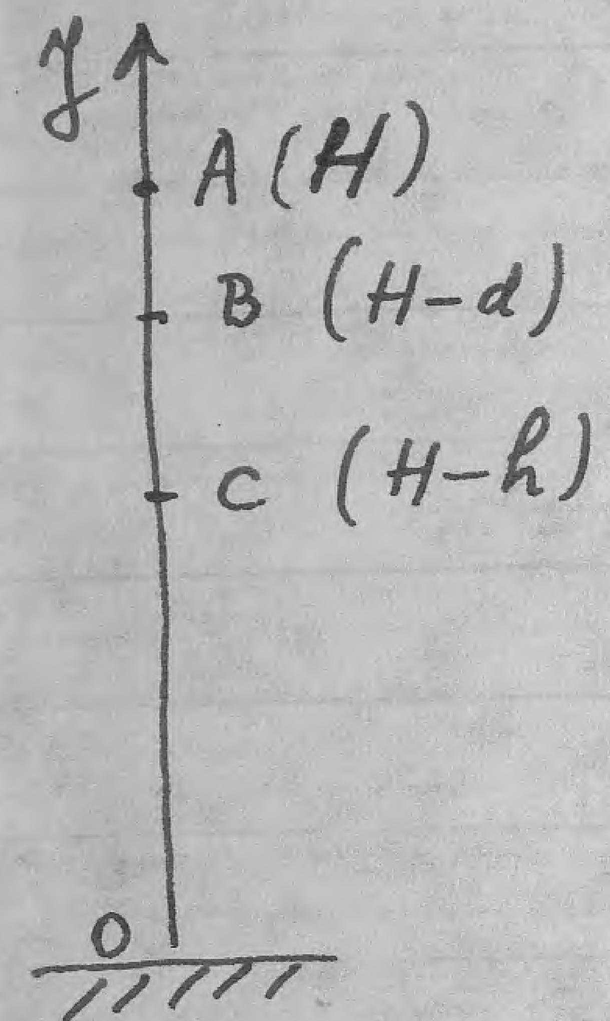
$$x_1 - x_2 = g\tau t - \frac{1}{2} g \tau^2$$

Rezolvarea a 2-a

$$x_{12} = g\tau t - \frac{1}{2} g \tau^2$$

62

H.1.3.55



$d = 4\,m$; $h = 12\,m$

$v_{01} = 0$ $\quad v_{02} = 0$

t_{c1} $\quad t_{c2}$

$t^*_{c1} = t_{c2}$; $t^*_{c1} = t_{c1} - \tau$

$$d = \frac{1}{2} g \tau^2 \qquad \tau^2 = \frac{2d}{g}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

$$\begin{cases} y_1 = H - \frac{1}{2} g t_{c1}^2 \\ y_2 = H - h - \frac{1}{2} g t_{c2}^2 \\ t_{c2} = t_{c1} - \tau \end{cases}$$

$y_1 = y_2 = 0$ condiţia de întâlnire la sol.

$$\begin{cases} H - h - \frac{1}{2} g (t_{c1} - \tau)^2 = 0 \\ H - \frac{1}{2} g t_{c1}^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H - h - \frac{1}{2} g t_{c1}^2 - \frac{1}{2} g \tau^2 + g t_{c1} \tau = 0 \\ H - \frac{1}{2} g t_{c1}^2 = 0 \end{cases}$$

$$-h - \frac{1}{2} g \tau^2 + g t_{c1} \tau = 0$$

$$g t_{c1} \tau = h + \frac{1}{2} g \tau^2$$

$$t_{c1} = \frac{2h + g\tau^2}{2g\tau} = \frac{h}{g}\sqrt{\frac{g}{2d}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2d}{g}}$$

$$t_{c1} = \sqrt{\frac{h^2}{2gd}} + \sqrt{\frac{2d}{4g}}$$

$$H = \frac{1}{2} g t_{c1}^2 = \frac{g}{2}\left[\frac{h^2}{2gd} + \frac{2d}{4g} + 2\sqrt{\frac{h^2 \cdot d}{4g^2 d}}\right]$$

$$H = \frac{g}{2}\left[\frac{h^2}{2gd} + \frac{d}{2g} + \frac{2h}{2g}\sqrt{\frac{d}{d}}\right]$$

$$H=\frac{g}{2}\left[\frac{h^2}{2gd}+\frac{d}{2g}+\frac{h}{g}\right]$$

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{h^2}{2d}+\frac{d}{2}+h\right]=\frac{1}{2}\,\frac{h^2+d^2+2dh}{2d}$$

$$\boxed{H=\frac{(h+d)^2}{4d}}=16\ m.$$

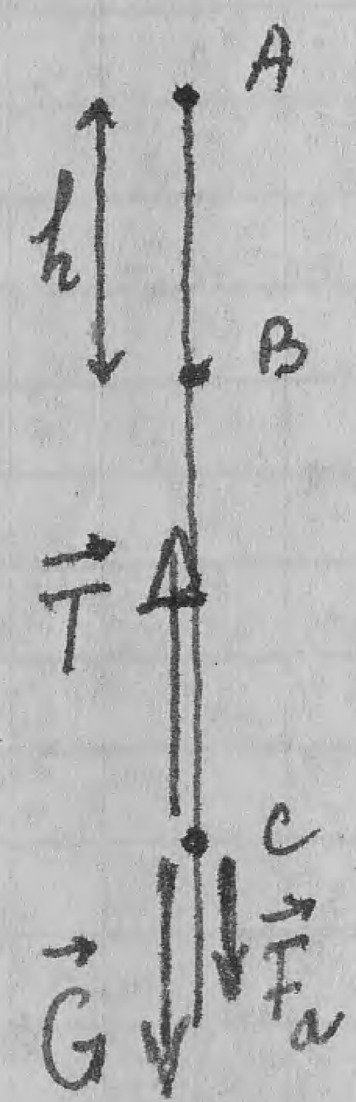
63

H.1.3.56

$m=60\ kg$ $\quad h=19{,}6\ m$ $\quad \tau=3\ s$ $\quad n=3$ ori

$$\frac{v_B}{v_C}=n$$

$T=?$



$$v_B=\sqrt{2gh}$$

$$v_C=\frac{v_B}{n}=\frac{\sqrt{2gh}}{n}$$

$$\cancel{v_C^2=v_B^2+2a}\qquad v_C=v_B+a\tau$$

$$a=\frac{v_C-v_B}{\tau}=\left(\frac{\sqrt{2gh}}{n}-\sqrt{2gh}\right)\frac{1}{\tau}$$

$$a=\frac{\sqrt{2gh}}{\tau}\,\frac{n-1}{n}$$

$$F_a=ma=\frac{m\sqrt{2gh}}{\tau}\,\frac{n-1}{n}$$

$$\boxed{F_a=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{m\sqrt{2gh}}{\tau}}$$

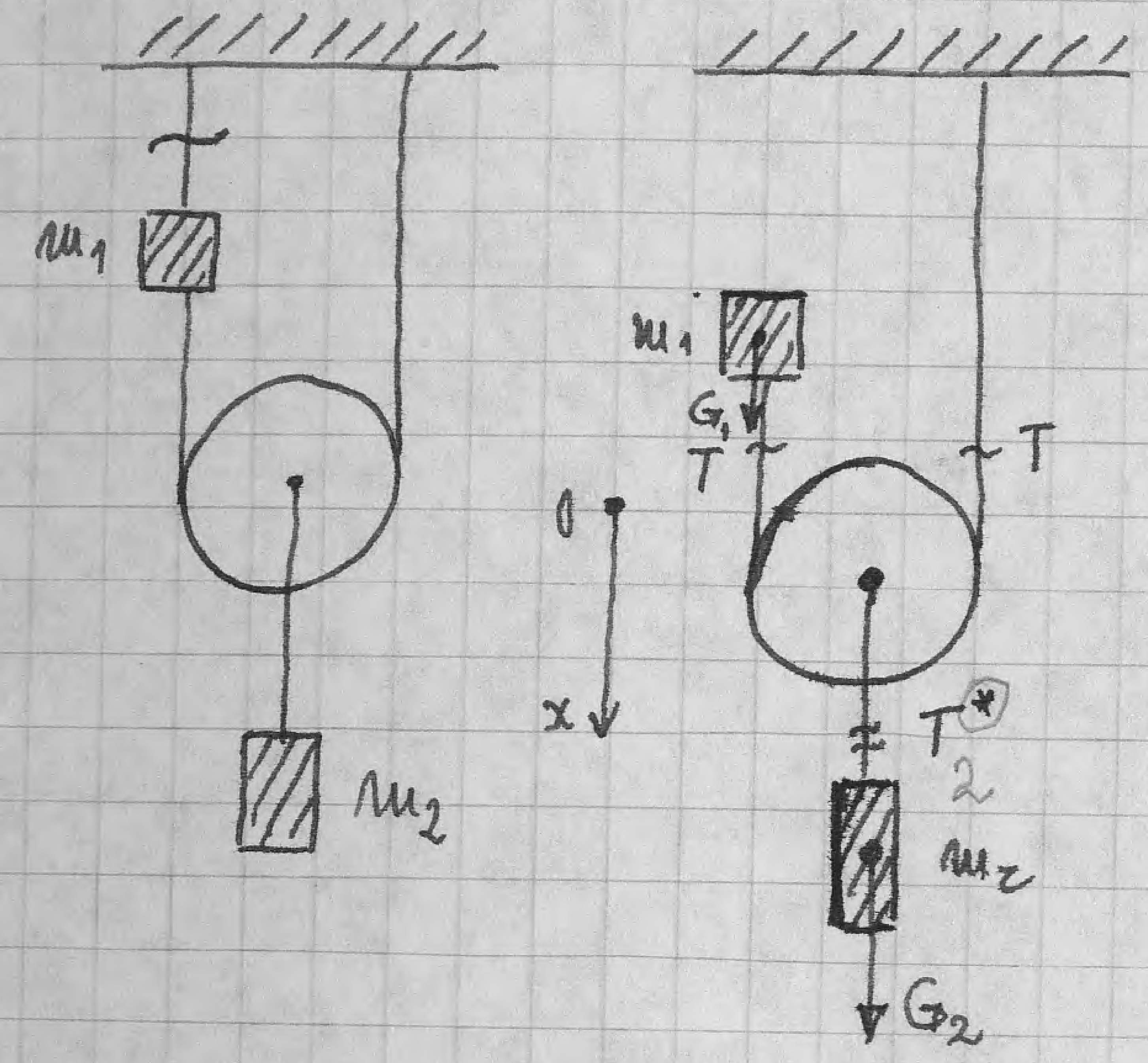
$$T=G+F_a$$

$$T=mg+\frac{n-1}{n}\,\frac{m\sqrt{2gh}}{\tau}$$

$$\boxed{T=mg\left[1+\frac{n-1}{n\tau}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]}$$

H.1.3.57

$m_1 = 2\,kg$; $m_2 = 1\,kg$; $v = 4{,}9\,m/s$; $\Delta t = ?$



cu $T^*_2 = 2T$.

După tăierea firului, în timp ce m_2 coboară cu x_2, m_1 coboară cu $2x_2$:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad ; \quad x_1 = 2x_2 = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$x_1 = 2x_2$ $\quad \cancel{x_2 = \frac{x_1}{2} \; ; \; \frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a_1 t^2}$

$$\boxed{a_2 = \frac{a_1}{2}} = \frac{a}{2} \qquad \frac{1}{2} a_1 t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} a_2 t^2$$

$$a_1 = 2a_2$$

Forțele care accelerează pe m_1 și m_2 sunt:

$$m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \qquad m_1 g + T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

Dar $T_1 = T$ și $T_2 = T^* = 2T$, adică

$$\boxed{m_1 g + T = m_1 a} \; ; \; \boxed{m_2 g - 2T = m_2 \frac{a}{2}}$$

$$T = m_1 a - m_1 g$$

$$m_2 g - 2m_1(a-g) = m_2 \frac{a}{2}$$

$$\left(\frac{m_2}{2} + 2m_1\right) a = (m_2 + 2m_1) g \qquad \boxed{a = \frac{2m_1 + m_2}{m_2 + 4m_1} \cdot 2g}$$

$$t = \frac{v}{a} = \frac{(4m_1 + m_2)\, v}{2g\,(2m_1 + m_2)}$$

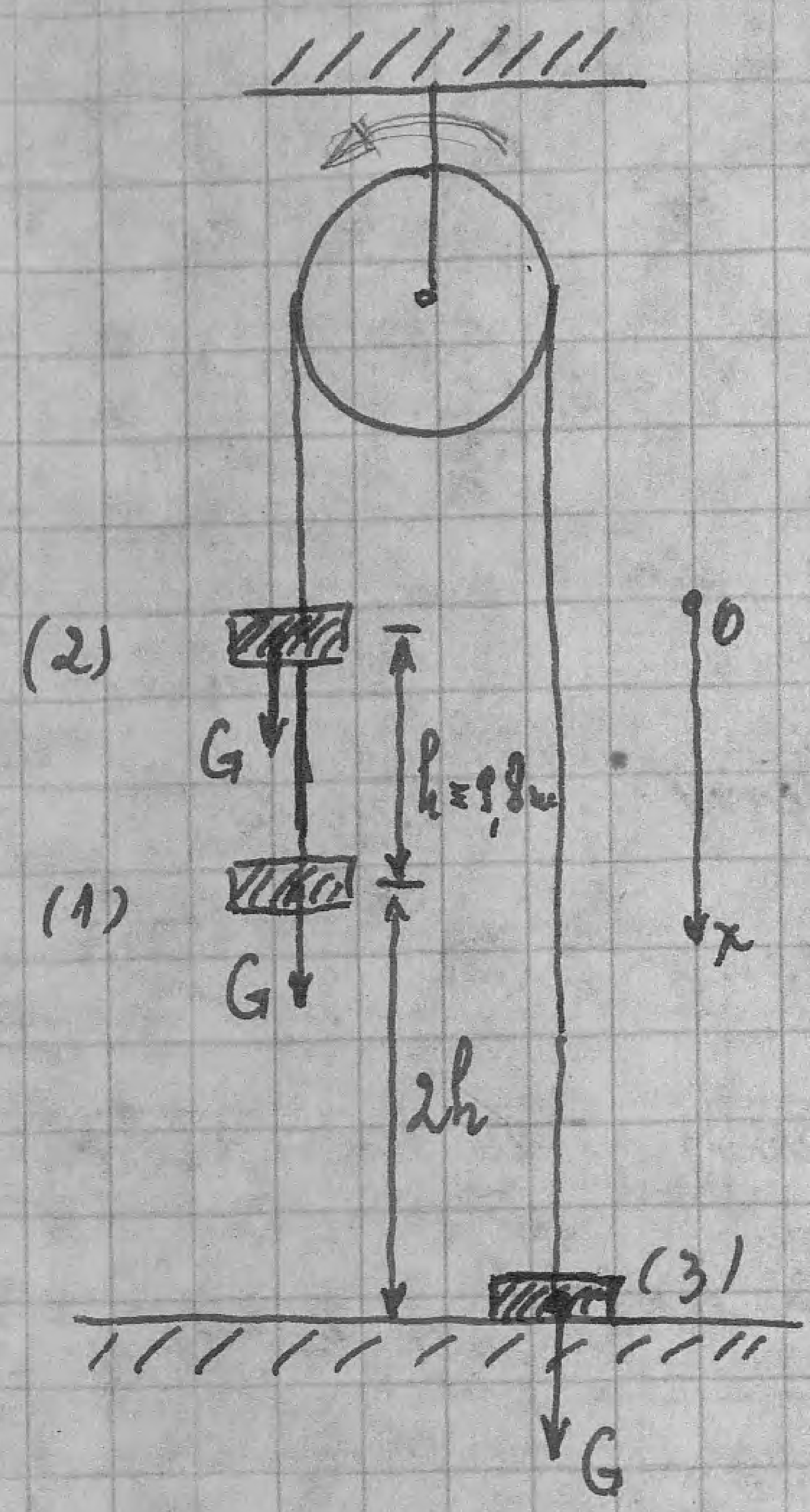
$$\boxed{t = \frac{v\,(4m_1 + m_2)}{2g\,(2m_1 + m_2)}}$$

Obs.

Rezolvarea presupune T_1, T_2 constante în timpul mișcării corpurilor

65

H.1.3.58



1° Dând drumul lui (3) sistemul va fi accelerat de $G = mg = F_a$

$3ma = mg$; $\boxed{a = \frac{1}{3} g}$

(3) mișcându-se uniform accelerat cu această accelerație avem:

$$v = at \; ; \; \boxed{v = \frac{1}{3} g t}$$

unde $t \in [0, t_0]$, t_0 fiind momentul atingerii solului de către discul (1). Avem:

$$2h = \frac{1}{2} a t_0^2 \; ; \; \boxed{t_0 = 2\sqrt{\frac{3h}{g}}} = 2\sqrt{3}\ s$$

2° După t_0 sistemul (3)-(2) se mișcă în absența unor forțe exterioare de rezultantă nenulă, deci uniform, cu

$$v_0 = a t_0 = \frac{g}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{2}{3}\sqrt{3hg} \qquad \boxed{v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3hg}}$$

$$v_0 = \frac{2 \cdot 9{,}8}{\sqrt{3}}$$

Durata acestei mișcări uniforme o calculăm:

$$h = v_0 \Delta t_1 \; ; \; \Delta t_1 = \frac{h}{v_0} = h\,\frac{3}{2\sqrt{3hg}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{1}{4}\, 2\sqrt{\frac{3h}{g}}$$

$\boxed{\Delta t_1 = \frac{1}{4} t_0}$ când (2) atinge și el solul ($v_1 = v_0$).

3° Discul (3) va continua urcarea sub

-2-

acțiunea gravitației sale, dar uniform încetinit, până la oprirea sa:

$$v = v_0 - g\Delta t \; ; \quad 0 = v_0 - g t_u \; ; \quad t_u = \frac{v_0}{g}$$

$$t_u = \frac{1}{g}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3lg} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3l}{g}} \qquad t_u = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3l}{g}} = \frac{1}{3}t_0$$

$$\boxed{t_u = \frac{1}{3}t_0}$$

Apoi (3) va coborî, astfel încât în momentul antrenării lui (2) la urcare, va avea viteza $\boxed{v_2 = -v_0}$

Durata coborârii coincide cu a urcării, așa că în total se va mișca uniform cu accelerația g un timp

$$\Delta t_2 = 2t_u = \frac{2}{3}t_0 \; ; \quad \boxed{\Delta t_2 = \frac{2}{3}t_0}$$

(4°) Antrenarea la urcare a lui (2) echivalează cu o ciocnire plastică. Din legea conservării impulsului:

$$m v_2 = (m+m)v_2' \qquad v_2' = \frac{v_2}{2} = \frac{-v_0}{2} \; ; \quad \boxed{v_2' = -\frac{v_0}{2}}$$

Cele două discuri sunt în mișcare uniformă cu viteza v_2', ele nefiind antrenate de forțe acceleratoare (greutățile lor se anulează), până când este din nou antrenat la urcare discul (1).

Durata mișcării cu v_2' va fi (lucrând cu modulele):

$$h = v_2'\Delta t_3 \; ; \quad \Delta t_3 = \frac{h}{v_2'} = \frac{l}{\frac{v_0}{2}} = \frac{2l}{v_0} = 2l\frac{3}{2\sqrt{3lg}}$$

$$\Delta t_3 = \sqrt{\frac{3l}{g}} = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3l}{g}} = \frac{t_0}{2} \; ; \quad \boxed{\Delta t_3 = \frac{t_0}{2}}$$

66

-3-

H.1.3.58 (continuare)

Evident $\boxed{v_3 = -\frac{v_0}{2}}$

(5°) Antrenarea lui (1) la urcare echivalează tot cu o ciocnire plastică:

$$2m v_2' = 3m v_3' \qquad v_3' = \frac{2}{3}v_2' = \frac{2}{3}\left(-\frac{v_0}{2}\right) = -\frac{v_0}{3}$$

$$\boxed{v_3' = -\frac{v_0}{3}}$$

Ansamblul celor trei discuri se va mișca uniform încetinit până la oprire, cu accelerația dată de

$$F_a = G \; ; \quad 3ma = mg \; ; \quad \boxed{a = \frac{g}{3}}$$

legea vitezei este ca în prima etapă a unei mișcări uniform variate, dar cu viteza inițială v_3':

$$v = v_3' - \frac{1}{3}g\Delta t_4$$

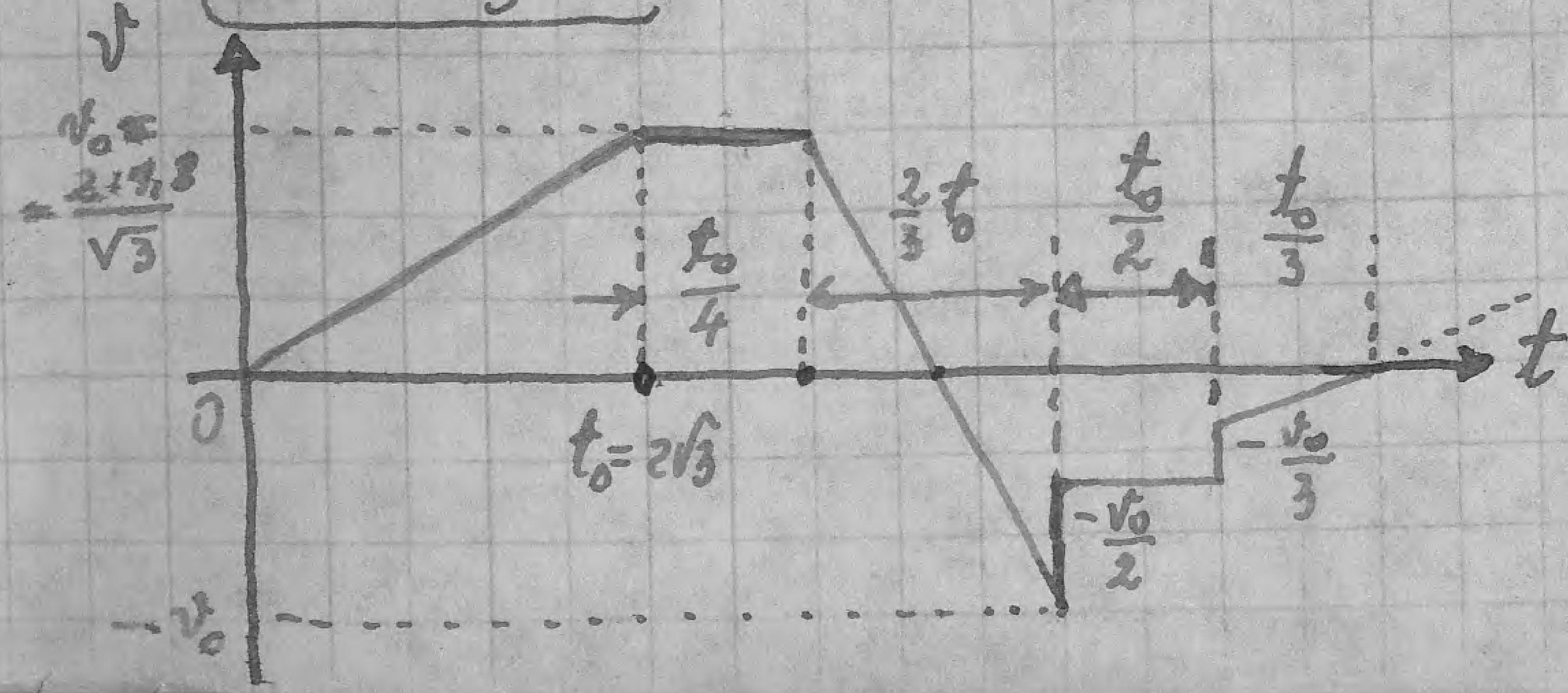
Durata Δt_4 calculând-o din condiția (lucrând cu modulele)

$$0 = v_3' - \frac{g}{3}\Delta t_4 \; ; \quad \Delta t_4 = \frac{3v_3'}{g} = \frac{3}{g}\frac{v_0}{3}$$

$$\Delta t_4 = \frac{v_0}{g} = \frac{1}{g}\frac{2}{3}\sqrt{3lg} = \frac{1}{3}2\sqrt{\frac{3l}{g}} = \frac{1}{3}t_0$$

$$\boxed{\Delta t_4 = \frac{1}{3}t_0}$$

Graficul vitezei va fi:



H.1.3.60

Expresia „componentei v_y", în condițiile enunțului, trebue înlocuită cu „vitezei".

Enunțul nu precizează perioada de timp pentru care se cere variația lui v.

Să analizăm alternativele posibile:

1°. Pare probabil a se fi avut în vedere timpul până la revenirea în punctul de lansare. În acest caz mișcarea ulterioară a corpului nu ne interesează.

Este vorba de graficul funcției $v = -10t + 30$, care este dreaptă ce trece prin $(0,30)$ și $(3,0)$, din care se reține partea ce corespunde lui $t \in [0; 2t_s]$ adică $t \in [0; 6]$.

Pentru $t \in [0; 6]$ variația lui v este corect reprezentată de figurile c, d și e.

2°. Dacă se are în vedere variația lui v și după timpul de revenire în punctul de lansare, atunci graficul corect nu poate fi ales fără informații suplimentare asupra modului în care se desfășoară mișcarea după revenirea în punctul de lansare.

Dacă s-a avut în vedere ciocnirea corpului de suportul de pe care a fost lansat și rămânerea sa apoi în repaus, graficul corect este cel din

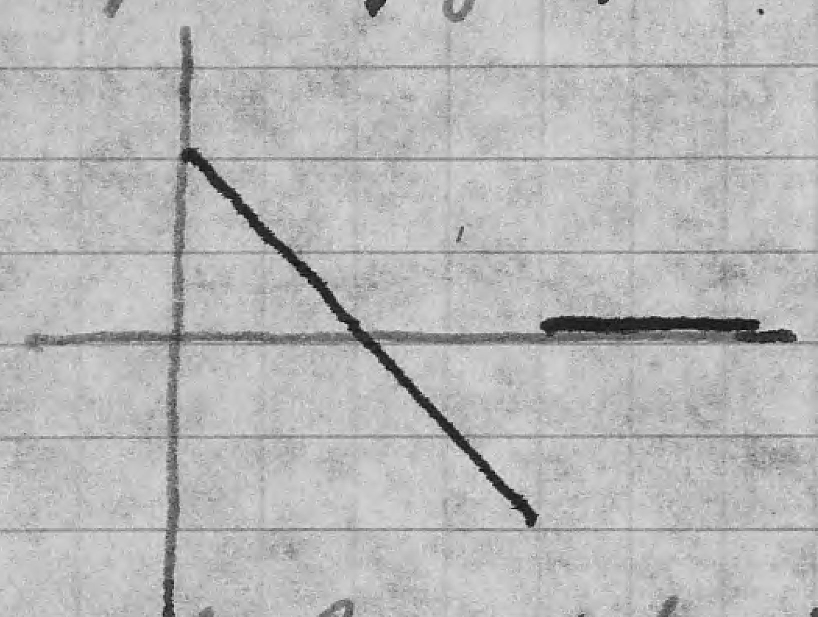


figura alăturată.

Dacă se creează condiții de continuare a coborârii și după atingerea punctului de lansare, graficul corect este „d".

Dacă, în condițiile anterioare, la trecerea prin punctul de lansare se aplică corpului o forță $\vec{R} = -\vec{G}$ care acționează apoi tot timpul coborârii, graficul corect este „e".

Sînt posibile, evident, și alte situații.

13.61. (Soluție Blanariu Liviu X B)

Dacă în ecuația mișcării

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

înlocuim t cu $t_u + t_c = \frac{2v_0}{g}$, obținem:

$$y = \frac{2v_0^2}{g} - \frac{2v_0^2}{g} = 0$$

Înlocuind pe t cu $t_u + t_c + t_u = \frac{3v_0}{g}$,

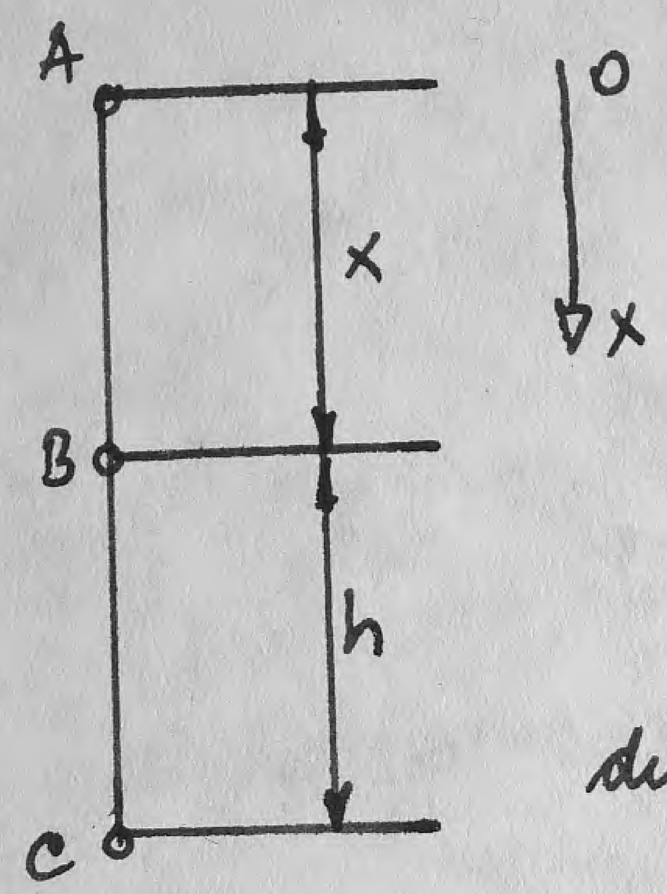
obținem:

$$y = \frac{3v_0^2}{g} - \frac{9v_0^2}{2g} \Rightarrow y = -\frac{3v_0^2}{2g} \quad (1)$$

Cum $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$, expresia (1) mai poate fi pusă sub forma $y = -3h_{max}$

Se observă că în ecuația mișcării y nu este distanța parcursă, ci coordonata corpului la momentul t.

1.3.62. (Soluție Roșca Dana - XB).



Corpul parcurge distanța $d = nh$ cuprinzând:

- o distanță x; din momentul când este aruncat din B și până se oprește în A.
- aceeași distanță x, la coborâre (din A în B)
- distanța h (B→C) deci $d = nh = 2x + h \Leftrightarrow$

$$x = \frac{(n-1)h}{2}$$

Viteza inițială o aflăm aplicând ecuația Galilei între punctele B și A.

$$0 = v_B^2 - 2gx \Leftrightarrow$$

$$v_B = \sqrt{2gx}$$

Înlocuind $x \Rightarrow v_B = \sqrt{(n-1)hg}$

Numeric $v_B = 9{,}8\ m/s$.

Viteza finală se află tot cu ecuația Galilei, aplicată între punctele A și C

$$\left.\begin{array}{l} v_C^2 = 0 + 2g(x+h) \\ \text{Cum} \quad x = \dfrac{(n-1)h}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

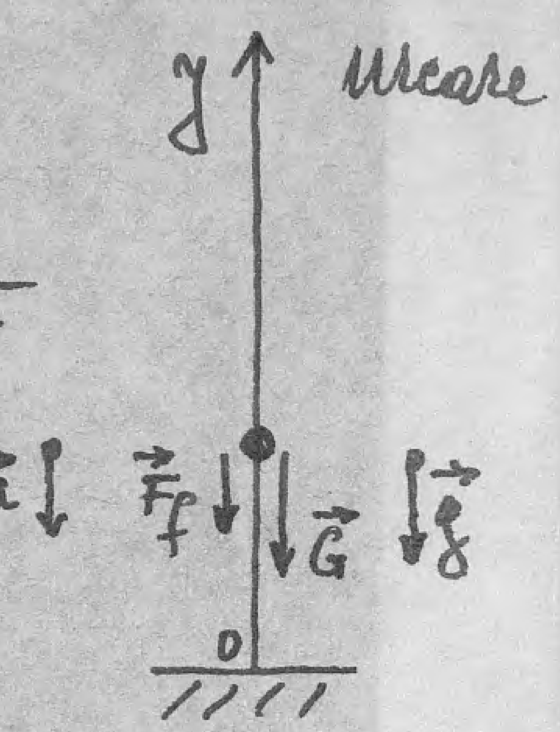
$$v_C = \sqrt{2g\left(\frac{nh - h + 2h}{2}\right)} = \sqrt{gh(n+1)}$$

$$v_C = \sqrt{gh(n+1)}$$

Numeric $v_C = 13{,}8\ m/s$.

1.3.64 $\vec{F}_f = k\vec{v}$; $\vec{F}_a = \vec{G} + \vec{F}_f$

$ma = mg + kv$



La urcare, $a = \frac{mg + kv}{m} = g + \frac{k}{m}v$. Se observă că

$$\boxed{a_{max} = g + \frac{k}{m}v_{max}}$$

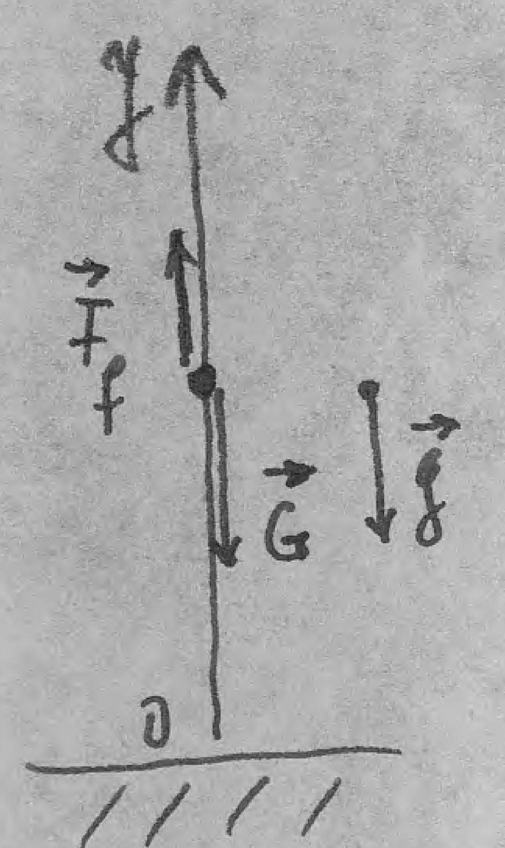
a_{max} este în momentul lansării când v e maxim (accelerația luată în modul)

Când atinge înălț. max. $a = g$

La coborâre: $a = \frac{mg - kv}{m} = g - \frac{k}{m}v$

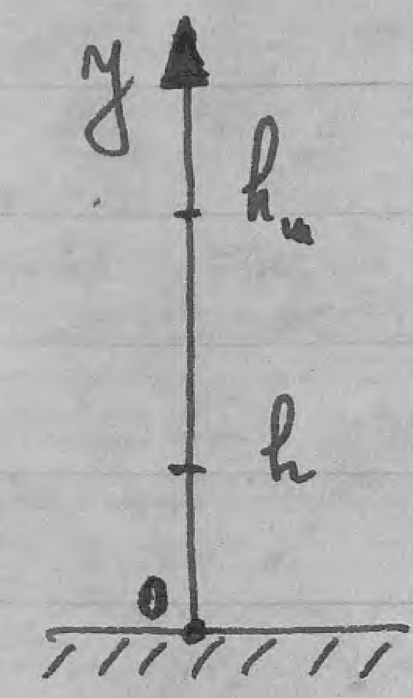
$$\boxed{a_{min} = g - \frac{k}{m}v_{max}}$$

Și se observă că a_{min} e în momentul atingerii pământului, când $v = v_{max}$.



H.1.3.65

$h_m = 4,9\,m$; v_{01} ; $v_{02} = v_{01}$; $h = ?$



$v_{02} = v_{01} = \sqrt{2gh_m}$

$y_1 = h_m - \frac{1}{2}gt^2$

$y_2 = v_{02}t - \frac{1}{2}gt^2$

$y_1 = y_2$ condiția de întâlnire

$h_m = v_{02}t$ $\quad h_m = v_{01}t$ $\quad t = \frac{h_m}{\sqrt{2gh_m}} = \sqrt{\frac{h_m}{2g}}$

$t = \sqrt{\frac{h_m}{2g}}$

$h = v_{02}t - \frac{1}{2}gt^2 = \sqrt{2gh_m}\cdot\sqrt{\frac{h_m}{2g}} - \frac{1}{2}g\frac{h_m}{2g}$

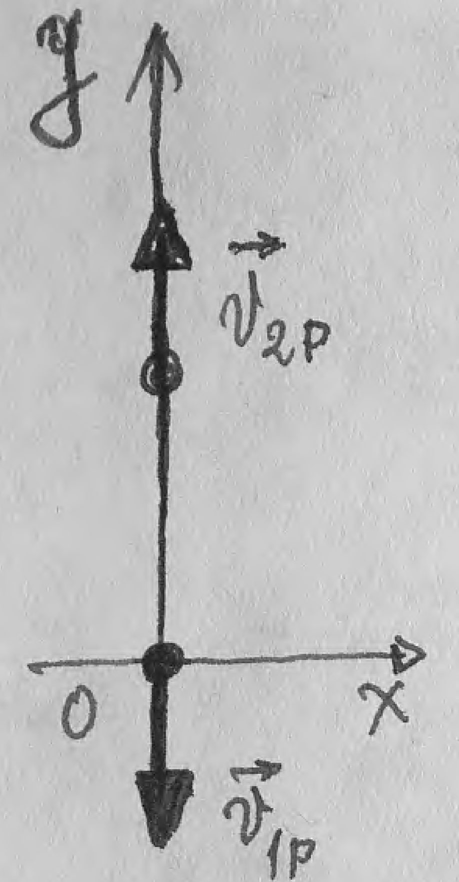
$h = h_m - \frac{h_m}{4} = \frac{3h_m}{4}$

$\boxed{h = \frac{3}{4}h_m}$ $\quad h = \frac{3}{4}\cdot 4,9 = 3\cdot 1,225$

$\boxed{h = 3,675\,m}$

72

16 – 1.3.66 Hristev 1983



$\vec v_{01P}$ și $\vec v_{02P}$ notăm vitezele inițiale.

$\vec v_{2P} = \vec v_{21} + \vec v_{1P}$ la un moment dat

$\vec v_{21} = \vec v_{2P} - \vec v_{1P}$

$v_{21} = v_{2P} - (-v_{1P})$

$v_{21} = v_{2P} + v_{1P}$

$v_{1P} = v_{01P} + gt$

$v_{2P} = v_{02P} - gt$

$v_{1P} + v_{2P} = v_{01P} + v_{02P} = const.$

v_{21} = const. Aşadar, mişcarea corpului doi față de corpul întâi este uniformă:

$y_{21} = v_{21} \cdot t$ $\boxed{y_{21} = (v_{01P} + v_{02P})t}$

Cum, cu notațiile din enunț: $v_{01P} = v_1$, $v_{02P} = v_2$

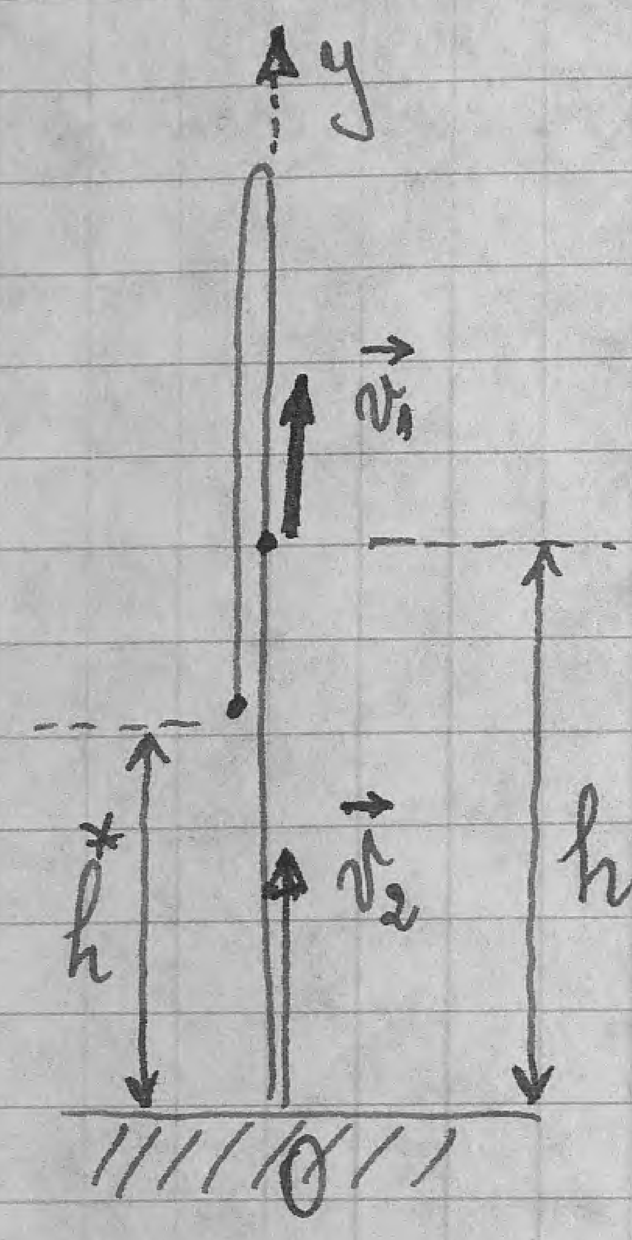
$\boxed{y_{21} = (v_1 + v_2)t}$

73

H. 1.3.67

$v_1 = 5 m/s$; $h = 10 m$;

$v_2 = 15 m/s$; $h_2 = 0$ a) $\Delta t = ?$ b) $h^* = ?$ c) Cond. int. aer.



a) $y_1 = h + v_1 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$

$y_2 = v_2 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$

Condiția întâlnirii:

$y_1 = y_2 = h^*$

$h + v_1 \Delta t - \cancel{\frac{1}{2} g \Delta t^2} = v_2 \Delta t - \cancel{\frac{1}{2} g \Delta t^2}$

$(v_2 - v_1)\Delta t = h$

$\boxed{\Delta t = \frac{h}{v_2 - v_1}} = \frac{10}{15-5} = 1$

$\boxed{\Delta t = 1 s}$

b) $h^* = v_2 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$

$h^* = 15 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 = 15 - 4,9 = 10,1$

$\boxed{h^* = 10,1 m}$

c) $h^* = v_2 \cdot \frac{h}{v_2 - v_1} - \frac{1}{2} g \frac{h^2}{(v_2 - v_1)^2}$

$h^* = \frac{h}{v_2 - v_1}\left(v_2 - \frac{1}{2} g \frac{h}{v_2 - v_1}\right)$

Condiția cerută este $h^* > 0$. Avem:

$\frac{h}{v_2 - v_1} \cdot \frac{2 v_2 (v_2 - v_1) - gh}{2(v_2 - v_1)} > 0$; $\cancel{\frac{h}{v_2-v_1} \cdot \frac{2v_2 - gh}{2(v_2 - v_1)} > 0}$

$$\frac{h}{v_2-v_1}\cdot\frac{2v_2(v_2-v_1)-gh}{2(v_2-v_1)}>0$$

$$\frac{h}{2(v_2-v_1)^2}\left[2v_2(v_2-v_1)-gh\right]>0$$

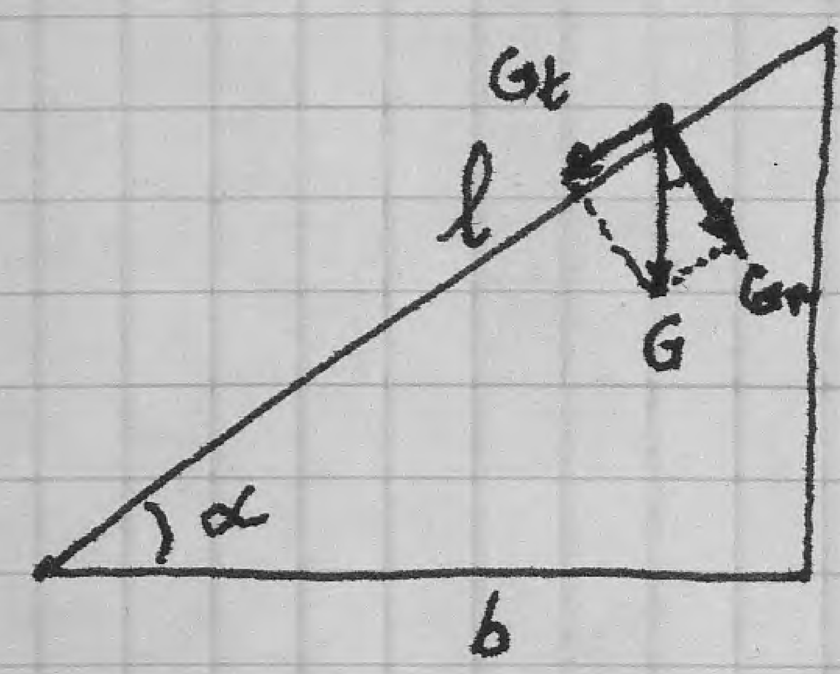
Cum $\frac{h}{2(v_2-v_1)^2}>0$ Condiția se scrie:

$$\boxed{2v_2(v_2-v_1)>gh}$$

74

1.03.1989

H. 1.3.68



b este dat.

$G_t = mg\sin\alpha$

$ma = mg\sin\alpha$

$a = g\sin\alpha$ accelerația cu care coboară picătura de ploaie pe acoperiș.

$l = \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2$ Dar $b = l\cos\alpha$

$l = \frac{b}{\cos\alpha}$ De unde:

$$t^2 = \frac{2b}{g\sin\alpha\cos\alpha}\ ;\quad t^2 = \frac{4b}{g\sin 2\alpha}$$

$t = 2\sqrt{\frac{b}{\sin 2\alpha}}$ Aici t este minim pentru $\sin 2\alpha$ maxim, adică

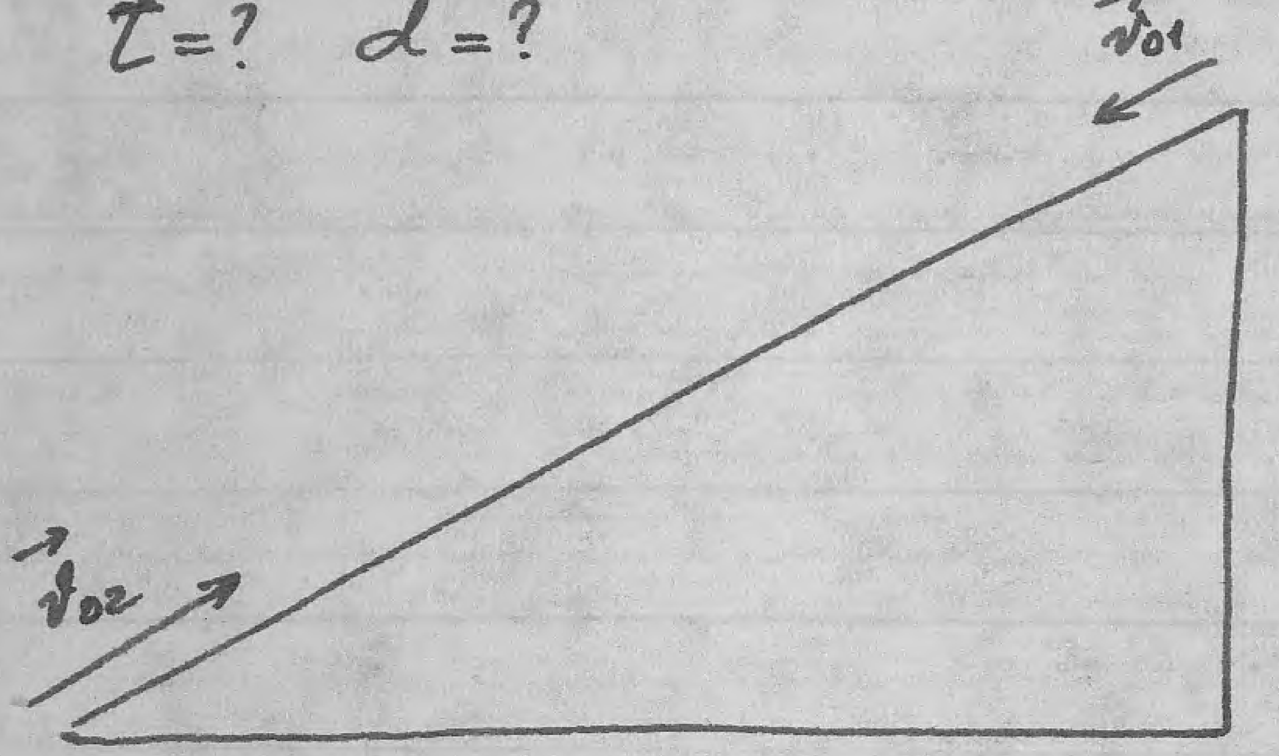
$\sin 2\alpha = 1$; $2\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}$

75

H. 1.3.69

$l = 195\,m$; $v_{01} = 1{,}5\,m/s$; $v_{02} = 5\,m/s$; $a = 0{,}2\,m/s^2$

$t = ?$ $d = ?$



$$v_{02} t - \frac{1}{2} a t^2 + v_{01} t + \frac{1}{2} a t^2 = l$$

$$(v_{01} + v_{02}) t = l \qquad \boxed{t = \frac{l}{v_{01} + v_{02}}} = \frac{195}{6{,}5}$$

$$t = \frac{390}{13} = 30$$

$$\boxed{t = 30\,s}$$

$$d = v_{02} t - \frac{1}{2} a t^2$$

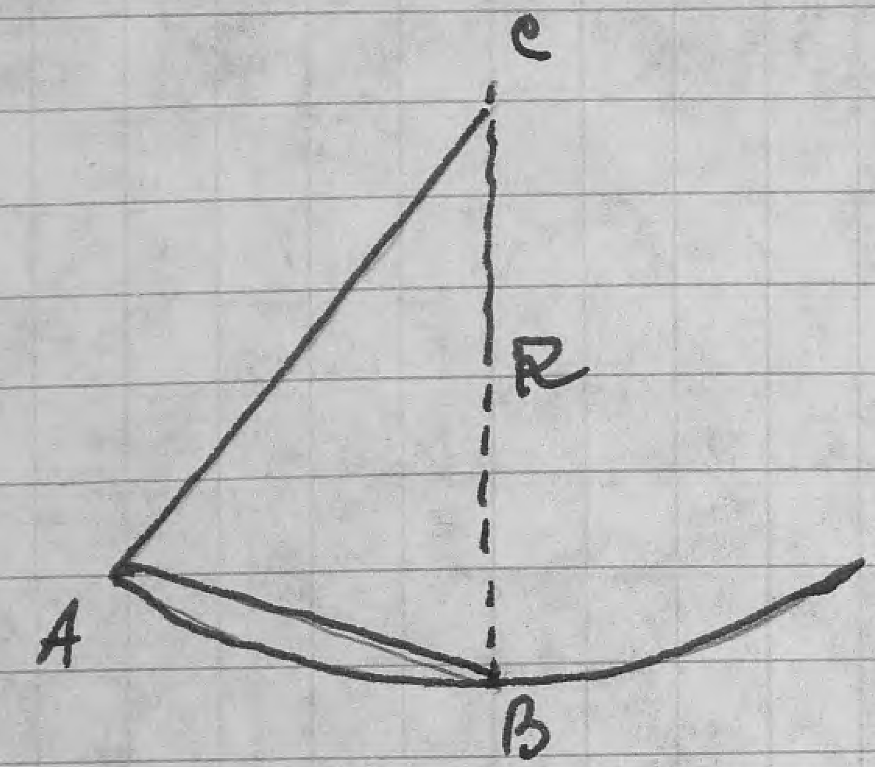
$$d = 5 \cdot 30 - \frac{1}{2}\, 0{,}2 \cdot 900 = 150 - 0{,}1 \cdot 900$$

$$d = 150 - 90 = 60 \qquad \boxed{d = 60\,m}$$

76

H.1.3.70

$AB \ll R$; R ; $t = ?$ $t^* = ?$

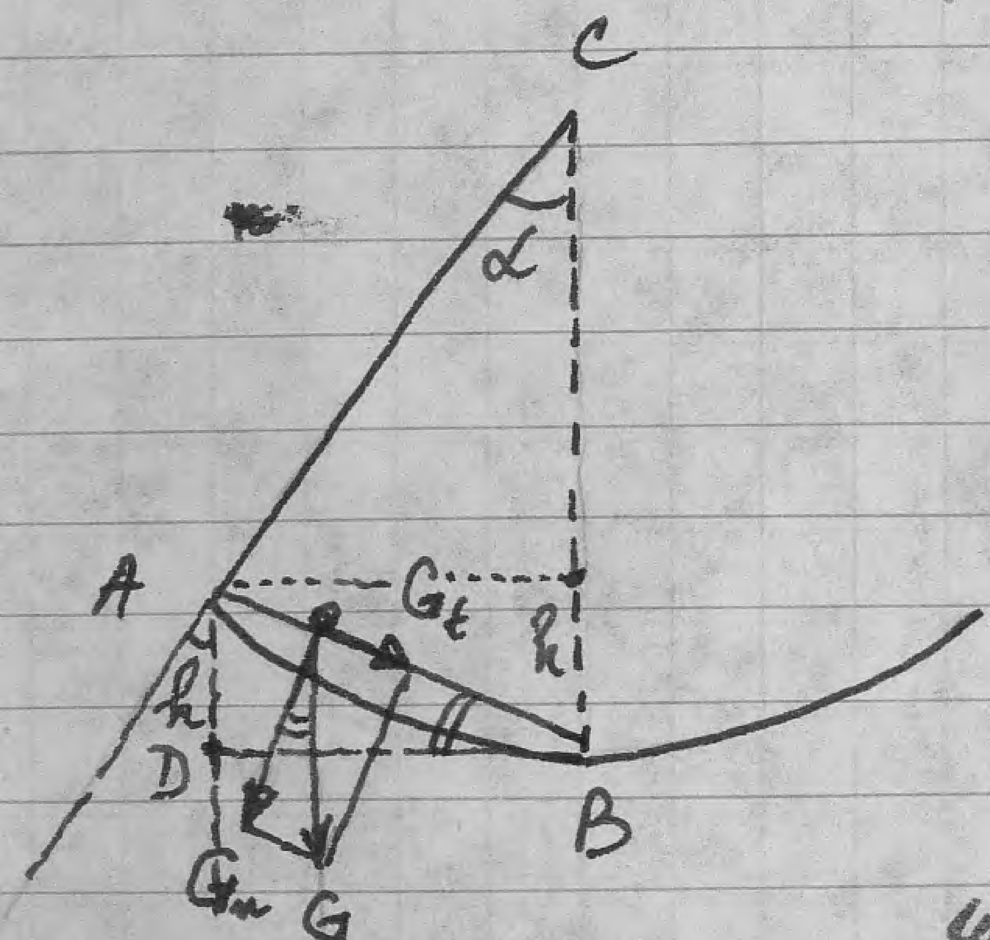


a) Coborârea pe arc poate fi asimilată cu mișcarea unui pendul pe durata $t = \frac{T}{4}$

$$t = \frac{1}{4} T = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$\boxed{t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}}$$

b) $\widehat{ABD} = \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \alpha$



La coborârea pe coardă

$$F_a = G_t \ ; \quad ma = mg \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$a = g \sin \frac{\alpha}{2} = ct.$$

Așadar mișcarea pe coardă este uniform accelerată: $v_B = a t^*$

$$t^* = \frac{v_B}{g \sin \frac{\alpha}{2}} \ ; \quad \text{Dar } E_{pA} = E_{cB} \ ; \quad mgh = \frac{m v_B^2}{2}$$

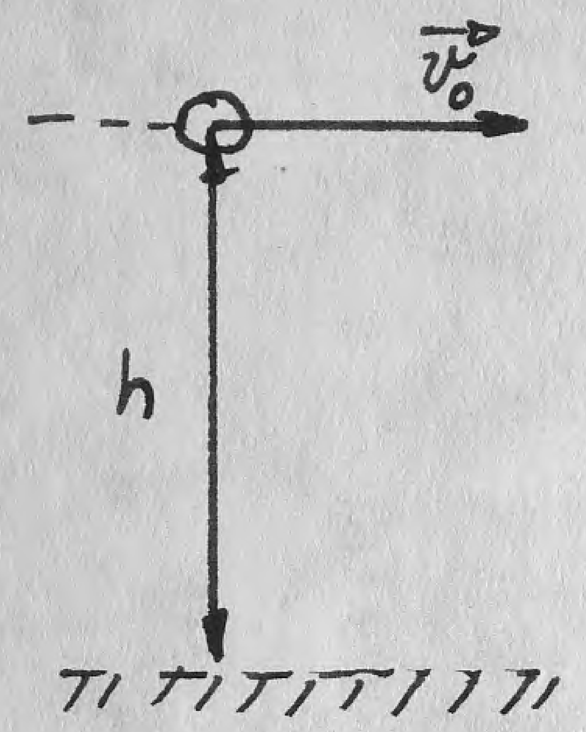
$$v_B^2 = 2gh \ ; \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

Însă $h = R - R\cos\alpha$; $h = R(1 - \cos\alpha)$; $h = R \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$$v_B = \sqrt{2g \cdot 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \ ; \quad v_B = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{Rg}$$

$$t^* = \frac{2 \sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{Rg}}{g \sin\frac{\alpha}{2}} \qquad t^* = \frac{2\sqrt{Rg}}{g} \ ; \quad \boxed{t^* = 2\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

1.3.71. (Soluție Blanariu Liviu – X B)



distanța parcursă pe orizontală este,

$x = v_0 t \cos 0° = v_0 t$ (1)

$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (2)

Înlocuind (2) în (1) obținem:

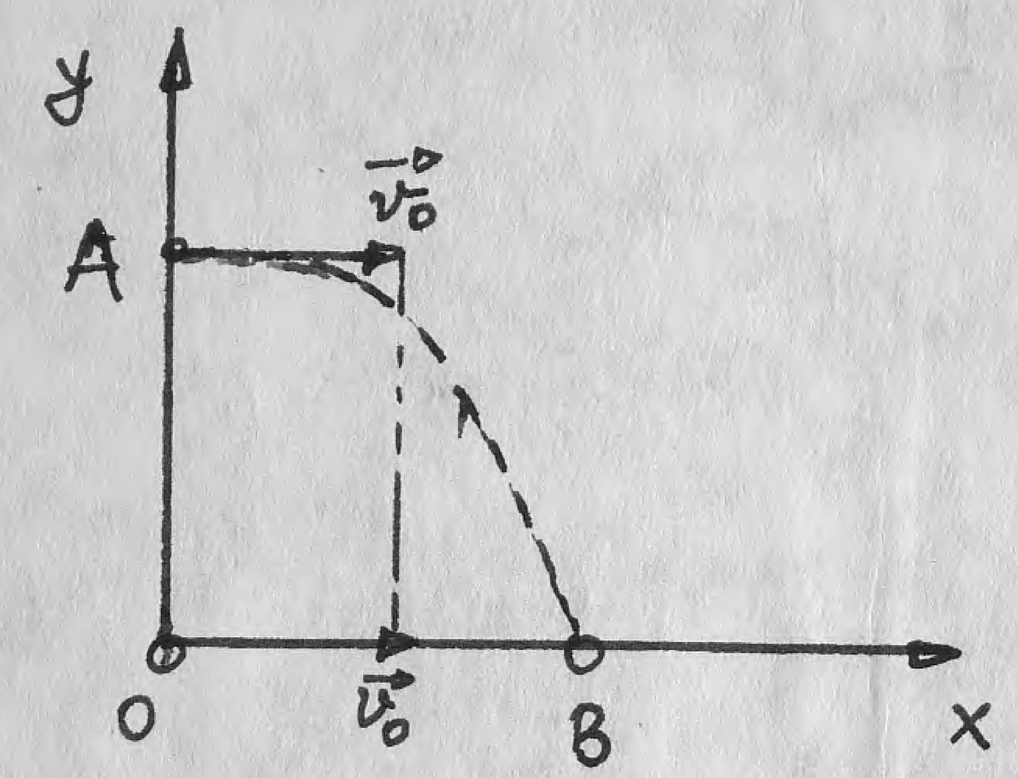
$x = b = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Punînd condiția $b = nh$, obținem

$v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = nh$ sau scoțînd v_0,

$v_0 = n \sqrt{\frac{gh}{2}}$

1.3.72 (Soluție Popa Dana – X B).



Alegem pentru studiul mișcării un sistem de axe ca în figura alăturată. Pe axa Oy mișcarea este o cădere liberă. Deci:

$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (1)

unde t este timpul de cădere.

Pe Ox, cum forța $\vec{G}$ este perpendiculară pe axă, nu avem forță și accelerație și deci mișcarea este uniformă, adică:

$v_0 \cdot t = \|OB\|$ (2)

Înlocuind (1) în (2), obținem:

$\|OB\| = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (3)

Pentru a obține o bătaie de n ori mai mare $\|OB'\|$ trebuie ca $\|OB'\| = n \cdot \|OB\|$ (4)

Înlocuind (3) în (4), obținem:

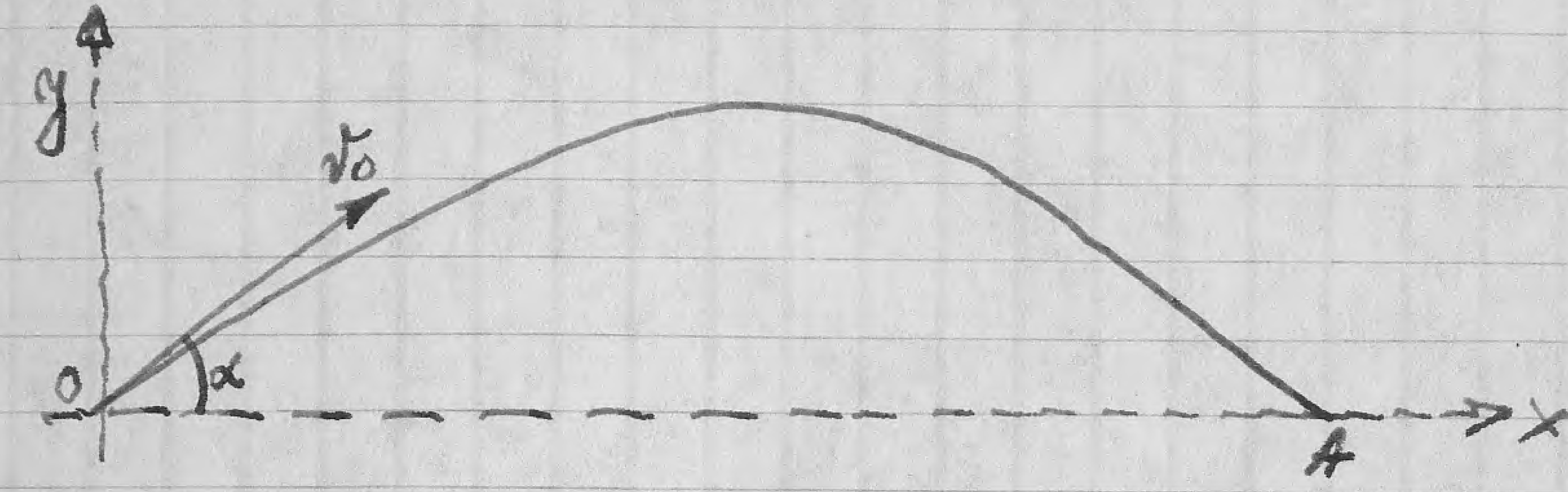
$$\|OB'\| = v_0 \cdot n \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{sau}$$

$$\|OB'\| = v_0 \sqrt{\frac{2n^2h}{g}} \quad (5)$$

Din relația (5) se observă că $n^2 h = h'$, deci înălțimea de tragere în al doilea caz este de n^2 ori mai mare

H.1.3.82

v_0 ; $v_1 = n v_0$ $\quad \alpha_1 = \alpha_0$



$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$; $\quad v_x = v_{0x} \quad x = v_{0x} \cdot t$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$; $\quad v_y = v_{0y} - g t$

$0 = v_{0y} - g t_u$; $\quad t_u = \frac{v_{0y}}{g}$

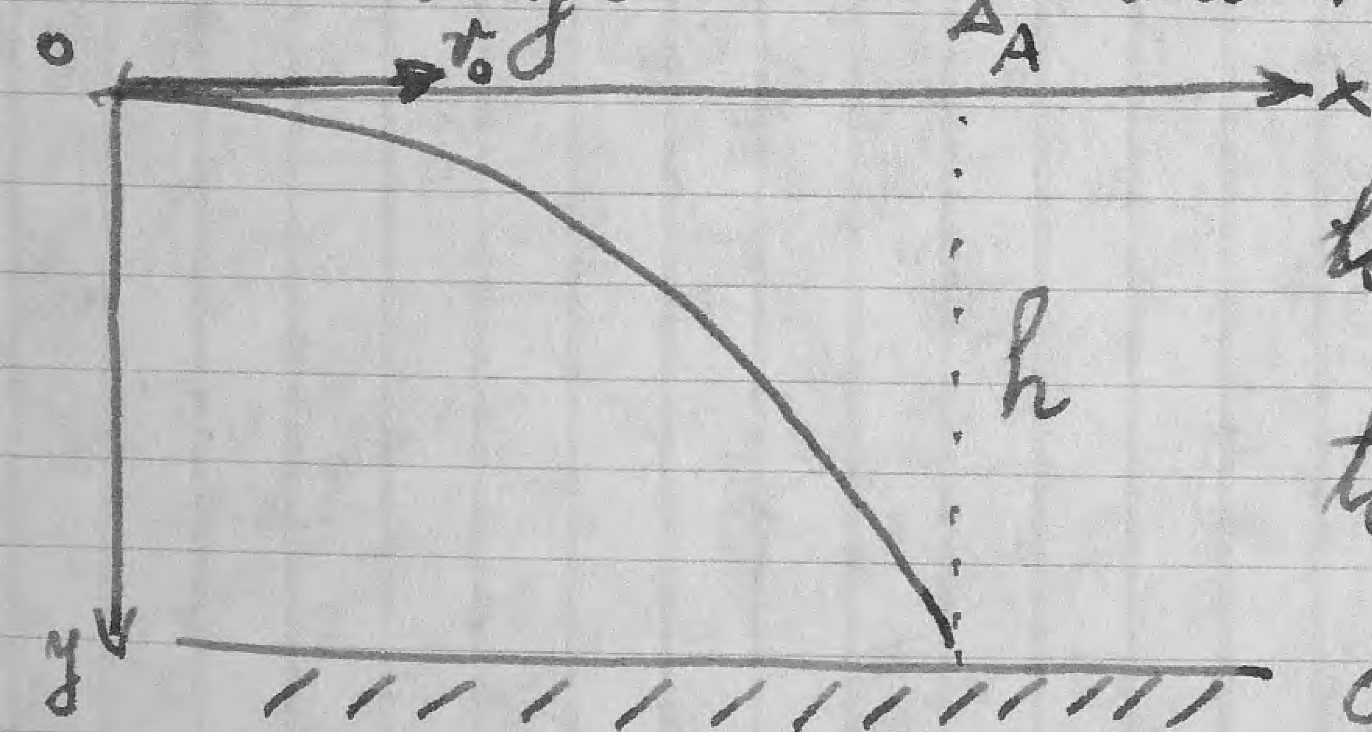
Se arată că $t_u = t_c$. Deci $t = 2 t_u$

$$OA = 2 v_0 \frac{v_{0y}}{g} \cos\alpha = \frac{2 v_0}{g} v_0 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$OA = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \qquad OA_1 = \frac{v_1^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\frac{OA_1}{OA} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = \left(\frac{n v_0}{v_0}\right)^2 = n^2 \qquad \boxed{\frac{OA_1}{OA} = n^2}$$

La tragerea orizontală:



$$h = \frac{1}{2} g t_c^2$$

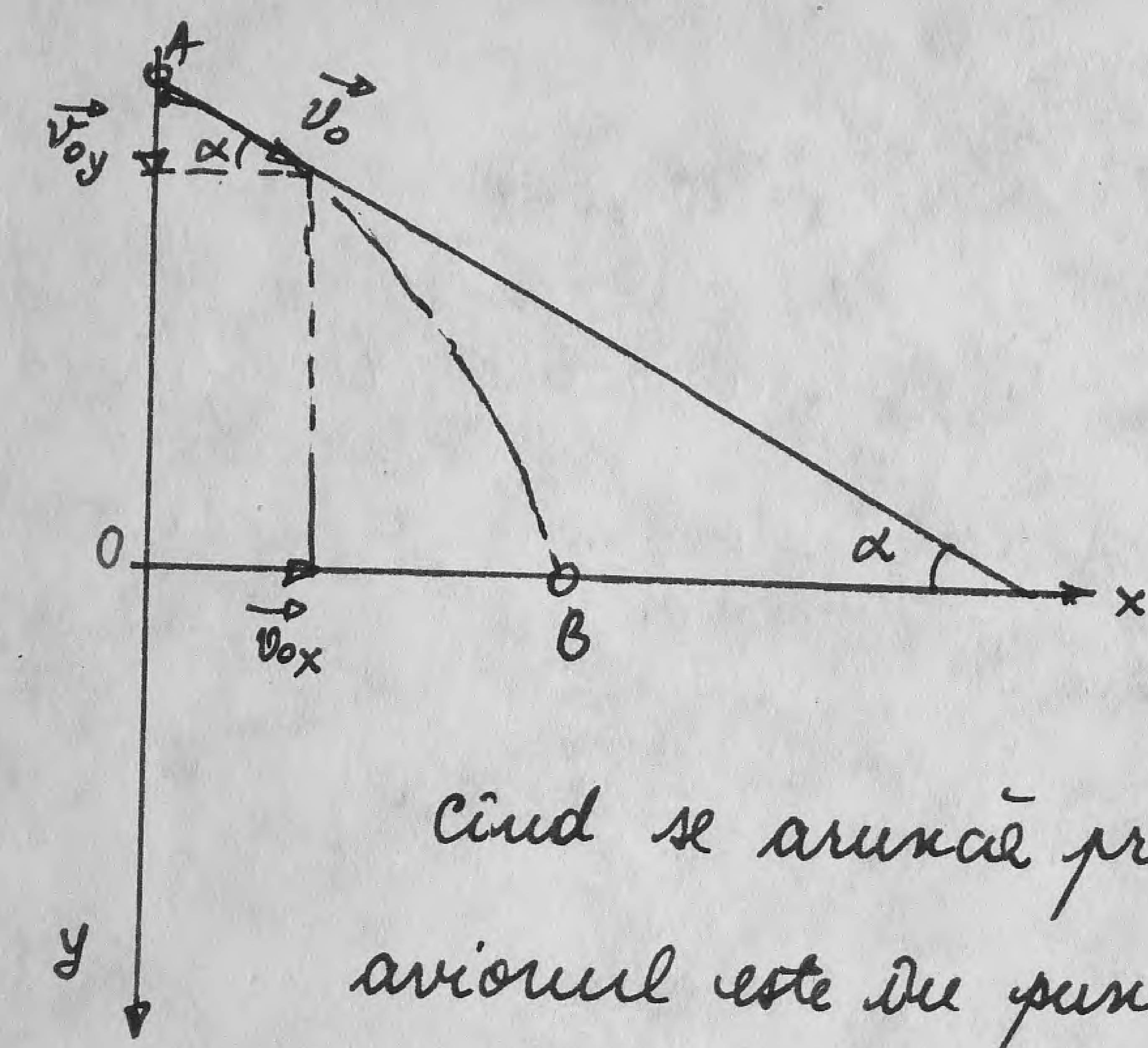
$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$OA = v_0 \cdot t_c$$

$$OA = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \; ; \quad OA_1 = n v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\boxed{\frac{OA_1}{OA} = n}$$

1.3.84. (Soluție Ropca Dana - XB)



Cînd se aruncă proiectilul avionul este în punctul A. Ni se cere $\|OB\|$.

Pe axa Oy avem o cădere verticală cu viteză inițială $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ (1). Deci:

$$\|AO\| = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

Înlocuind (1) în (2) și ținînd cont că $\|AO\| = h$, obținem

$$h = v_0 t \sin\alpha + \frac{1}{2} g t^2$$

Pe axa Ox, cum nu avem forță și accelerație, avem o mișcare uniformă. Deci:

$$\|OB\| = v_{0x} \cdot t$$

dar $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$

deci obținem:

$$v_0 t \cos\alpha = \|OB\|$$

obținem un sistem de 2 ecuații cu două necunoscute din care rezultă $\|OB\|$.

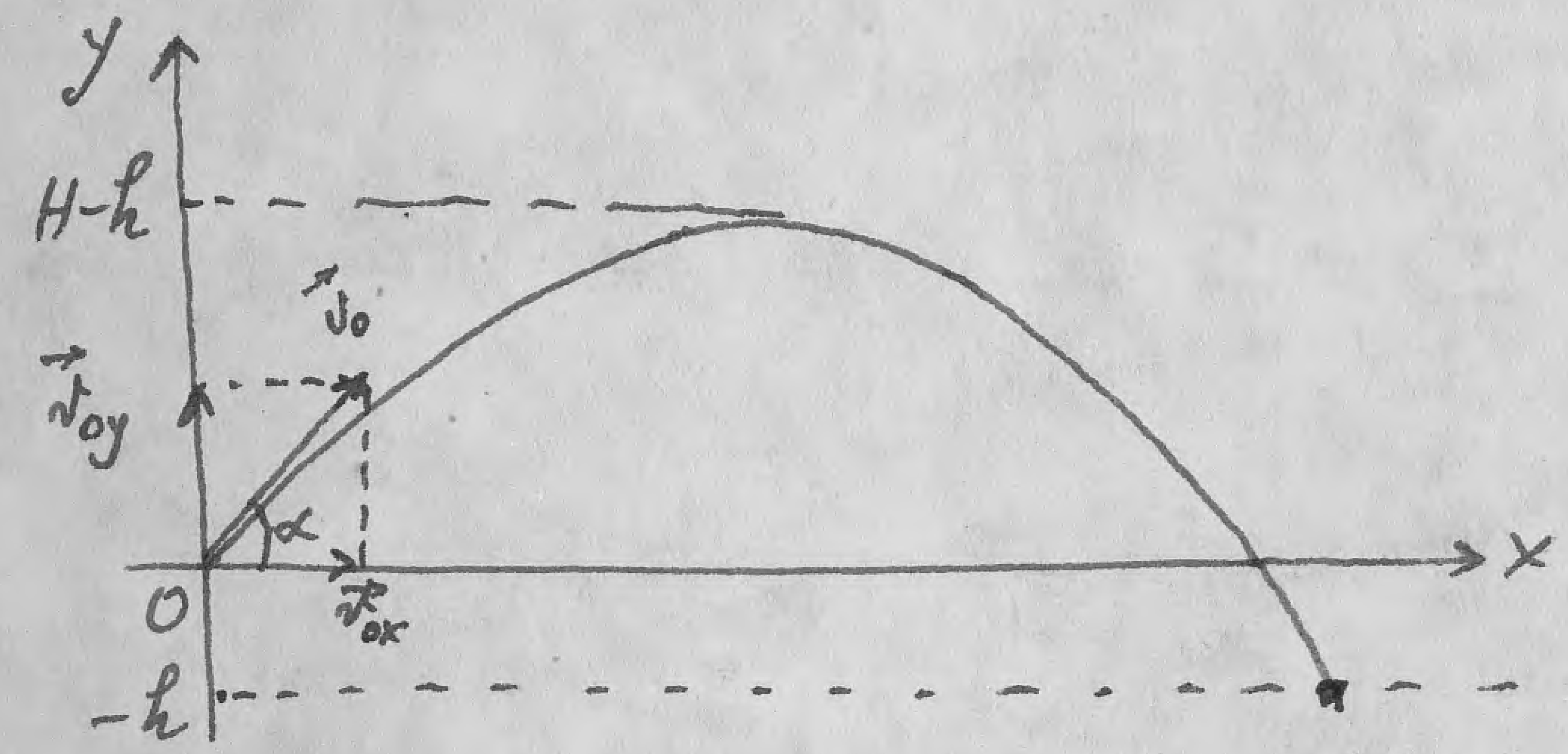
Sistemul este:

$$\begin{cases} h = v_0 t \sin\alpha + \frac{1}{2} g t^2 \\ \|OB\| = v_0 t \cos\alpha \end{cases}$$

cu soluția $\|OB\| = 2{,}05$ km.

1.3.89 Soluție Prof. Dumitru Roșca

La ce distanță maximă se poate arunca o bilă într-o sală de sport care are înălțimea $H = 7{,}5$ m, dacă bila are viteza inițială $v_0 = 20$ m/s și se aruncă de la o înălțime $h = 1{,}5$ m?



$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ Se știe că bătaia este $b = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ Deci $b_{max} = \frac{v_0^2}{g}$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Înălțimea maximă este

$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. Pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, deci

$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{1}{2}$; $\boxed{y_{max} = \frac{v_0^2}{4g}}$ dacă x este maxim (când $\alpha = \frac{\pi}{4}$)

Înălțimea sălii limitează: $y_{max} \le H-h$ sau

$$\frac{v_0^2}{4g} \le H-h$$

Condiția nu-i îndeplinită: $\frac{400}{40} \not\le 6$

Așadar, bila trebuie aruncată sub un unghi mai mic de $\frac{\pi}{4}$.

$y_{max} = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ și $y_{max} = H-h$

$H - h = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ $\boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{2g(H-h)}}{v_0}}$

Dat: $v_x = v_{ox} = v_0\cos\alpha$; $x = v_{ox}t$; $t = \frac{x}{v_{ox}}$

$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$

$y = v_{oy}\frac{x}{v_{ox}} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{ox}^2}$ Aici punem $y = -h$

$-h = \frac{v_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha}x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$

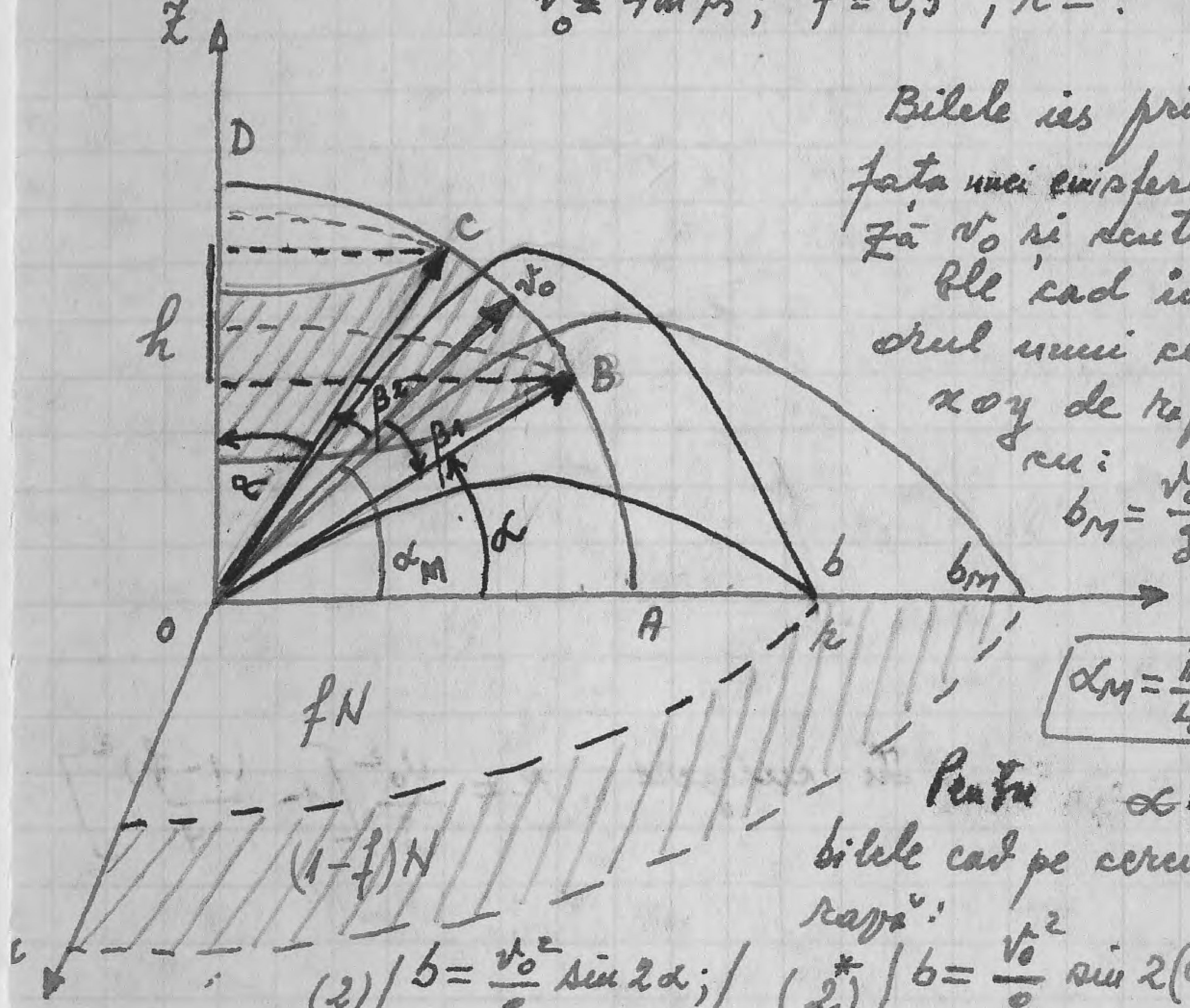
$-h = x\,tg\,\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$

$\boxed{\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} - x\,tg\,\alpha - h = 0}$ unde

α este determinat mai sus prin $\sin\alpha$.

82 1.3.94

$v_0 = 4$ m/s ; $f = 0,5$; $h = ?$



Bilele ies prin suprafața unei emisfere de rază v_0 și centru O. Ele cad în interiorul unui cerc din xoy de rază b_M cu: $b_M = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_M$

$\boxed{\alpha_M = \frac{\pi}{4}}$ (1)

Pentru $\alpha = \alpha_M - \beta_1$ bilele cad pe cercul de rază:

(2) $\boxed{b = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha;}$ (2*) $\boxed{b = \frac{v_0^2}{g}\sin 2(\alpha_M - \beta_1)}$

Pe același cerc cad bilele cu $\alpha^* = \alpha_M + \beta_2$

$\boxed{b = \frac{v_0^2}{g}\sin 2(\alpha_M + \beta_2)}$ (3)

Din (2*) și (3) avem: $2(\frac{\pi}{4} - \beta_1) + 2(\frac{\pi}{4} + \beta_2) = \pi$; $\beta_2 - \beta_1 = 0$

$\beta_2 = \beta_1$

Decurge $\boxed{\widehat{COD} = \alpha}$ (4)

Presupunem α astfel ca în interiorul cercului de rază b să cadă fN bile. În afara lui cad (1-f)N, toate cele cu vîrful lui v_0 pe zona sferică hașurată.

Scriem că densitatea pe unitatea de arie a vîrfurilor lui v_0 este aceeași în zona sferică hașurată, ca pe toată emisfera:

$\frac{(1-f)N}{2\pi v_0 h} = \frac{fN}{2\pi v_0^2}$; $\boxed{\frac{1-f}{h} = \frac{1}{v_0 - h}}$ (5)

$h = v_0\cos\alpha - v_0\sin\alpha$; $\boxed{h = v_0(\cos\alpha - \sin\alpha)}$ (6)

$$\frac{1-f}{v_0(\cos\alpha-\sin\alpha)} = \cancel{\frac{f}{v_0 - v_0(\cos\alpha-\sin\alpha)}} \quad \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1-f}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \cancel{\frac{f}{1-(\cos\alpha-\sin\alpha)}} = \frac{1}{1}$$

$$(1-f)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 1-(1-f)^2} \quad (7)$$

Ducând (7) în (2)

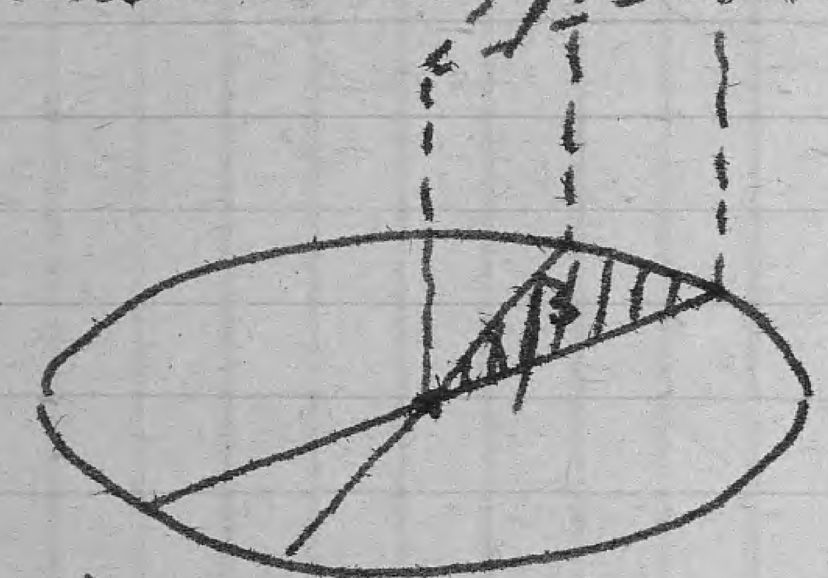
$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\left[1-(1-f)^2\right]}$$

În culegere $R = \frac{v_0^2}{g}\left[1-\frac{(1-f)^2}{4}\right]$

H. 1.3.94

$v_0 = 4\,m/s$; $f = 0{,}5$; $R = ?$

Împart cercul în interiorul căruia cad bilele aruncate în „p” arce egale, ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~egale~~. Ducând prin extremi-



Observăm că raza acestui cerc este $b_M = \frac{v_0^2}{g}$

tățile arcelor și centrul cercului plane perpendiculare pe planul cercului inițial, obținem p unghiuri diedre egale.

Fie: N^* numărul total de bile aruncate;

N_i^* numărul celor care cad în cercul de rază R;

Avem: $f = \frac{N_i^*}{N^*}$

Fie: N' numărul bilelor aruncate într-un unghi diedru din cele „p” obținute mai sus;

N_i' numărul bilelor ce cad în cercul de rază R din cele N' aruncate într-un unghi diedru.

Avem: $N' = \frac{N^*}{p}$; $N_i' = \frac{N_i^*}{p}$ de unde:

$N^* = N'p$; $N_i^* = N_i'p$ și $f = \frac{N_i^*}{N^*} = \frac{N_i'p}{N'p}$

adică $\boxed{f = \frac{N_i'}{N'}}$

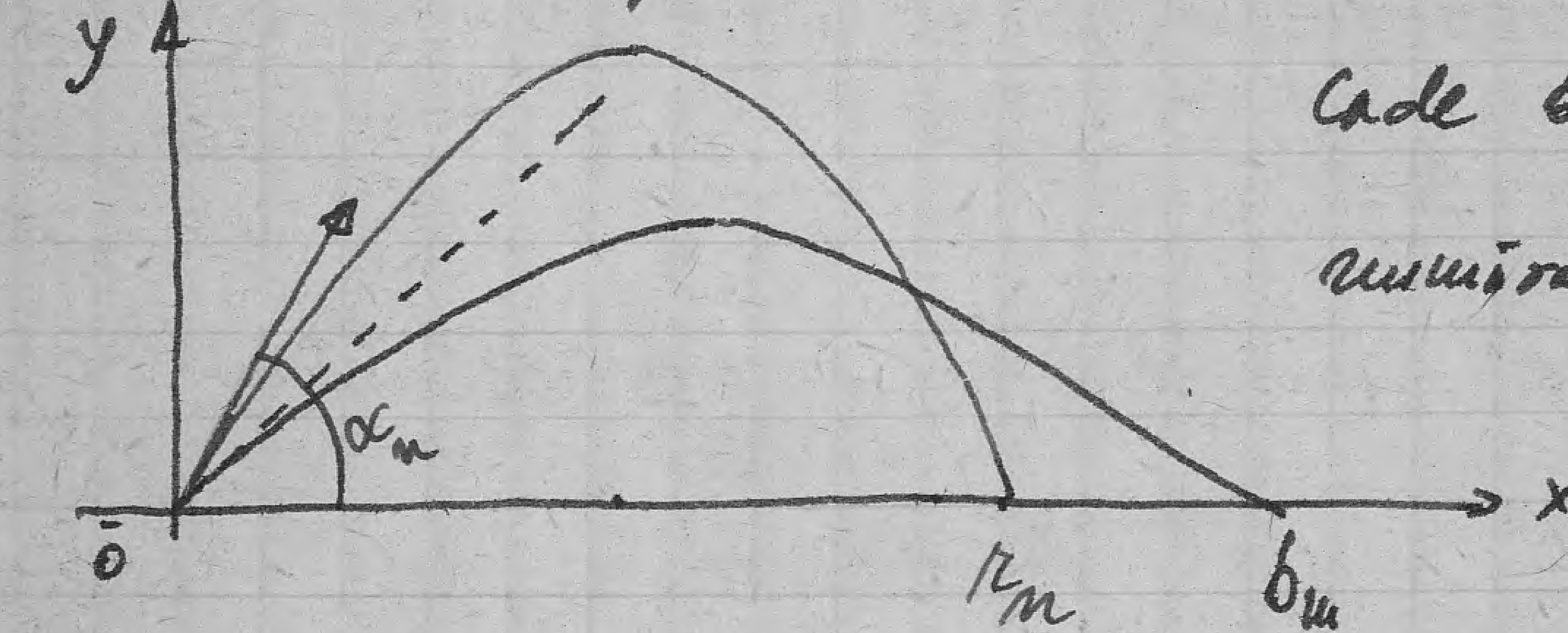
Când $p \to \infty$, unghiul diedru tinde la zero.

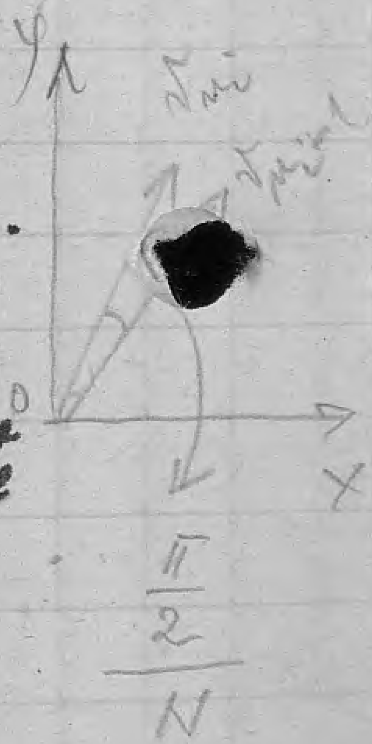
Atunci: $N_i' \to N_i$ unde N_i este numărul bilelor aruncate pe direcția unei raze a cercului din planul orizontal, ce cad în interiorul cercului de rază r

$N' \to N$ unde N este numărul bilelor aruncate pe direcția unei raze a cercului din planul orizontal, de rază $b_m = \frac{v_0^2}{g}$.

Evident: $\boxed{f = \frac{N_i}{N}}$

Am redus problema la una plană, cu vitezele de aruncare în primul cadran. Distanța r_n la care cade bila a „n"-a numărată de la Ox va fi:

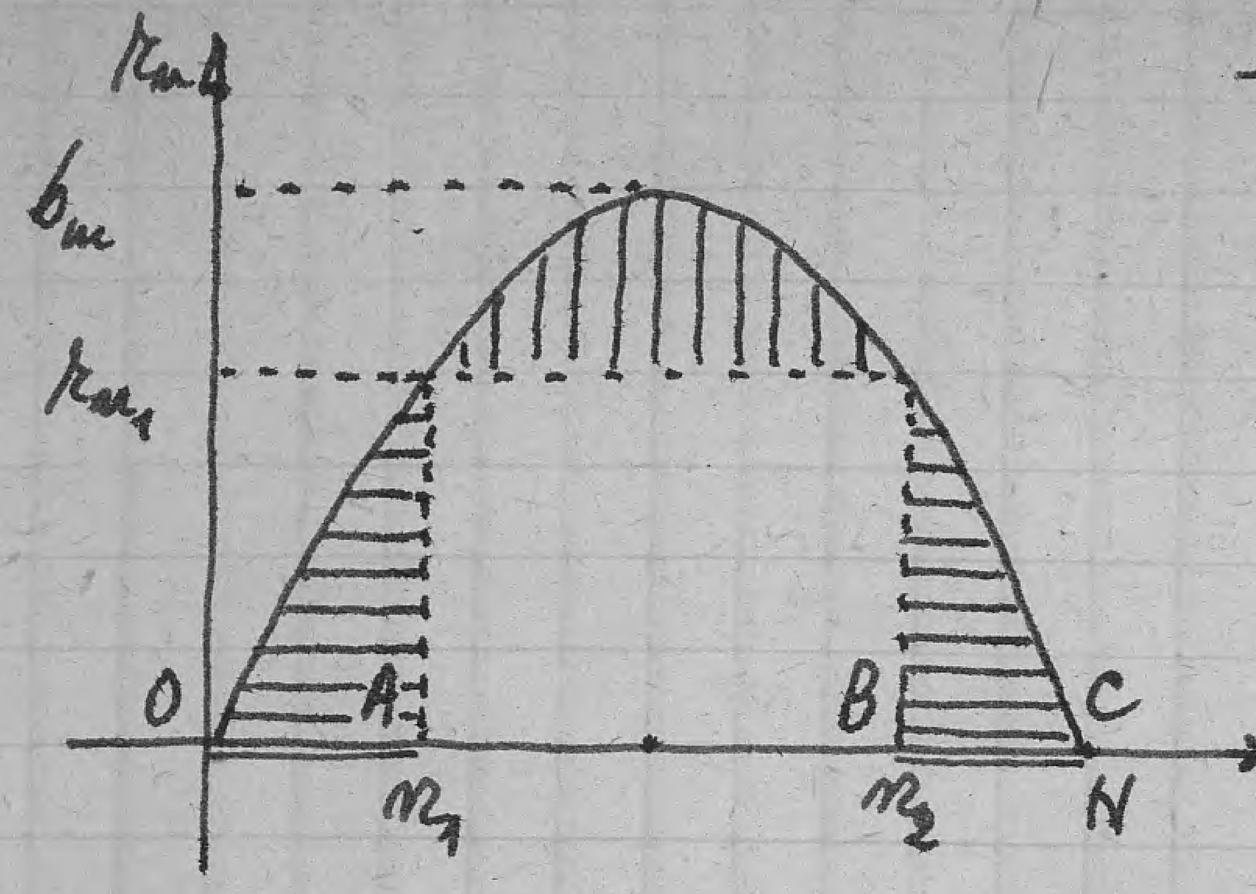




$r_n = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_n$ unde α_n este unghiul vitezei ei cu Ox. Avem $\alpha_n = n \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{N} = \frac{n\pi}{2N}$ ($\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{N}$ este unghiul vitezelor a două bile consecutive din cele N aruncate pe direcția unei raze).

$r_n = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\frac{n\pi}{2N}$, $r_n = \frac{v_0^2}{g}\sin\frac{n\pi}{N}$; $\boxed{r_n = b_m \sin\frac{\pi}{N}\cdot n}$

Graficul funcției $r_n = f(n)$ va fi:



- Din motive de simetrie: $OA = BC = n_1$
- Se vede că la distanțe mai mici ca r_{n_1} cad $2n_1$ bile, adică $\boxed{N_i = 2n_1}$

Așadar: $f = \frac{N_i}{N} = \frac{2n_1}{N}$; $\boxed{\frac{n_1}{N} = \frac{f}{2}}$ care dusă în

$r_{n_1} = \frac{v_0^2}{g}\sin\pi\cdot\frac{n_1}{N}$ dă $\boxed{r_{n_1} = \frac{v_0^2}{g}\sin\frac{\pi f}{2}}$

Aceasta va fi deci raza cercului, în plan orizontal, în interiorul căreia cad $f = 0,5$ din bilele aruncate.

$r_{n_1} = \frac{16}{9,8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{16}{9,8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1,154$ m.

$\boxed{r = 1,154\ m}$

În Culegere: $R = \frac{v_0^2}{g}\left[1 - \frac{(1-f)^2}{4}\right] = 1,53$ m

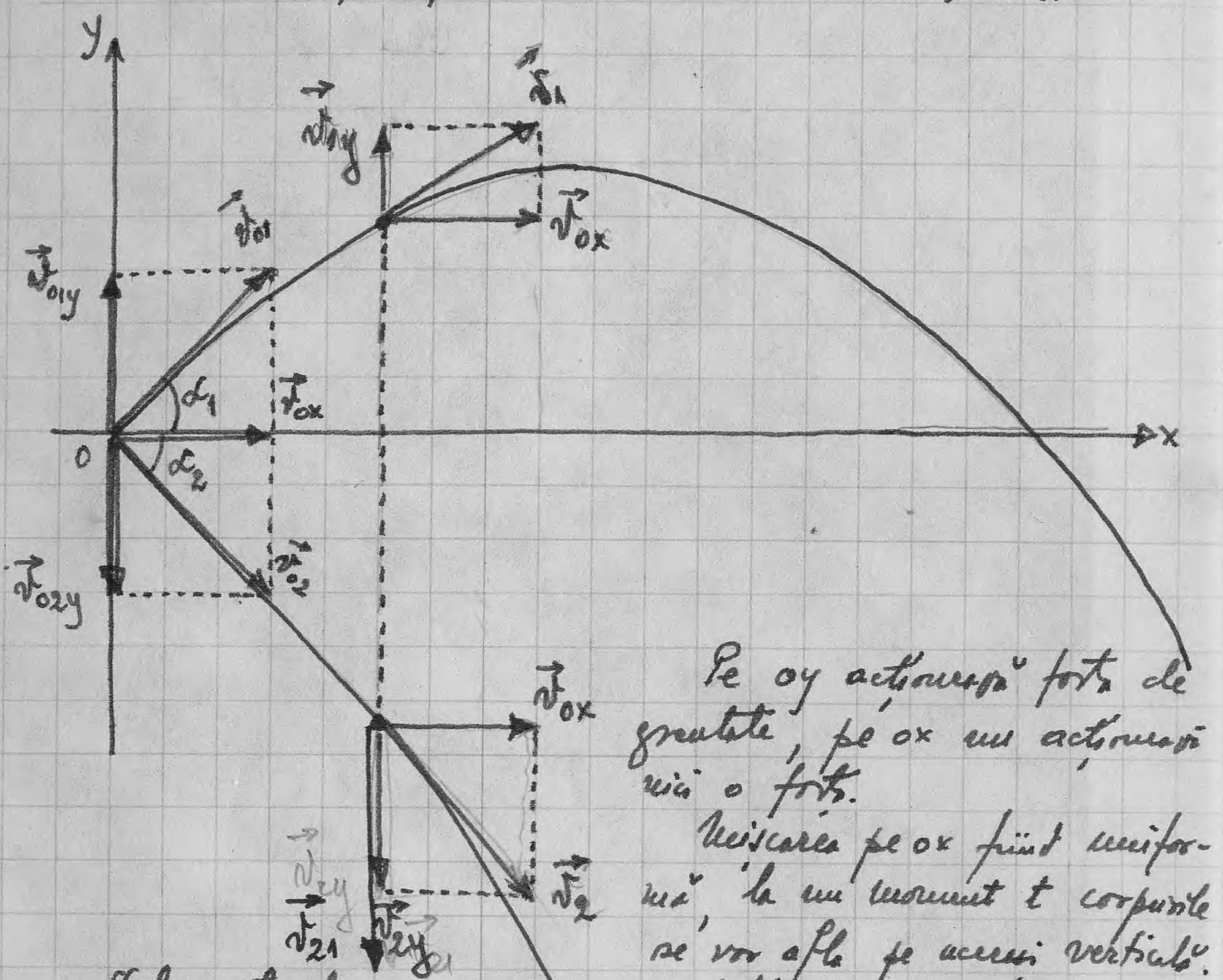
Soluția Haralamb:

$R = \frac{v_0^2}{g}\left[1 - (1-f)^2\right] = 1,224$ m

85

H. 1. 3. 95

$v_0 = 2\,m/s$; $\alpha_1 = 45^\circ$; $\alpha_2 = -45^\circ$; $v_{21} = ?$



Pe oy acționează forța de greutate, pe ox nu acționează nici o forță.

Mișcarea pe ox fiind uniformă, la un moment t corpurile se vor afla pe aceeași verticală.

Între vitezele pe oy avem relația:

$$\vec{v}_{2y} = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{1y} ; \quad \vec{v}_{21} = \vec{v}_{2y} - \vec{v}_{1y}$$

sau proiectând pe oy: $-v_{21} = -v_{2y} - v_{1y}$ sau $v_{21} = v_{2y} + v_{1y}$

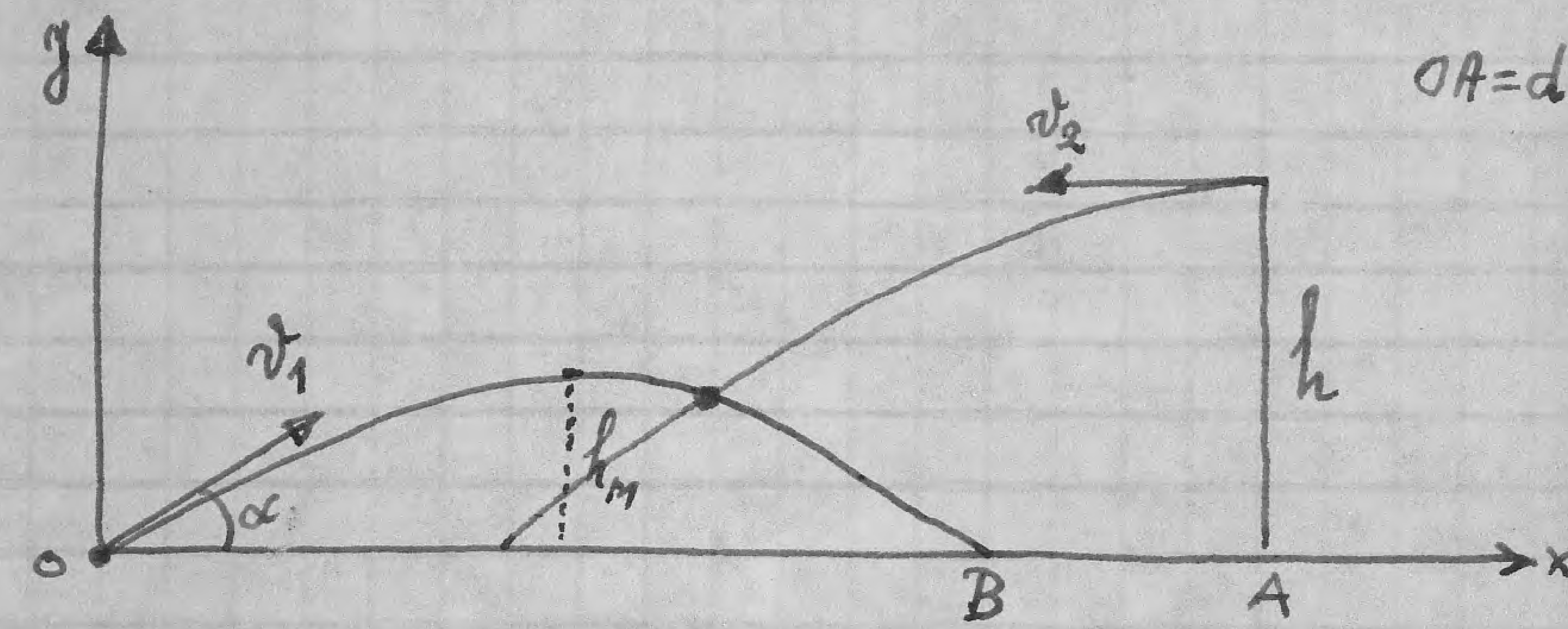
Dar:
$$\begin{cases} v_{1y} = v_{01y} - gt & \text{valabilă și la urcare și la coborâre.} \\ -v_{2y} = -v_{02y} - gt & \text{—"—} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1y} = v_0 \sin\alpha_1 - gt \\ v_{2y} = v_0 \sin\alpha_1 + gt \end{cases} \qquad \boxed{v_{21} = 2 v_0 \sin\alpha_1}$$

86

H. 1. 3. 97

$v_1 = 20\,m/s$; $\alpha = 30^\circ$; $h = 10\,m$; $d = ?$; $v_2 = 23\,m/s$



$$h_M = \frac{v_{oy}^2}{2g} = \frac{v_1^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{400 \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot 9{,}8} = 5{,}1\,m$$ Această valoare folosește pentru executarea figurii, dar, evident, poate lipsi.

$$\begin{cases} x_1 = v_1 t \cos\alpha \\ x_2 = d - v_2 t \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = v_1 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_2 = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Condiția de întâlnire: $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$ la un același moment.

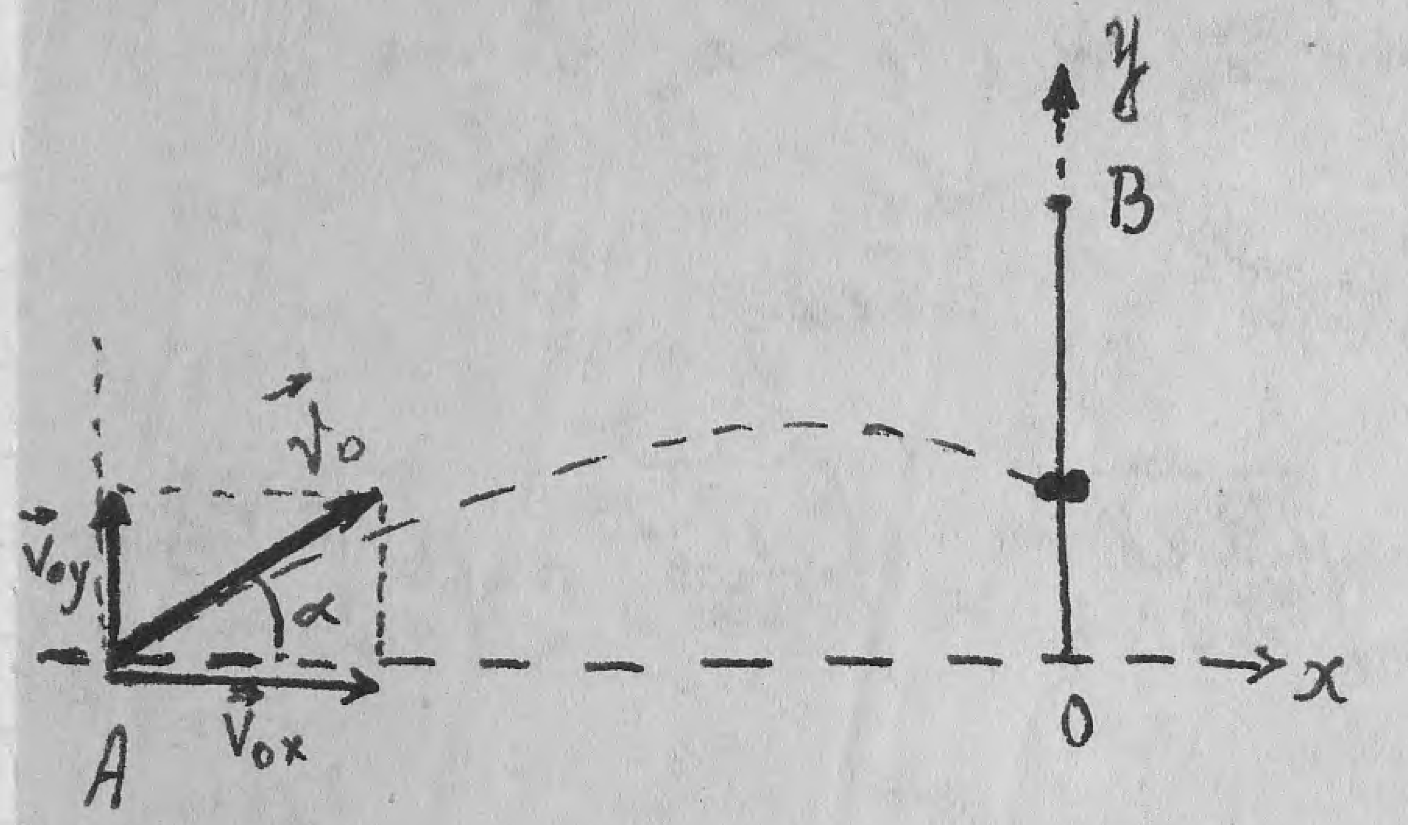
$y_1 = y_2$ dă $v_1 t \sin\alpha = h$; $t = \frac{h}{v_1 \sin\alpha}$

$x_1 = x_2$ dă $v_1 t \cos\alpha = d - v_2 t$ unde înlocuim pe t:

$$\frac{v_1 h}{v_1 \sin\alpha} \cos\alpha = d - v_2 \frac{h}{v_1 \sin\alpha} ;$$

$$\boxed{d = \frac{h \cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{v_2 h}{v_1 \sin\alpha} = \frac{h}{v_1 \sin\alpha}(v_1 \cos\alpha + v_2)}$$

1.3.98 – Soluție : Gavrilescu



A(–d, 0)

B(0, H)

Ecuațiile mișcării primului corp, ce cade din B:

$y_1 = H - \frac{1}{2}gt^2$; $x_1 = 0$

Ecuațiile mișcării corpului al doilea, aruncat din A:

$y_2 = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$; $x_2 = -d + v_{ox}t$

Condițiile de întâlnire :

$y_1 = y_2$ și $x_1 = x_2$, care se scriu :

$$\begin{cases} H - \frac{1}{2}gt^2 = t \cdot v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \\ -d + tv_0\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t v_0 \sin\alpha = H \\ t v_0 \cos\alpha = d \end{cases}$$

Se vede: $tg\,\alpha = \frac{H}{d}$ și $\boxed{\alpha = arc\,tg\,\frac{H}{d}}$

$\alpha = arc\,tg\,\frac{10}{17{,}3} = arc\,tg\,\frac{1}{1{,}73} = arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}\,rad}$ sau $\boxed{\alpha = 30^\circ}$

Întâlnirea va avea loc numai dacă v_{ox} este suficientă pentru ca bătaia b să fie cel puțin egală cu d. Ca să aibă loc în care este necesar să avem $b > d$. Aşadar:

$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha > d$; $v_0^2 > \frac{dg}{\sin 2\alpha}$

$\boxed{v_0 > \sqrt{\frac{dg}{\sin 2\alpha}}} = \sqrt{\frac{17{,}3 \cdot 9{,}8}{\sin 60^\circ}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot 1{,}73}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{19{,}6 \cdot 1{,}73}{1{,}73}}$

$v_0 > \sqrt{196}$; $\boxed{v_0 > 14\ m/s}$

Observaţie: a) Ultima condiţie se poate obţine şi observând că corpul aruncat de jos, în timpul $t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ de cădere a primului corp, trebuie să străbată o distanţă $v_{0x} \cdot t$ mai mare ca d:

$v_{0x} \cdot t > d$; $v_0 \cos\alpha \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} > d$

$\boxed{v_0 > \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2H}}}$; $v_0 > \frac{17{,}3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{9{,}8}{2 \cdot 10}}$

$v_0 > 20\sqrt{\frac{9{,}8}{20}} = \sqrt{20 \cdot 9{,}8} = \sqrt{196} = 14$

$v_0 > 14\ m/s$

b) Folosind $\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ şi $tg\alpha = \frac{H}{d}$ se obţine, în ambele situaţii de mai sus: $v_0 \geq \sqrt{\frac{g}{2}\left(H + d^2/H\right)} = 14\ m/s$

Răspunsul $\geq$ din Culegere admite întâlnirea când ating pământul

88

H. 1.3. 104

$v_0 = 72\ km/h$; $\mu = 0{,}2$; $t_{min} = ?$ $a = ct.$

Farfuria stă pironită odată cu trenul, şi dacă nu alunecă, are aceeaşi acceleraţie cu el.

$v = v_0 - at$; $0 = v_0 - at$; $\boxed{t = \frac{v_0}{a}}$ (1)

$\boxed{t_{min} = \frac{v_0}{a_{max}}}$ (1)

Forţa care pironeşte farfuria este frecarea statică.

~~Condiţia ca ea să nu alunece este~~

$F_{fs} = F_a \leq F_f$; $ma_f \leq \mu mg$; $\boxed{a_f \leq \mu g}$ (2)

$\boxed{a_{fmax} = \mu g}$ (2)

~~Înlocuind (2) în (1):~~ ~~Mărime amintită,~~

~~deci micşorăm fracţia, aşa că~~

~~$t \geq \frac{v_0}{\mu g}$~~

~~Timpul minim de frânare va fi~~

~~$\boxed{t_{min} = \frac{v_0}{\mu g}}$~~

Condiţia ca farfuria să nu alunece:

$a_t \leq a_{fmax}$ Se vede că acceleraţia maximă a trenului pentru care farfuria nu alunecă: a_{tmax}

$a_{tmax} = \mu g$ (vezi 2) care dusă în (1):

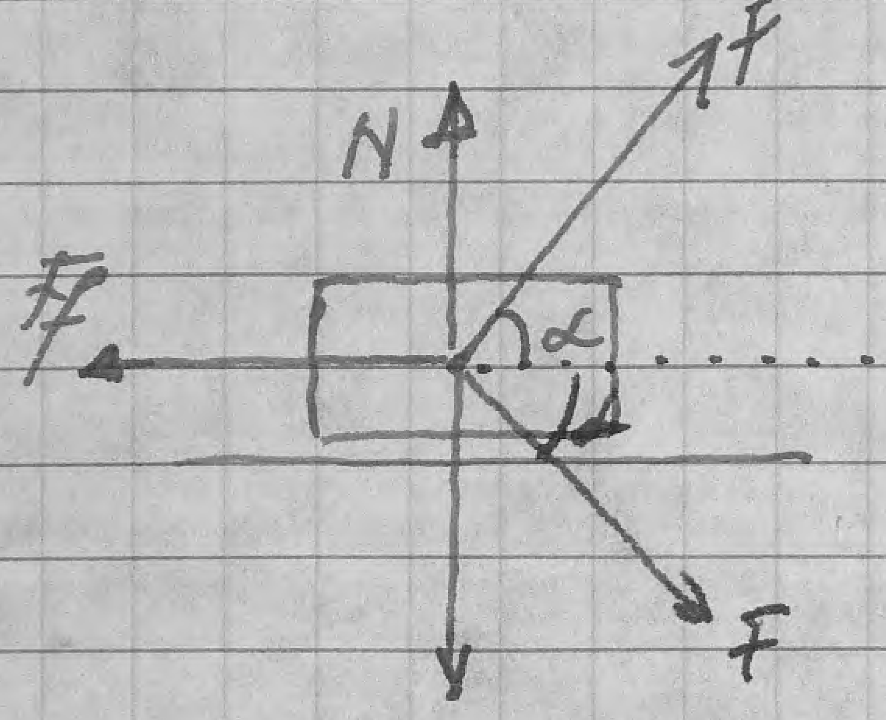
$t_{min} = \frac{v_0}{\mu g}$

89

H.1.3.106

$m = 100\,kg \quad F = 400\,N \quad \alpha = 30 \quad \varphi = 15^\circ$

$\alpha = ?$



$\vec{F_a} = \vec{G} + \vec{F} + \vec{F_f} + \vec{N}$

$Ox: \quad ma = F\cos\alpha - \mu N$

$Oy: \quad 0 = -mg \pm F\sin\alpha + N$

$N = mg \mp F\sin\alpha$

$ma = F\cos\alpha - \mu mg \pm \mu F\sin\alpha$

$a = \frac{F}{m}(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha) - \mu g$

$$\boxed{a = \frac{F}{m\cos\varphi}\cos(\alpha \mp \varphi) - g\,tg\,\varphi}$$

$a_{max} = \frac{F}{m\cos\varphi} - g\,tg\,\varphi \quad$ pentru $\alpha = \pm\varphi$

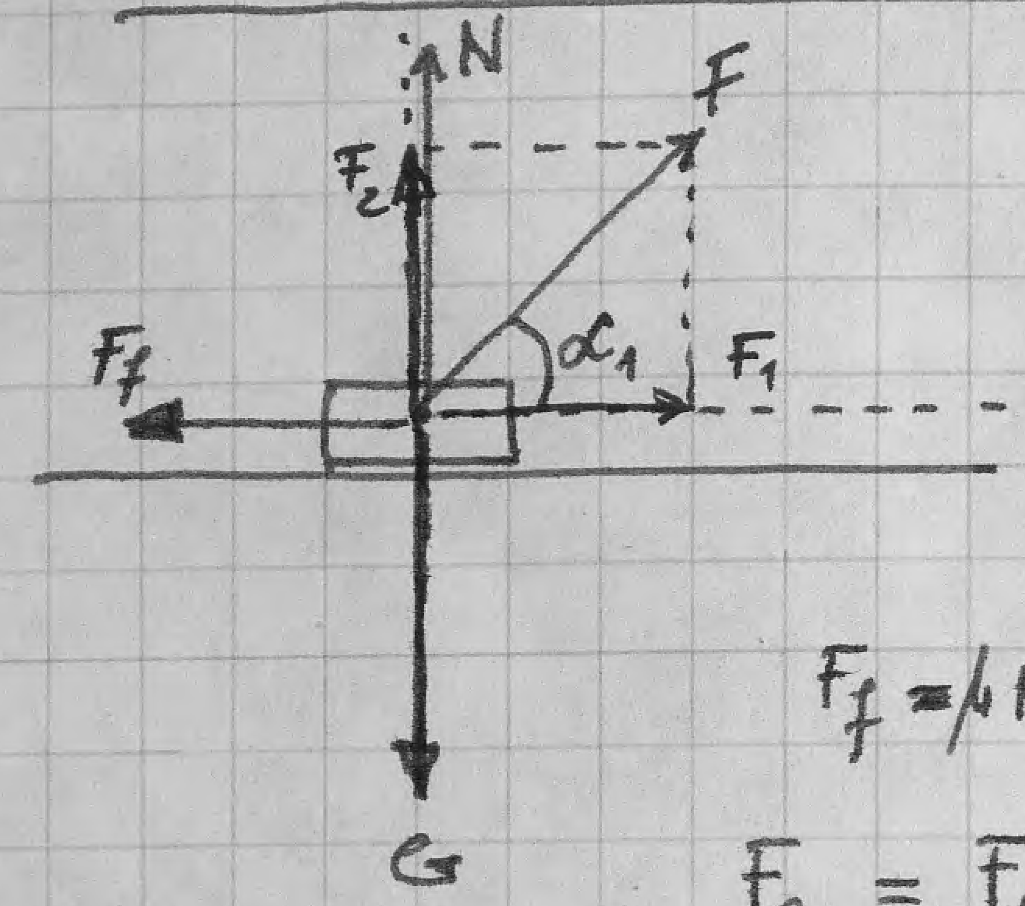
4

90

H.1.3.107

$m = 20\,kg \; ; \; F = 120\,N \; ; \; \alpha_1 = 60^\circ ; \quad a_1 = 0$

$\alpha_2 = 30^\circ \; ; \; a = ?$



$F_1 = F\cos\alpha_1$

$F_2 = F\sin\alpha_1$

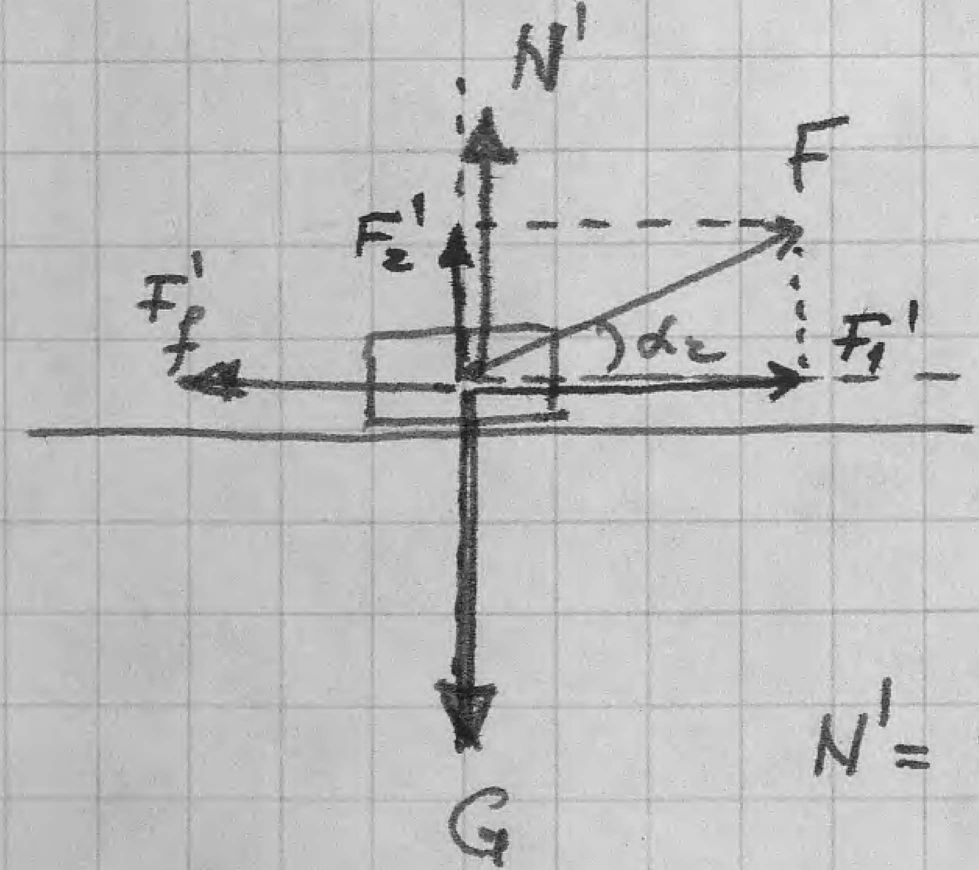
$N = mg - F_2$

$F_f = \mu N = \mu(mg - F\sin\alpha_1)$

$F_{a_1} = F_1 - F_f \qquad$ Când $a_1 = 0$

$F_f = F\cos\alpha_1$

$\mu(mg - F\sin\alpha_1) = F\cos\alpha_1 \qquad \boxed{\mu = \frac{F\cos\alpha_1}{mg - F\sin\alpha_1}}$



$F_1' = F\cos\alpha_2$

$F_2' = F\sin\alpha_2$

$N' = mg - F_2'$

$N' = mg - F\sin\alpha_2$

$F_a = F_1' - F_f' \; ; \quad ma = F\cos\alpha_2 - \mu(mg - F\sin\alpha_2)$

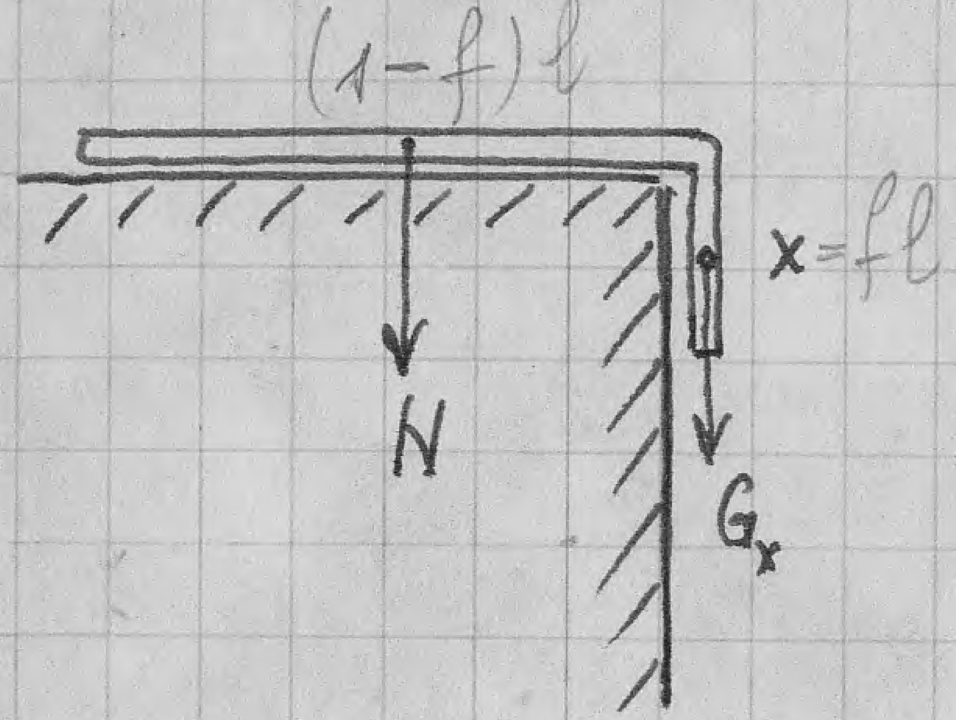
$ma = F\cos\alpha_2 - \mu mg + \mu F\sin\alpha_2$

$ma = F(\cos\alpha_2 + \mu\sin\alpha_2) - \mu mg$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}(\cos\alpha_2 + \mu\sin\alpha_2) - \mu g}$$

H. 1.3. 110

$f = 0{,}2 \quad ; \quad l$



$x = fl$

$N = (1-f)mg$

$G_x = \frac{x}{l} mg = \frac{fl}{l} mg$

$G_x = f mg.$

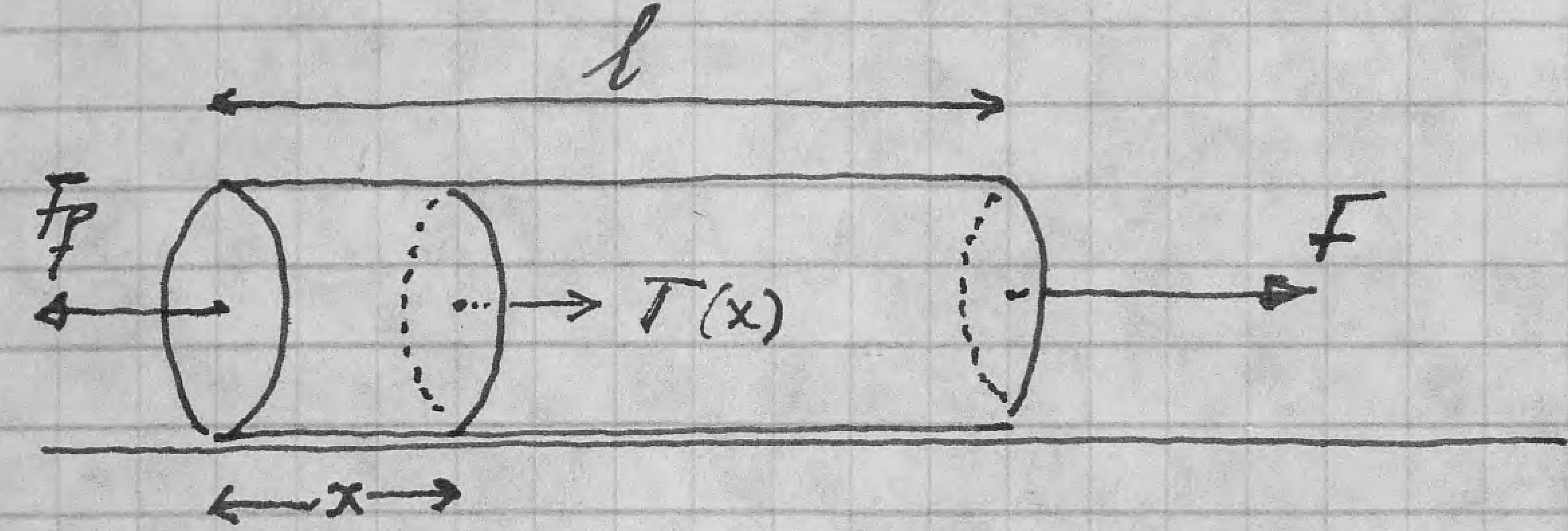
Alunecarea începe când:

$F_f = G_x \quad ; \quad \mu N = f mg$

$\mu(1-f)mg = fmg \qquad \boxed{\mu = \frac{f}{1-f}}$

H. 1.3. 112

l, μ, F



$F_a = F - F_f \qquad F = F_f + F_a \qquad F_f = \mu mg \qquad F_a = ma$

Dar F este tensiunea din secțiunea reprezentată de extremitatea dreaptă a cilindrului.

Tensiunea $T(x)$ în secțiunea aflată la distanța x de extremitatea stângă, cilindrul fiind omogen, va fi:

$T(x) = F_f(x) + F_a(x)$ cu

$F_f(x) = \mu m_x g \quad ; \quad F_a(x) = m_x a_x$

$m_x = \frac{x}{l} m \quad ; \quad a_x = a$ Deci

$F_f(x) = \mu \frac{x}{l} mg \quad ; \quad F_a(x) = \frac{x}{l} ma$

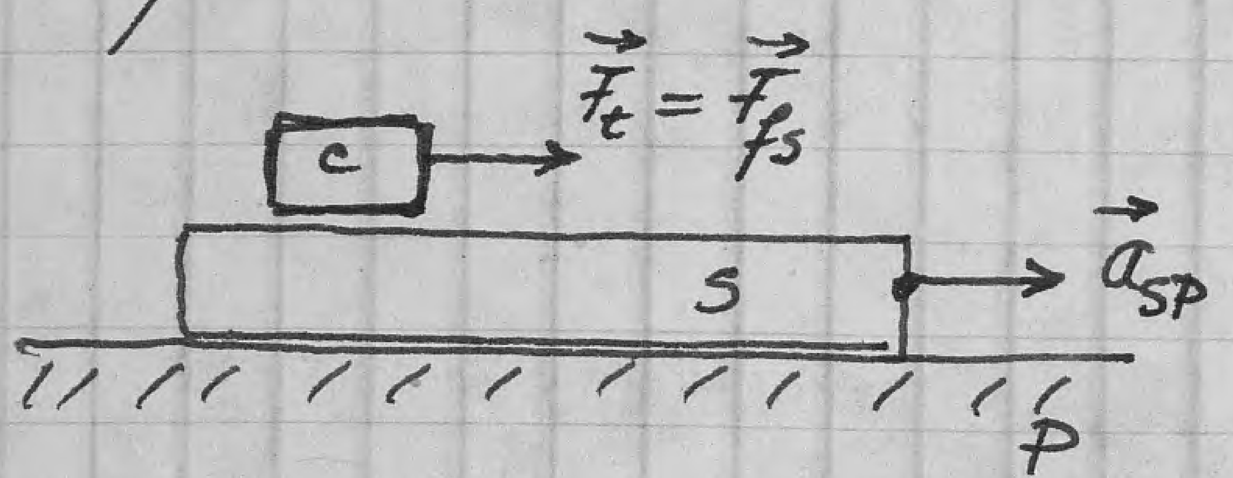
$F_f(x) = \frac{x}{l} F_f \quad ; \quad F_a(x) = \frac{x}{l} F_a$ Așadar:

$T(x) = \frac{x}{l} F_f + \frac{x}{l} F_a = \frac{x}{l}(F_f + F_a) = \frac{x}{l} F$

$$\boxed{T(x) = \frac{Fx}{l}}$$

H.1.3.113

$\mu = 0{,}2 \qquad a_s = ? \qquad a_{cs} \neq 0$



Forța de tracțiune a corpului, în timpul mișcării scândurii, este frecarea statică $\vec{F}_{fs}$ dintre corp și scândură, care are ca valoare maximă frecarea dinamică $F_f = \mu m g$ unde m este masa corpului.

$$\vec{a}_{cp} = \frac{\vec{F}_{fs}}{m} \leq \frac{\vec{F}_f}{m}$$

$$a_{cp} \leq \frac{\mu m g}{m} = \mu g \qquad \boxed{a_{cp} \leq \mu g}$$

Alunecarea corpului pe scândură se produce pentru $a_{sp} > a_{cp\,max} = \mu g$

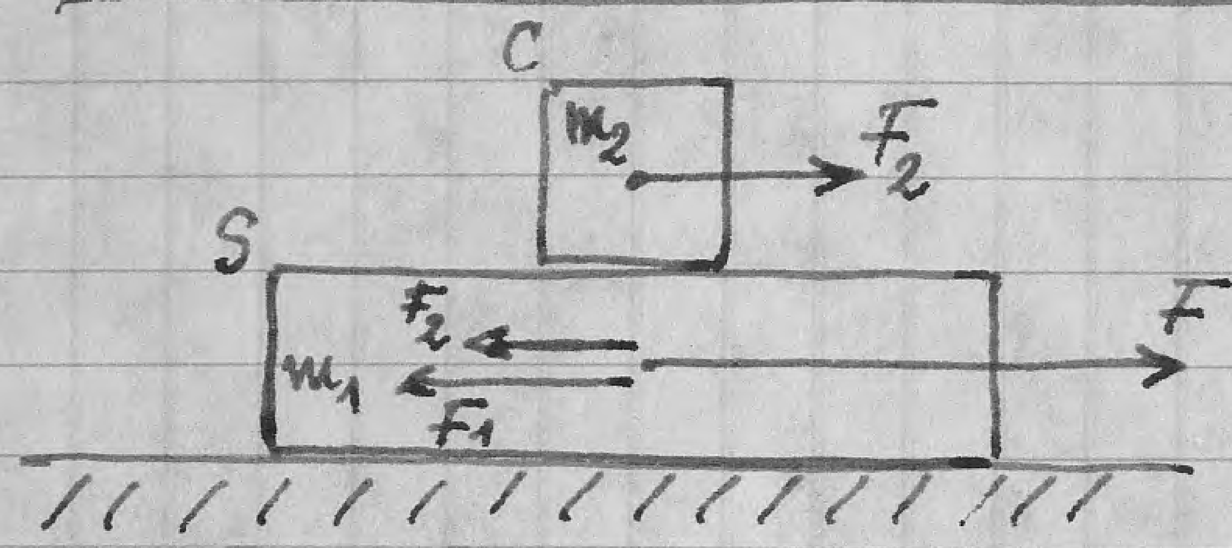
Deci

$$\boxed{a_{sp} > \mu g}$$

H.1.3.115

$m_1 = 1\,kg;\ \mu_1 = 0{,}3;\ m_2 = 2\,kg;\ \mu_2 = 0{,}2$

$F_{min} = ?$



F_2 frecare statică

$$F_{2\,max} = F_{2\,dinamică} = \mu_2 m_2 g$$

$$a_{max.c} = \frac{F_{2\,max}}{m_2} = \mu_2 g$$. Când corpul alunecă

$$a_s = \frac{F - F_1 - F_{2\,max}}{m_1} = \frac{F - \mu_1 g(m_1+m_2) - \mu_2 g m_2}{m_1}$$

Condiția de alunecare: $a_s > a_{max.c}$ dă

$$\frac{F - \mu_1 g(m_1+m_2) - \mu_2 m_2 g}{m_1} > \mu_2 g$$

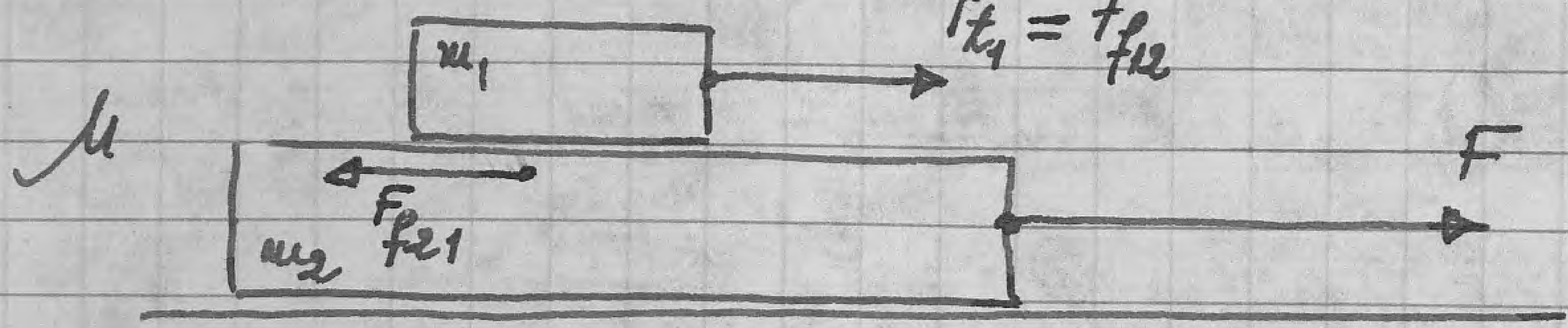
$$F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2) g$$

$$\boxed{F_{min} = (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2) g}$$

H. 1.3.116

$m_1 = 1\,kg$; $m_2 = 4\,kg$; $\mu = 0{,}2$; $F = ct$; $c = 5\,N/s$

$a_1 = ?$; $a_2 = ?$



$$F_{f12} = F_{f21}$$

Cît timp corpul (1) nu alunecă pe (2):

$$a_1 = a_2 = a$$

Pentru corpul (1):

$F_{a_1} = F_{t_1}$; $m_1 a_1 = F_{t_1}$; dar $F_{t_1} = F_{f12s} \le F_{f12} = \mu m_1 g$
statică

$m_1 a_1 \le \mu m_1 g$; $\boxed{a_1 \le \mu g}$

Pentru sistemul celor două corpuri:

$F_a = F$; $(m_1 + m_2) a = c t$; $\boxed{a = \dfrac{ct}{m_1 + m_2}}$

unde: $a \le \mu g$ deci

$\dfrac{ct}{m_1 + m_2} \le \mu g$; $\boxed{t \le \dfrac{\mu g (m_1 + m_2)}{c}}$

Corpul (1) alunecă pe (2) dacă $a_2 > a_{1max} = \mu g$.

adică $\boxed{a_2 > \mu g}$

În acest caz, pentru corpul (2):

$m_2 a_2 = F - F_{f21}$; $\boxed{a_2 = \dfrac{ct - \mu m_1 g}{m_2}}$ unde $a_2 > \mu g$

ne dă:

$$\frac{ct-\mu m_1 g}{m_2} > \mu g \; ; \quad \boxed{t > \frac{\mu g(m_1+m_2)}{c}}$$

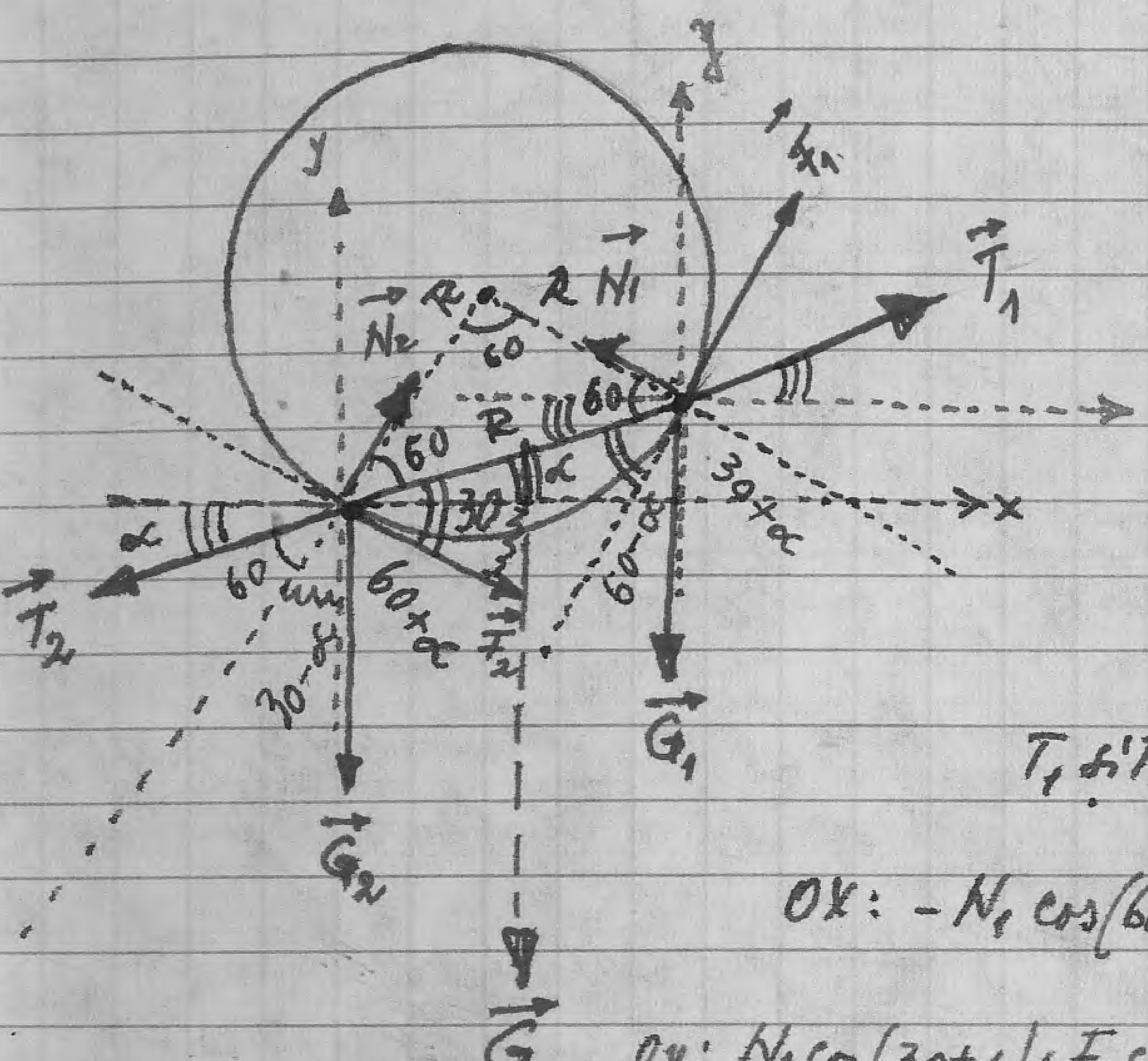
Așadar, până la momentul $t = \frac{\mu g(m_1+m_2)}{c}$

avem $$a_1 = a_2 = \frac{ct}{m_1+m_2}$$

După acest moment avem

$$a_1 = \mu g \quad \text{și} \quad a_2 = \frac{ct-\mu m_1 g}{m_2}$$

H. 1.3.118



$G_1 = G_2 = \frac{G}{2}$

$T_1 = T_2 = T$

$\vec{N}_1 + \vec{F}_1 + \vec{T}_1 + \vec{G}_1 = 0$

$\vec{N}_2 + \vec{F}_2 + \vec{G}_2 + \vec{T}_2 = 0$

F_1, F_2 forțe de frecare;

T_1 și T_2 tensiunea în bară.

$Ox: \; -N_1\cos(60-\alpha) + F_1\cos(30+\alpha) + T_1\cos\alpha = 0$

$Oy: \; N_1\cos(30+\alpha) + F_1\cos(60-\alpha) + T_1\cos(90-\alpha) - G_1 = 0$

$Ox: \; N_2\cos(60+\alpha) + F_2\cos(30-\alpha) - T_2\cos\alpha = 0$

$Oy: \; N_2\cos(30-\alpha) - F_2\cos(60+\alpha) - G_2 - T_2\cos(90-\alpha) = 0$

$$\begin{cases} -N_1\sin(30+\alpha) + \mu N_1\cos(30+\alpha) + T\cos\alpha = 0 \\ N_1\cos(30+\alpha) + \mu N_1\sin(30+\alpha) + T\sin\alpha - \frac{G}{2} = 0 \\ N_2\sin(30-\alpha) + \mu N_2\cos(30-\alpha) - T\cos\alpha = 0 \\ N_2\cos(30-\alpha) - \mu N_2\sin(30-\alpha) - \frac{G}{2} - T\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1[\mu\cos(30+\alpha) - \sin(30+\alpha)] = -T\cos\alpha & (1) \\ N_1[\cos(30+\alpha) + \mu\sin(30+\alpha)] = \frac{G}{2} - T\sin\alpha & (2) \\ N_2[\mu\cos(30-\alpha) + \sin(30-\alpha)] = T\cos\alpha & (3) \\ N_2[\cos(30-\alpha) - \mu\sin(30-\alpha)] = \frac{G}{2} + T\sin\alpha & (4) \end{cases}$$

Raportăm a doua la prima și a patra la a treia:

$$\begin{cases} \dfrac{\cos(30+\alpha)+\mu\sin(30+\alpha)}{\mu\cos(30+\alpha)-\sin(30+\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{G}{2}\cdot\dfrac{1}{T\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{\cos(30-\alpha)-\mu\sin(30-\alpha)}{\mu\cos(30-\alpha)+\sin(30-\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{G}{2}\,\dfrac{1}{T\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{G}{2}\,\dfrac{1}{T\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \dfrac{\mu\sin(30+\alpha)+\cos(30+\alpha)}{\mu\cos(30+\alpha)-\sin(30+\alpha)} \\[2ex] \dfrac{G}{2}\cdot\dfrac{1}{T\cos\alpha} = \dfrac{\cos(30-\alpha)-\mu\sin(30-\alpha)}{\sin(30-\alpha)+\mu\cos(30-\alpha)} - \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos(30-\alpha)-\mu\sin(30-\alpha)}{\sin(30-\alpha)+\mu\cos(30-\alpha)} + \frac{\mu\sin(30+\alpha)+\cos(30+\alpha)}{\mu\cos(30+\alpha)-\sin(30+\alpha)}$$

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos 30\cos\alpha+\sin 30\sin\alpha-\mu\sin 30\cos\alpha+\mu\cos 30\sin\alpha}{\sin 30\cos\alpha-\cos 30\sin\alpha+\mu\cos 30\cos\alpha+\mu\sin 30\sin\alpha} +$$

$$+\frac{\mu\sin 30\cos\alpha+\mu\cos 30\sin\alpha+\cos 30\cos\alpha-\sin 30\sin\alpha}{\mu\cos 30\cos\alpha-\mu\sin 30\sin\alpha-\sin 30\cos\alpha-\cos 30\sin\alpha}$$

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{2}-\mu\frac{\cos\alpha}{2}+\mu\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha+\mu\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha+\mu\frac{\sin\alpha}{2}} +$$

$$+\frac{\mu\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\mu\sin\alpha+\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha-\frac{\sin\alpha}{2}}{\frac{\sqrt3}{2}\mu\cos\alpha-\mu\frac{\sin\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha}$$

$$2\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\sqrt3-\mu)\frac{\cos\alpha}{2}+(1+\sqrt3\mu)\frac{\sin\alpha}{2}}{(1+\sqrt3\mu)\frac{\cos\alpha}{2}+(\mu-\sqrt3)\frac{\sin\alpha}{2}} +$$

$$+\frac{(\mu+\sqrt3)\frac{\cos\alpha}{2}+(\sqrt3\mu-1)\frac{\sin\alpha}{2}}{(\sqrt3\mu-1)\frac{\cos\alpha}{2}-(\sqrt3+\mu)\frac{\sin\alpha}{2}}$$

Din (1)

$$T = \frac{N_1}{\cos\alpha}\left[\sin(30+\alpha)-\mu\cos(30+\alpha)\right]$$

dusă în (2):

$$N_1\left[\cos(30+\alpha)+\mu\sin(30+\alpha)\right] = \frac{G}{2} - \sin\alpha\,\frac{N_1}{\cos\alpha}\left[\sin(30+\alpha)-\mu\cos(30+\alpha)\right]$$

$$N_1\left[\cos\alpha\cos(30+\alpha)+\mu\cos\alpha\sin(30+\alpha)\right] = \frac{G}{2}\cos\alpha - N_1\left[\sin\alpha\sin(30+\alpha) - \right.$$

$$\left. - \mu\sin\alpha\cos(30+\alpha)\right]$$

$$N_1\left[\cos\alpha\cos(30+\alpha)+\sin\alpha\sin(30+\alpha)+\mu\left[\cos\alpha\sin(30+\alpha)-\sin\alpha\cos(30+\alpha)\right]\right] =$$

$$= \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$N_1\left[\cos(\alpha-30-\alpha)+\mu\left(\sin 30+\alpha-\alpha\right)\right] = \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$N_1\left[\cos 30+\mu\sin 30\right] = \frac{G}{2}\cos\alpha$$

$$N_1 = \frac{G\cos\alpha}{2(\cos 30+\mu\sin 30)} = \frac{G\cos\alpha}{2\left(\frac{\sqrt3}{2}+\mu\cdot\frac12\right)} = \frac{G\cos\alpha}{\sqrt3+\mu}$$

$$\boxed{N_1 = \frac{G\cos\alpha}{\sqrt3+\mu}}$$ Acum:

$$T = \frac{G\cos\alpha}{\sqrt3+\mu}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\left[\sin 30\cos\alpha+\cos 30\sin\alpha-\mu\cos 30\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\mu\sin 30\sin\alpha\right] = \frac{G}{\sqrt3+\mu}\left[\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt3}{2}\mu\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\mu\frac{\sin\alpha}{2}\right] = \frac{G}{\sqrt3+\mu}\left[(1-\sqrt3\mu)\frac{\cos\alpha}{2}+(\sqrt3+\mu)\frac{\sin\alpha}{2}\right]$$

$$\boxed{T = \frac{G}{\sqrt3+\mu}\cdot\frac12\left[(1-\sqrt3\mu)\cos\alpha+(\sqrt3+\mu)\sin\alpha\right]} \quad (5)$$

Din ec. (3):

$$N_2 = \frac{T\cos\alpha}{\mu\cos(30-\alpha)+\sin(30-\alpha)} = \frac{T\cos\alpha}{\mu(\cos 30\cos\alpha+\sin 30\sin\alpha)+\sin 30\cos\alpha-\cos 30\sin\alpha}$$

$$N_2 = \frac{T\cos\alpha}{\mu\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha+\mu\frac{\sin\alpha}{2}+\frac{\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\sin\alpha}$$

$$N_2 = \frac{T\cos\alpha}{(\sqrt3\mu+1)\frac{\cos\alpha}{2}+(\mu-\sqrt3)\frac{\sin\alpha}{2}}$$

$$N_2 = \frac{2T\cos\alpha}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}$$ care intră în (4):

$$\frac{2T\cos\alpha}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}\cdot\left[\cos 30\cos\alpha+\sin 30\sin\alpha-\mu\sin 30\cos\alpha+\mu\cos 30\sin\alpha\right]=\frac{G}{2}+T\sin\alpha$$

$$\frac{2T\cos\alpha}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}\left[\frac{\sqrt3}{2}\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{2}-\mu\frac{\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\mu\sin\alpha\right]=$$

$$=\frac{G}{2}+T\sin\alpha$$

$$\frac{2T\cos\alpha\left[(\sqrt3-\mu)\frac{\cos\alpha}{2}+(1+\sqrt3\mu)\frac{\sin\alpha}{2}\right]}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}=\frac{G}{2}+T\sin\alpha$$

$$\frac{T\cos\alpha\left[(\sqrt3-\mu)\cos\alpha+(1+\sqrt3\mu)\sin\alpha\right]}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}=\frac{G}{2}+T\sin\alpha$$

$$T\left[\frac{\cos\alpha\left[(\sqrt3-\mu)\cos\alpha+(1+\sqrt3\mu)\sin\alpha\right]}{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}-\sin\alpha\right]=\frac{G}{2}$$

$$T=\frac{G}{2}\,\frac{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}{\cos^2\alpha\cdot(\sqrt3-\mu)+(1+\sqrt3\mu)\sin\alpha\cos\alpha-(\sqrt3\mu+1)\sin\alpha\cos\alpha-(\mu-\sqrt3)\sin^2\alpha}$$

$$T=\frac{G}{2}\,\frac{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}{(\sqrt3-\mu)\cos^2\alpha-(\mu-\sqrt3)\sin^2\alpha}=\frac{G}{2}\cdot\frac{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}{(\sqrt3-\mu)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}$$

$$\boxed{T=\frac{G}{2}\,\frac{(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha}{\sqrt3-\mu}}\quad(6)$$

Egalând T dat de (5) și (6):

$$\frac{1}{2}\frac{G}{\sqrt3+\mu}\left[(1-\sqrt3\mu)\cos\alpha+(\sqrt3+\mu)\sin\alpha\right]=\frac{G}{2(\sqrt3-\mu)}\left[(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha\right]$$

$$(\sqrt3-\mu)\left[(1-\sqrt3\mu)\cos\alpha+(\sqrt3+\mu)\sin\alpha\right]=$$

$$=(\sqrt3+\mu)\left[(\sqrt3\mu+1)\cos\alpha+(\mu-\sqrt3)\sin\alpha\right];$$

$$(\sqrt3-3\mu-\mu+\sqrt3\mu^2)\cos\alpha+(3+\sqrt3\mu-\sqrt3\mu-\mu^2)\sin\alpha=$$

$$=(3\mu+\sqrt3+\sqrt3\mu^2+\mu)\cos\alpha+(\sqrt3\mu-3+\mu^2-\sqrt3\mu)\sin\alpha;$$

$$(\sqrt3-4\mu+\sqrt3\mu^2)\cos\alpha-(\sqrt3+4\mu+\sqrt3\mu^2)\cos\alpha=$$

$$=(\mu^2-3)\sin\alpha-(3-\mu^2)\sin\alpha$$

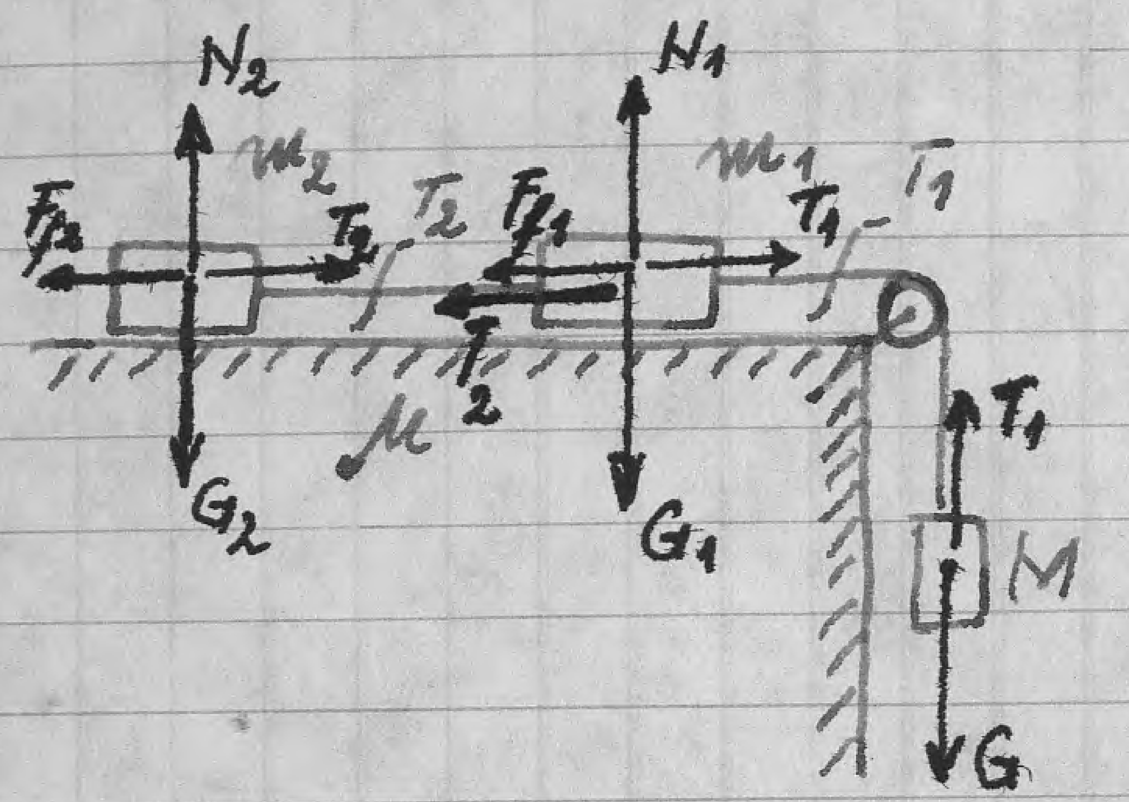
$$(\sqrt3-4\mu+\sqrt3\mu^2-\sqrt3-4\mu-\sqrt3\mu^2)\cos\alpha=$$

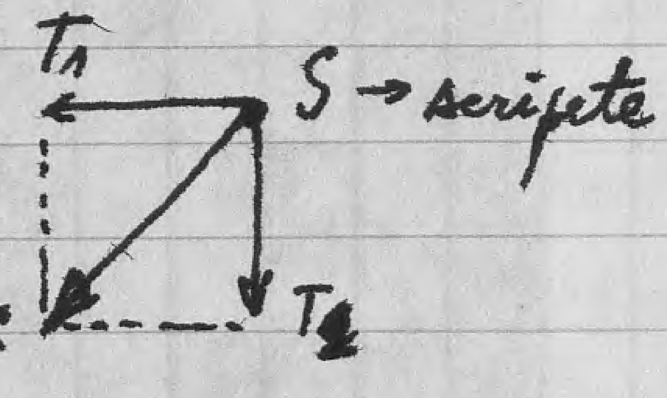
$$=(\mu^2-3-3+\mu^2)\sin\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-8\mu}{2\mu^2-6}\ ;\quad\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{4\mu}{3-\mu^2}}$$

H.1.3.120

$m_1 = 5\,kg;\ m_2 = 3\,kg;\ M = 2\,kg;\ \mu = 0,2;\ a = ?;\ T_1 = ?;\ T_2 = ?$





F – forța de apăsare asupra scripetelui

$$a = \frac{G - F_{f1} - F_{f2}}{M + m_1 + m_2} = \frac{Mg - \mu m_1 g - \mu m_2 g}{M + m_1 + m_2}$$

$$\boxed{a = \frac{M - \mu(m_1 + m_2)}{M + m_1 + m_2}\,g}$$

$G - T_1 = Ma;\ T_1 = G - Ma = M(g - a)$

$$\boxed{T_1 = gM\left(1 - \frac{M - \mu(m_1 + m_2)}{M + m_1 + m_2}\right) = Mg\,\frac{(m_1 + m_2)(1 + \mu)}{M + m_1 + m_2}}$$

$T_2 - F_{f2} = m_2 a;\ T_2 = m_2 a + \mu m_2 g$

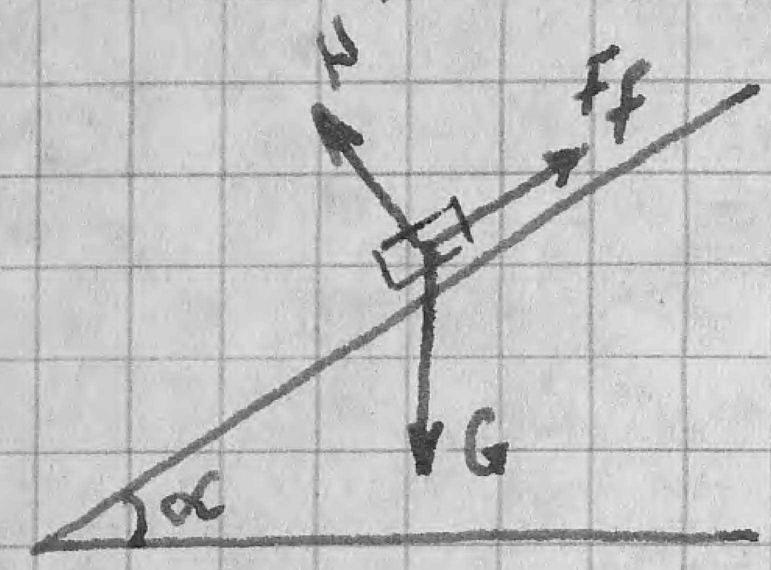
$$T_2 = m_2 g\left(\frac{M - \mu(m_1 + m_2)}{M + m_1 + m_2} + \mu\right)$$

$$\boxed{T_2 = m_2 g\,\frac{M(1 + \mu)}{M + m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{F = T_1\sqrt{2}}$$

H.1.3.123

$\alpha = 45^\circ;\ d = 0,36\,m;\ v = 2\,m/s;\ \mu = ?$



$F_a = G_t - F_f$

$m \cdot a = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$

$a = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$

$v^2 = 2ad$

$a = \frac{v^2}{2d}$

$\frac{v^2}{2d} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$

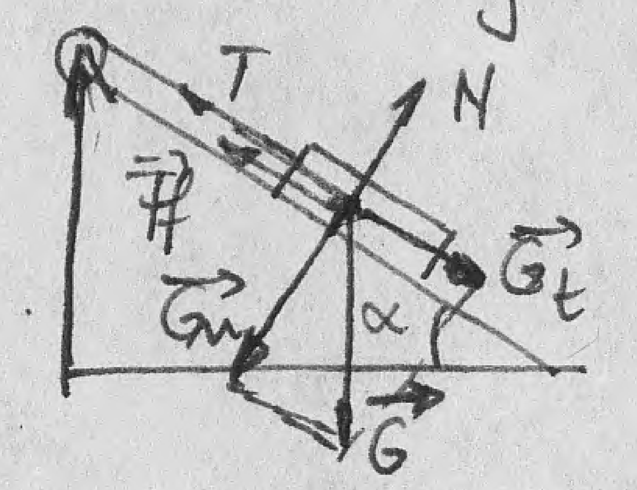
$$\mu = \frac{2dg\sin\alpha - v^2}{2dg\cos\alpha}$$

$$\boxed{\mu = tg\,\alpha - \frac{v^2}{2dg\cos\alpha}}$$

1.3.130 (Soluție, Văideanu Geanina, XA Gavrilescu Alexandru, XIIA)

Deoarece mișcarea este uniformă avem: $mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha + T$

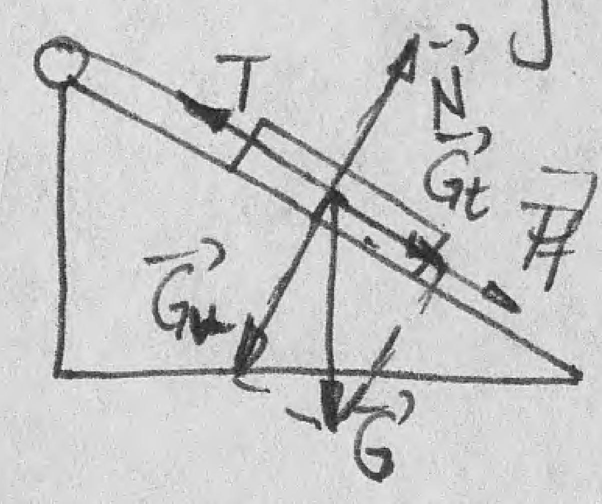
$$T = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$



La urcare uniformă avem:

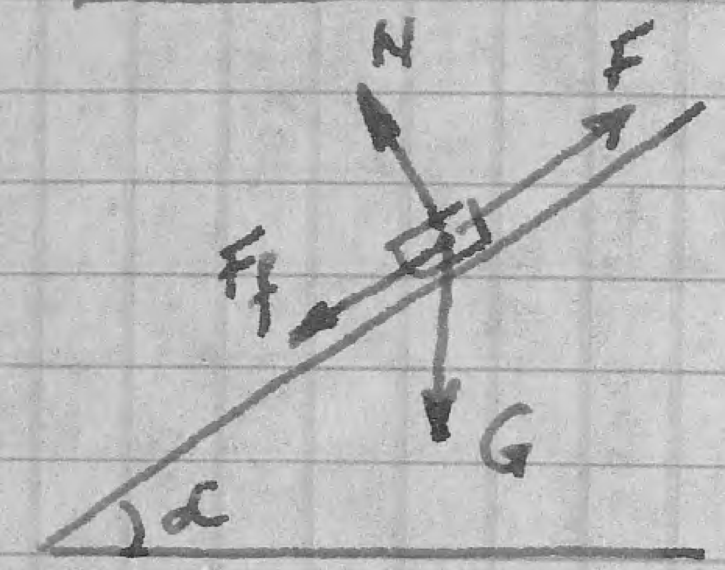
$$mg\sin\alpha + F_f = T$$

$$T = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$



H. 1.3.131

$m = 120\,kg;\ \alpha = 30^\circ;\ F = 60\,N;\ v = ct;\ a_c = ?$



$$F_{au} = F - F_f - G_t$$

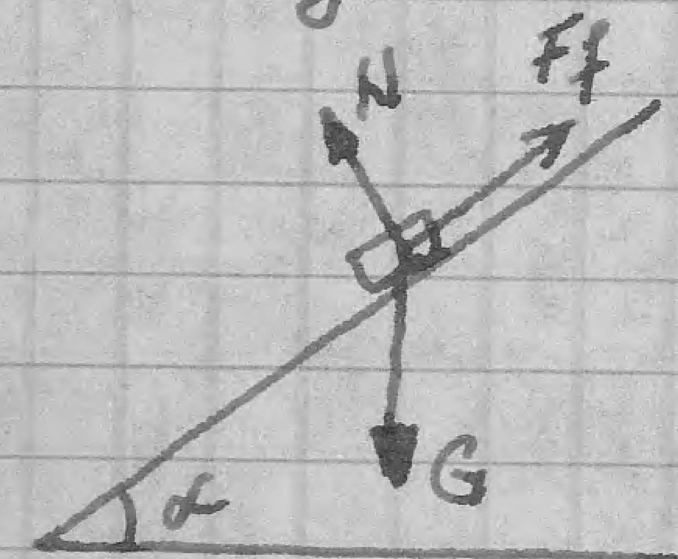
$$m a_u = F - \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

$$a_u = \frac{F}{m} - \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha$$

cu $a_u = 0$

$$\mu = \left(\frac{F}{m} - g\sin\alpha\right)\frac{1}{g\cos\alpha}$$

$$\mu = \frac{F}{mg\cos\alpha} - tg\,\alpha$$



$$F_{a_c} = G_t - F_f$$

$$m a_c = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$a_c = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

$$a_c = g\sin\alpha - g\cos\alpha\left(\frac{F}{mg\cos\alpha} - tg\,\alpha\right) =$$

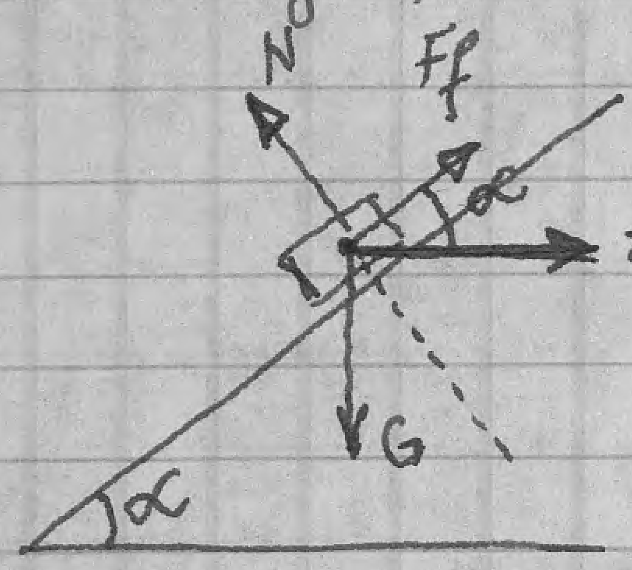
$$= g\sin\alpha - \frac{F}{m} + g\sin\alpha = -\frac{F}{m} + 2g\sin\alpha$$

$$\boxed{a_c = 2g\sin\alpha - \frac{F}{m}}$$

103

H.1.3.135

$m = 1\,kg$; $\alpha = 30^\circ$; $\varphi = 11^\circ 20'$



$F\cos\alpha + \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) \geq mg\sin\alpha$

$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \geq mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$

$$F \geq \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\, mg$$

$$F_{min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\, mg = \frac{\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}\, mg$$

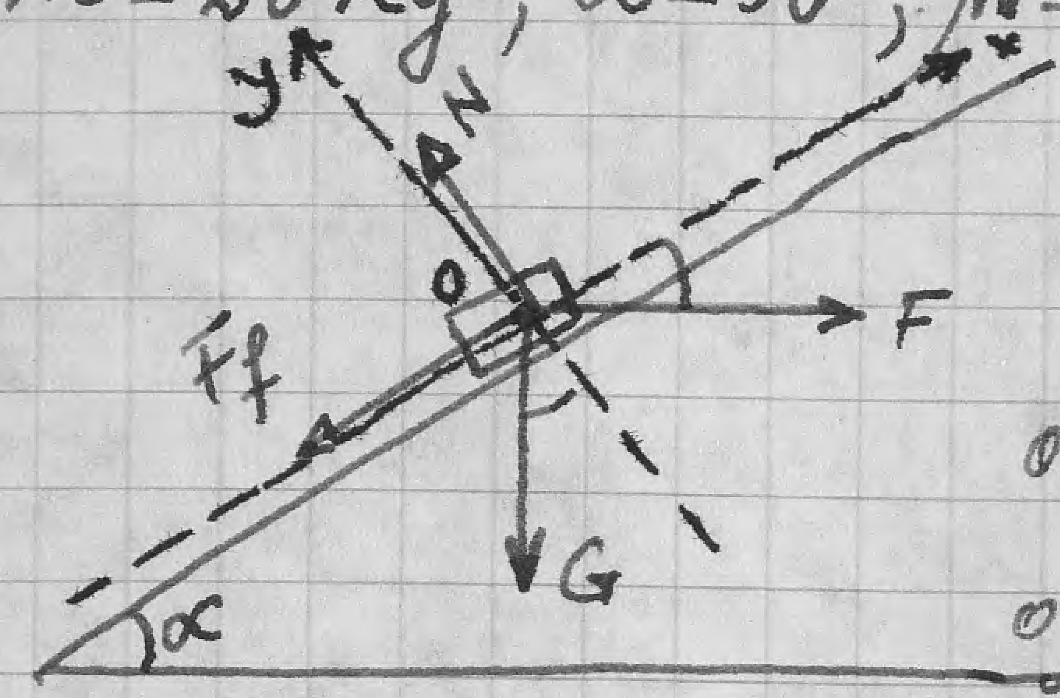
$$F_{min} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)}\, mg = mg\, tg\,(\alpha - \varphi)$$

$$\boxed{F_{min} = mg\, tg\,(\alpha - \varphi)}$$

104

H.1.3.137

$m = 20\,kg$; $\alpha = 30^\circ$; $\mu = 0{,}05$; $F = 500\,N$; $a = ?$



$\vec{F}_a = \vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_f + \vec{N}$

$Ox: \; ma = F_t - G_t - F_f$

$Oy: \; 0 = -F_n - G_n + N$

$$\begin{cases} ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N \\ N = +G_n + F_n \quad ; \quad N = +mg\cos\alpha + F\sin\alpha \end{cases}$$

$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - \mu F\sin\alpha$

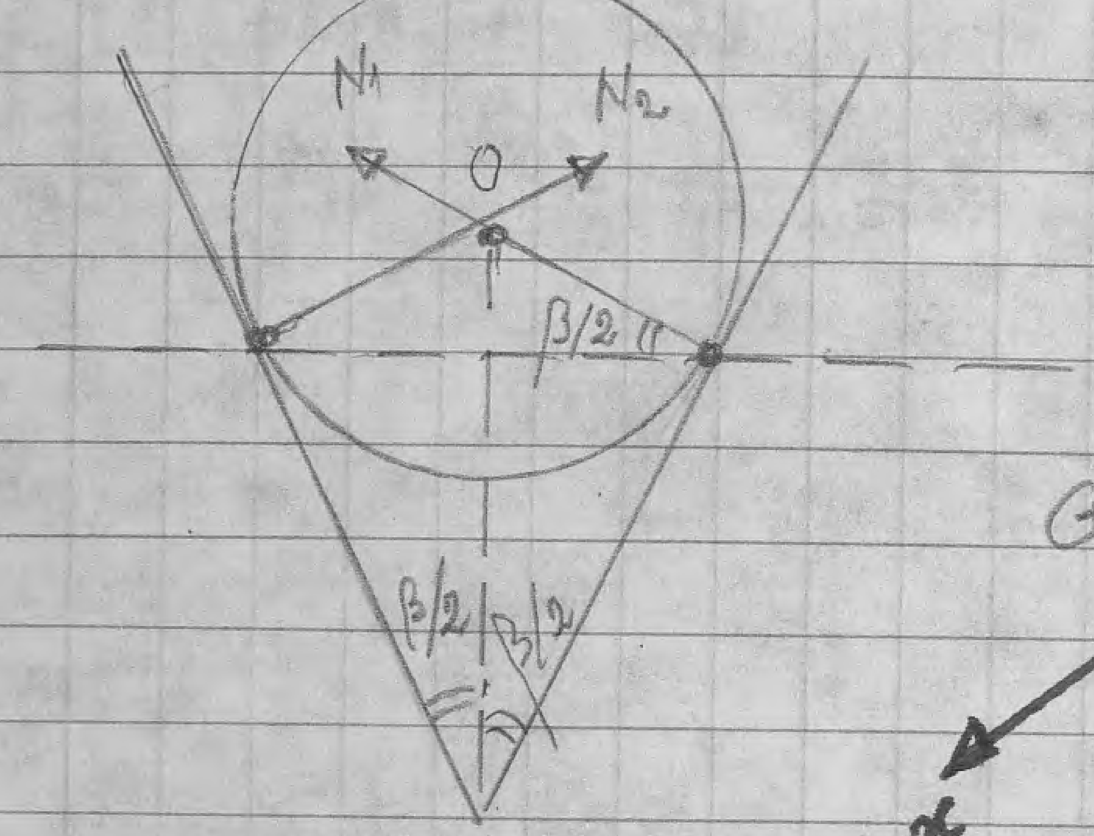
$ma = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

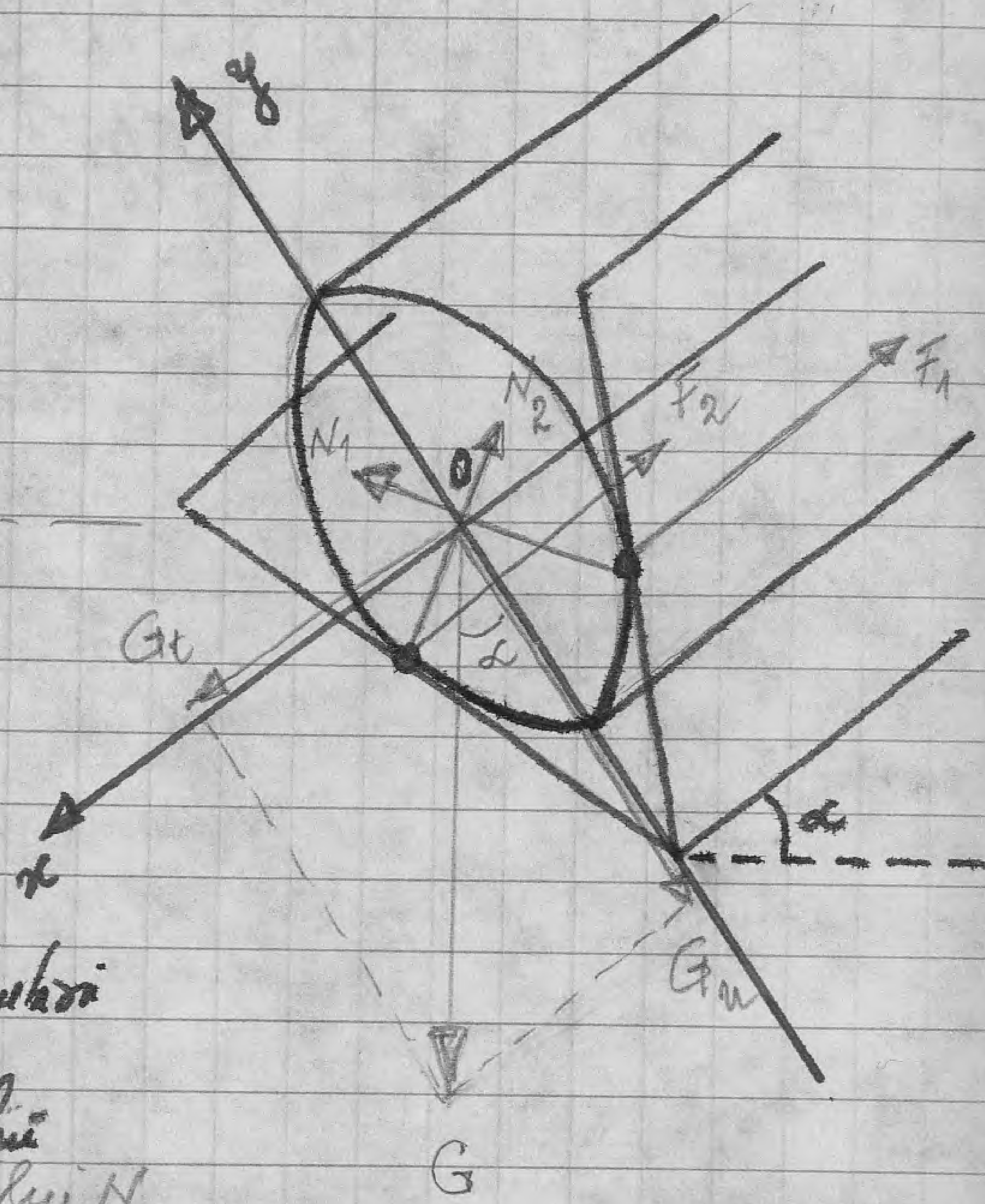
105

<u>H. 1.3.138</u>

$\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\mu = 0{,}2$; $a = ?$



Secțiune perpendiculară pe axul cilindrului
pentru calculul lui N.



~~Forțele~~ exterioare care acționează asupra cilindrului sunt: G; N_1; N_2; F_1; F_2 cu:

$N_1 = N_2 = N$

$F_1 = F_2 = \mu N$

$G_t = G \sin\alpha$; $G_n = G\cos\alpha$

Scriem ~~[illegible]~~ forța care accelerează cilindrul:

$\vec{F_a} = \vec{G} + \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{F_1} + \vec{F_2}$ Proiectăm relația:

$Ox: \; m a_x = G_t + 0 + 0 - F_1 - F_2$

$m a_x = mg\sin\alpha - 2\mu N$ (1)

$$Oy: \quad 0 = -G_n + N_1 \sin\frac{\beta}{2} + N_2 \sin\frac{\beta}{2} + 0 + 0$$

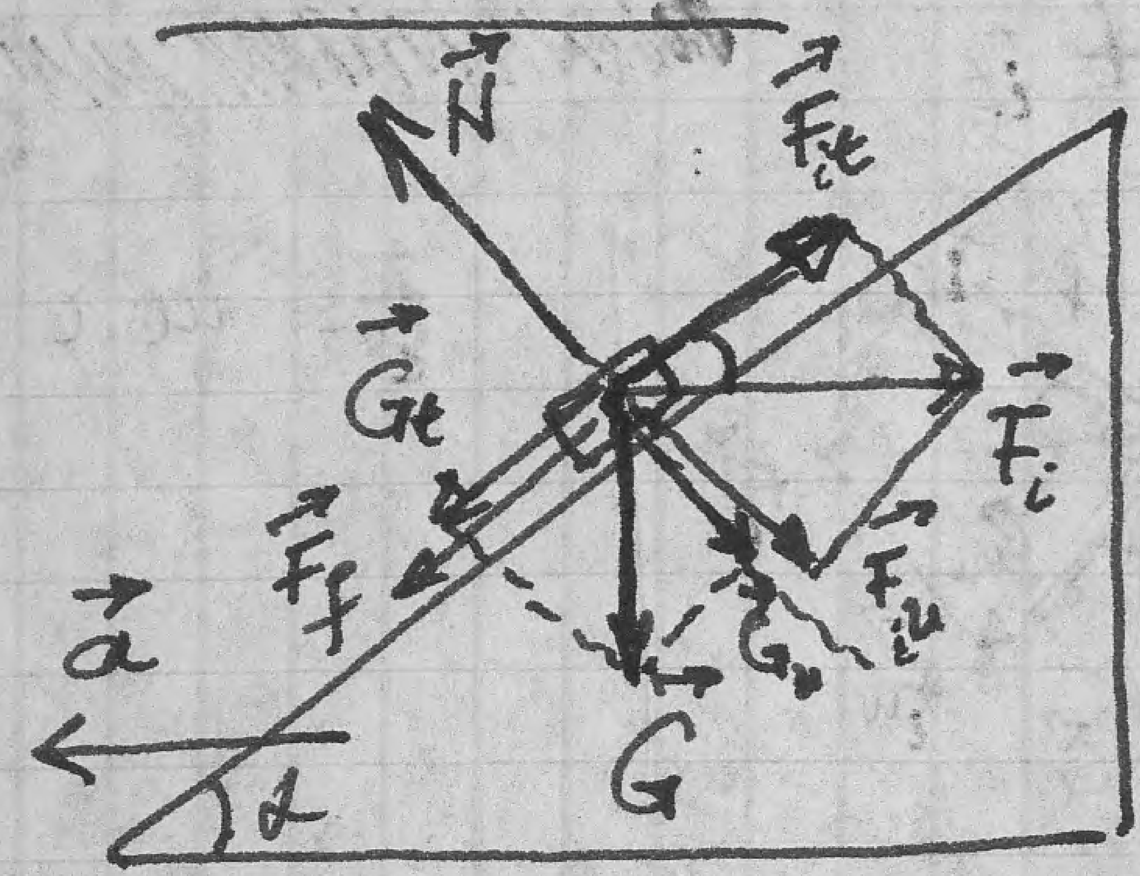
$$0 = -mg\cos\alpha + 2N\sin\frac{\beta}{2}$$

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}} \quad (2) \text{ dusă în } (1):$$

$$a_x = g\sin\alpha - 2\mu\frac{g\cos\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\boxed{a_x = g\left(\sin\alpha - \frac{\mu\cos\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}}\right)}$$

H. 1. 3. 140



Corpul nu „urcă" încă

$$G_t + F_f \geq F_{it}$$

$$mg\sin\alpha + \mu N \geq F_i\cos\alpha$$

$$N = F_{in} + G_n$$

$$N = F_i\sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha + \mu(F_i\sin\alpha + mg\cos\alpha) \geq F_i\cos\alpha$$

$$F_i = ma$$

$$F_i(\mu\sin\alpha - \cos\alpha) \geq -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$a \leq \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\, g$$

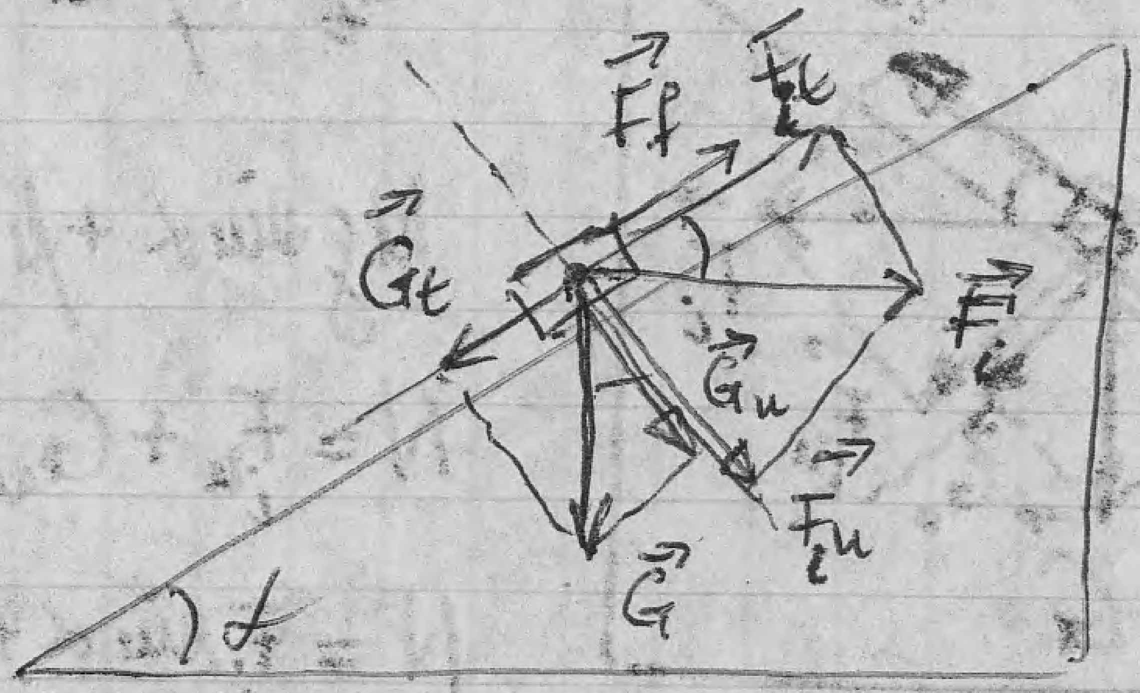
$$a \leq \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\, tg\,\alpha}\, g; \quad \text{dar } \mu = tg\,\varphi$$

$$a \leq \frac{tg\,\alpha + tg\,\varphi}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\varphi}\, g = g\, tg(\alpha + \varphi).$$

$$\boxed{a \leq g \cdot tg(\alpha + \varphi)}$$

Corpul nu coboară dacă

$G_t < F_f + F_{i_t}$ ~~[illegible]~~



$F_i = ma$

$mg\sin\alpha \le \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha) + ma\cos\alpha$

$-(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)a \le (\mu\cos\alpha - \sin\alpha)g$

$$a \ge \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}\, g$$

$$a \ge \frac{tg\alpha - tg\varphi}{1 + tg\alpha\, tg\varphi}\, g \; ; \; a \ge g\, tg(\alpha - \varphi)$$

Așadar, pentru

$$g\, tg(\alpha - \varphi) \le a \le g\, tg(\alpha + \varphi)$$

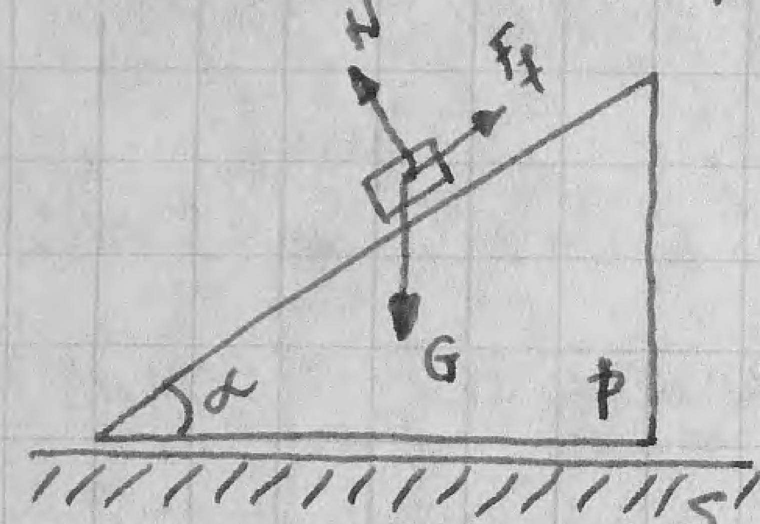
corpul stă în repaus pe plan.

107 Prezentă soluție identică cu prima!

H. 1.3.140

$\alpha = 45$; $\varphi = 6^\circ$; $a_1 = ?$; $a_2 = ?$; $(a_1 < a < a_2) \Rightarrow a_{cp} = 0$

Notații: c-corp; p-plan; s-suport (imobil); $a_{ps} = a$.



Presupunînd planul p imobil față de suportul s, pentru $\alpha > \varphi$ (φ unghiul de frecare), corpul coboară cu accelerația a_{cp} constantă și paralelă la plan.

$F_{a_{cp}} = G_t - F_f$ (1)

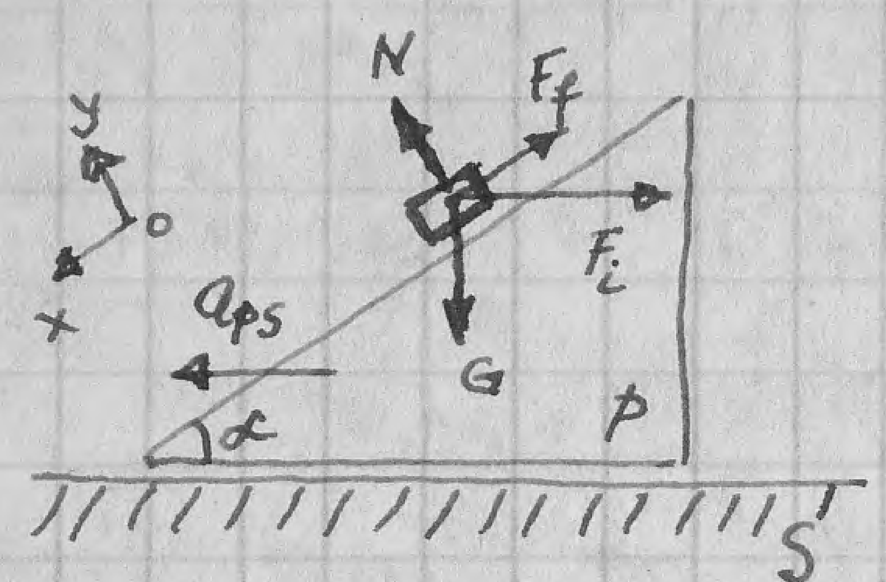
cu $G_t > F_f$

Accelerarea $\vec{a}_{ps} = \vec{a}$ a planului p față de suportul s echivalează cu aplicarea asupra corpului a unei forțe suplimentare $\vec{F}_i$ (forța de inerție) de direcția lui $\vec{a}_{ps}$ și de sens opus ei, avînd

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{ps} \quad (2)$$

Considerînd pentru a_{ps} valori crescătoare, începînd cu zero, și F_i va lua asemenea valori.

Presupunînd F_i suficient de mică încît corpul să nu coboare, deci a_{ps} nu depășește o anumită limită a_1, avem situația din figură, care ne conduce la:



$$F_{a_{cp}} = G_t - \mu(G_n + F_{in}) - F_{it} \quad (3)$$

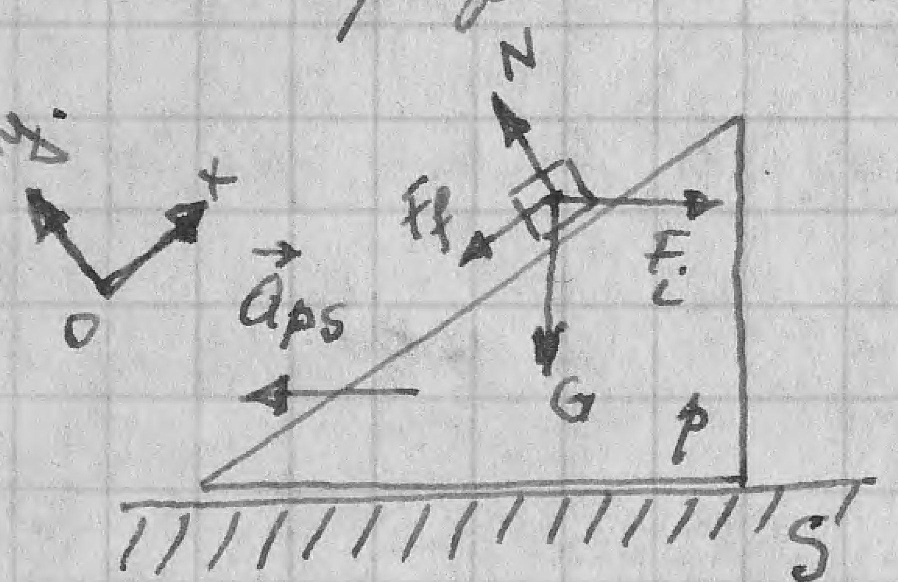
Dacă a_{ps} crește, crește F_i, adică F_{in} și F_{it}, rezultând scăderea lui $F_{a_{cp}}$, deci a lui a_{cp}.

Cea mai mare valoare a lui F_i, deci și a lui a_{ps}, pentru care corpul mai coboară este aceea pentru care $a_{cp}=0$, când coborârea este uniformă. Situația se realizează pentru $a_{ps}=a_1$, când (3) se scrie: $m\cdot 0 = mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + ma_1\sin\alpha) - ma_1\cos\alpha$

de unde: $a_1 = \dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}g = \dfrac{tg\alpha - tg\varphi}{1 + tg\alpha\, tg\varphi}g = g\,tg(\alpha-\varphi)$

$$\boxed{a_1 = g\,tg(\alpha-\varphi)} \quad (4)$$

Pentru $a_{ps} > a_1$ corpul nu coboară. El stă în repaus față de plan, sau urcă pe plan. Presupunând F_i suficient de mare încât corpul să urce, deci a_{ps} nu-i mai mic decât o anumită a_2, avem situația din figură, care conduce la:



$$F_{a_{cp}} = F_{it} - G_t - \mu(G_n + F_{in}) \quad (5)$$

H. 1.3.140 (continuare)

Cea mai mică valoare a lui F_i, deci și a lui a_{ps}, pentru care corpul mai urcă este aceea pentru care $a_{cp}=0$, când urcă uniform. Situația se realizează pentru $a_{ps}=a_2$, când (5) se scrie:

$m\cdot 0 = ma_2\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + ma_2\sin\alpha)$

de unde: $a_2 = \dfrac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}g = \dfrac{tg\alpha + tg\varphi}{1 - tg\alpha\, tg\varphi}g = g\,tg(\alpha+\varphi)$

$$\boxed{a_2 = g\,tg(\alpha+\varphi)} \quad (6)$$

Pentru $a_{ps} < a_2$ corpul nu urcă. Mai înainte s-a văzut că pentru $a_{ps} > a_1$ corpul nu coboară. Așadar, notând $a_{ps} = a$, condiția de repaus se scrie:

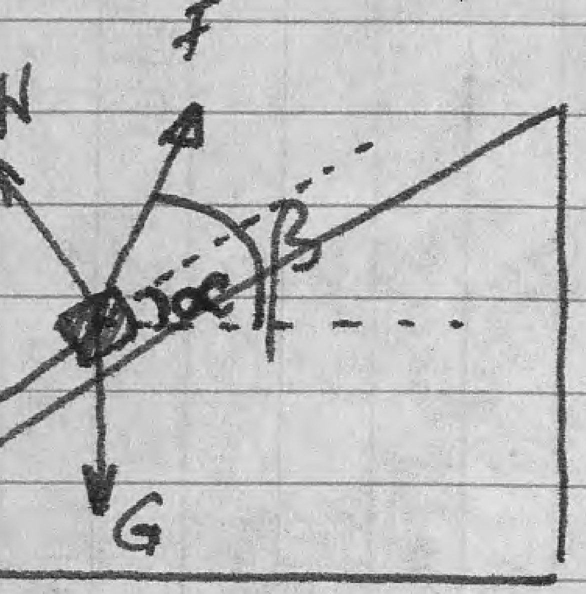
$a_1 < a < a_2$, sau $\boxed{g\,tg(\alpha-\varphi) < a < g\,tg(\alpha+\varphi)}$

2.04.988. 109

H.1.3.172

a, α, μ

$\beta = ?\ F_{min}$



$\vec{F_a} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F_f}$

$ox:\ F\cos(\beta-\alpha) - mg\sin\alpha - \mu N = ma$

$oy:\ F\sin(\beta-\alpha) - mg\cos\alpha + N = 0$

Problema are sens dacă $N \geq 0$.

Cazul $N>0$ este început mai sus:

$N = mg\cos\alpha - F\sin(\beta-\alpha)$

$F\cos(\beta-\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + \mu F\sin(\beta-\alpha) = ma$

$F[\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)] = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + ma$

$$\boxed{F = \frac{g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a}{\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)}\, m} \qquad (1)$$

Condiția $N>0$ se scrie acum:

$$mg\cos\alpha - \sin(\beta-\alpha)\frac{g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a}{\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)}\, m > 0$$

$$g\cos\alpha > \frac{g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + a}{\operatorname{ctg}(\beta-\alpha) + \mu}$$ Cum $\beta > \alpha$:

$g\cos\alpha\operatorname{ctg}(\beta-\alpha) + \cancel{\mu g\cos\alpha} > g\sin\alpha + \cancel{\mu g\cos\alpha} + a$

$a < g\cos\alpha\operatorname{ctg}(\beta-\alpha) - g\sin\alpha$

$$a < g\cos\alpha\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)} - g\sin\alpha$$

$$a < g\frac{\cos\alpha\cos(\beta-\alpha) - \sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$a < g\,\frac{\cos(\beta-\alpha+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$; $\boxed{a < g\,\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}}$ (2)

Numai dacă este îndeplinită (2) F are expresia (1).

În acest caz F ~~...~~ se scrie:

$$F = g\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi + g\sin\varphi\cos\alpha + a\cos\varphi}{\cos(\beta-\alpha)\cos\varphi + \sin\varphi\sin(\beta-\alpha)} \qquad \left(\mu = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

$$\boxed{F = \frac{g\sin(\alpha+\varphi) + a\cos\varphi}{\cos(\beta-\alpha-\varphi)}}$$ (3) și are valoarea minimă dacă $\boxed{\beta = \alpha+\varphi}$, deci pentru $\beta = 45°$.

Observăm că (2) în cazul lui F_{minim} se scrie:

$$\boxed{a < g\,\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}} = 9{,}8\,\frac{\cos 45°}{\sin 15°} = 26{,}77$$

a) Așadar, dacă $a < 26{,}77\ m/s^2$ avem F_{minim} pentru $\beta = 45°$. Soluția (3) este însă valabilă dacă este satisfăcută (2), adică pentru:

$\frac{a}{g} < \frac{\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}$; $\frac{a}{g} < \frac{1}{\cos\alpha\, tg\beta - \sin\alpha}$

$\frac{g}{a} > \cos\alpha\, tg\beta - \sin\alpha$; $\cos\alpha\, tg\beta < \frac{g}{a} + \sin\alpha$

avem:

$\boxed{tg\beta < \frac{g}{a\cos\alpha} + tg\alpha}$ (2*) Pentru $a = 20\ m/s^2$ și $\alpha = 30°$

$$tg\beta < \frac{9{,}8}{20\cdot 0{,}866} + 0{,}577 = 0{,}5658 + 0{,}577 = 1{,}1428$$

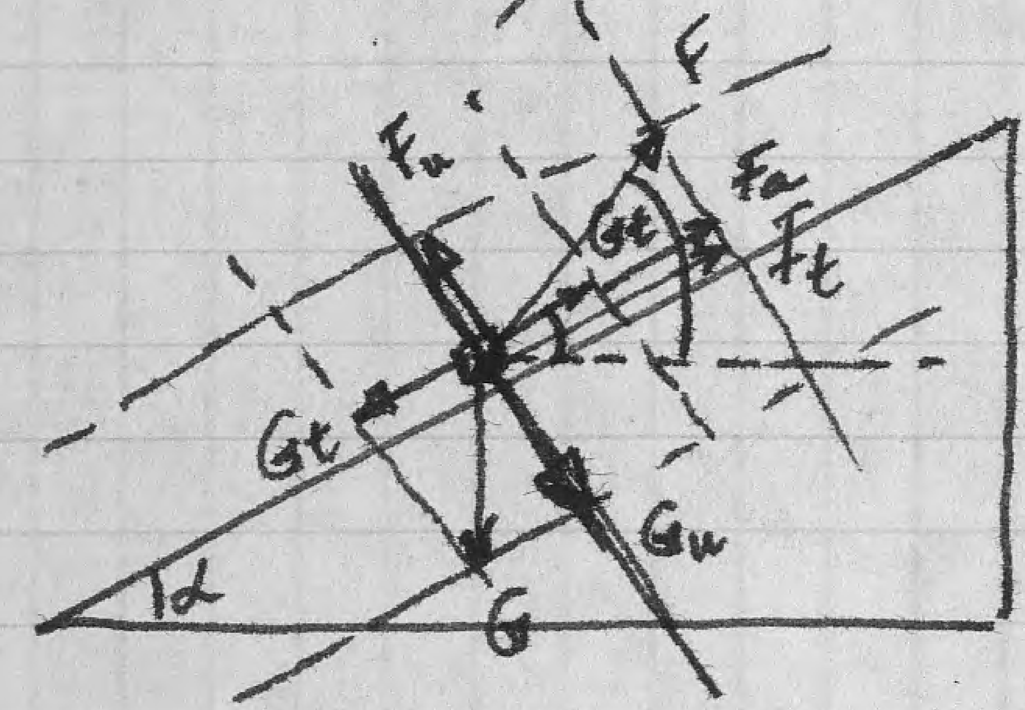
$\boxed{\beta < 48{,}8°}$ (2**) Așadar, (3) este valabil-

110

1.3.142 continuare

pentru $30° < \beta < 48{,}8°$ sau $30 < \beta < 48°48'$

Dacă $\beta = 48°48'$ atunci deducerea lui (3) nu mai este valabilă, deoarece $N \neq 0$, ci $N = 0$. În acest caz $F_f = \mu N = 0$ și $G_n = F_n$. Avem:



$F_t = F\cos(\beta-\alpha)$

$G_t + ma = F\cos(\beta-\alpha)$

$F = \frac{mg\sin\alpha + ma}{\cos(\beta-\alpha)}$

$\boxed{F = \frac{g\sin\alpha + a}{\cos(\beta-\alpha)}}$ nu (4) soluție ce se observă că se obține din (1) pentru $\mu = 0$ (lipsa frecării), sau din (3) pentru $\varphi = 0$

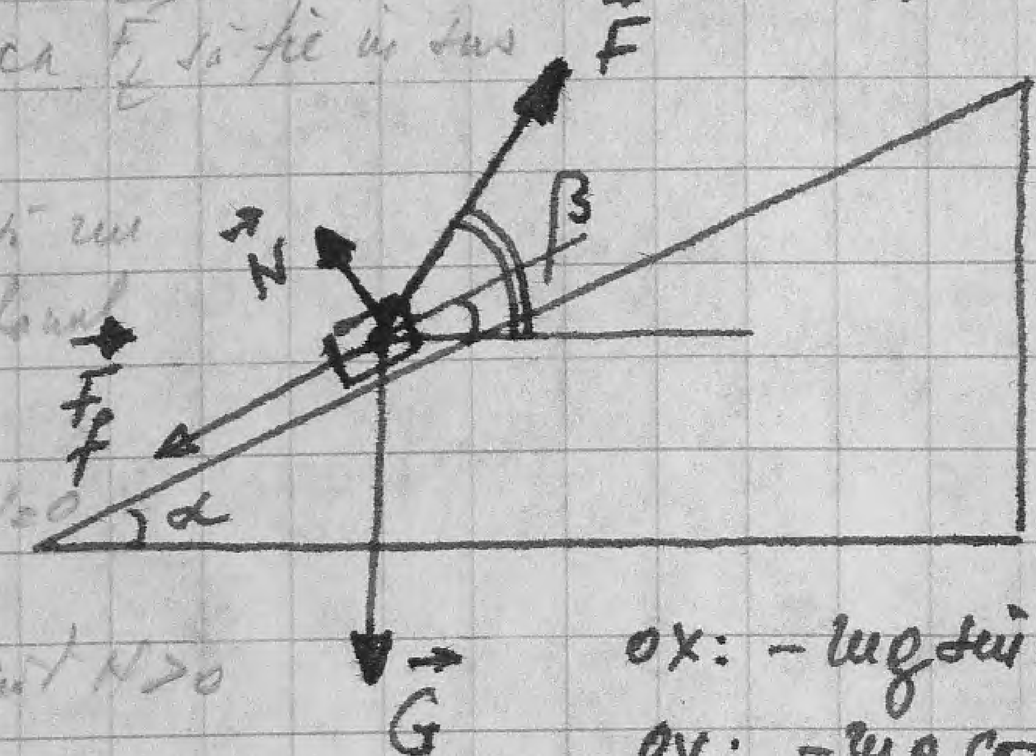
Dacă $\beta > 48°48'$ avem $F_n > G_n$ și corpul se ridică de pe plan, deci problema își pierde sensul.

b) Dacă $a = 30{,}1\ m/s^2$ condiția (2) este satisfăcută pentru $\beta < 43{,}63°$ după cum rezultă din calcul. F va fi minim când numitorul va fi maxim, deci când $\beta \to 43°36'$

Când $\beta = 43{,}63°$ (2) nu-i îndeplinită și F ia valoarea constantă dată de (4), deoarece se repetă același raționament ca și pentru $\beta = 48°48'$ în cazul $a = 20\ m/s^2$.

H - 1.3.142

$a = 20\ m/s^2$; $\alpha = 30^\circ$; F, β ; $\beta > \alpha$; $\varphi = 15^\circ$



F_{min} $\beta = ?$

$a = 30,1\ m/s^2$ idem

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{F_f} + \vec{N} = \vec{F_a}$$

ox: $-mg \sin\alpha + F\cos(\beta-\alpha) - \mu N = ma$ (1)

oy: $-mg\cos\alpha + F\sin(\beta-\alpha) + N = 0$ (2)

Problema are sens cu condiția $\boxed{N \geq 0}$ (3), în caz contrar corpul ste „ridicat" de $\vec{F}$ de pe plan. Presupunem 3 îndeplinită. Atunci:

Scoțînd N din 2 și ducîndu-l în (1) avem:

$$F = \frac{a + g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos(\beta-\alpha) + \mu\sin(\beta-\alpha)} \cdot m \qquad (4)$$

Dar $\mu = tg\,\varphi$. Introducînd în 4 avem

$$F = \frac{a\cos\varphi + g(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)}{\cos\varphi\cos(\beta-\alpha) + \sin\varphi\sin(\beta-\alpha)} \cdot m \quad \text{sau}$$

$$\boxed{F = \frac{a\cos\varphi + g\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\beta-\alpha-\varphi)} \cdot m} \qquad (5)$$

Cum a, φ, g, α sînt date, numărătorul ste constant iar numitorul ste funcție de β. În fond $F = F(\beta)$. Observăm că F va fi minim dacă numitorul ste maxim, adică

$$\cos(\beta-\alpha-\varphi) = 1$$

care duce la $\boxed{\beta = \alpha + \varphi}$ $\boxed{\beta = 45^\circ}$

Soluții de mai sus există numai dacă este îndeplinită și condiția (3), adică

$$N = mg\cos\alpha - F\sin(\beta-\alpha) \geq 0,$$ de unde:

$$F \leq \frac{mg\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} \qquad (6)$$

Cum F trebuie să fie minim, expresia lui F din (5) ia forma (pentru $\beta-\alpha-\varphi=0$ și $\beta-\alpha=\varphi$):

$$F_{min} = \frac{a\cos\varphi + g\sin(\alpha+\varphi)}{1}\cdot m; \quad F_{min} = [a\cos\varphi + g\sin(\alpha+\varphi)]m$$

care transformă condiția (6) de existență a problemei:

$$m[a\cos\varphi + g\sin(\alpha+\varphi)] \leq \frac{mg\cos\alpha}{\sin\varphi}$$

unde am înlocuit și $\beta-\alpha$ cu φ

$$a\cos\varphi + g\sin(\alpha+\varphi) \leq g\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}$$

$$a \leq g\left[\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}\right]$$

$$a \leq g\left[\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}\right]$$

$$a \leq g\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\left[\cos\alpha - \sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi - \cos\alpha\sin^2\varphi\right]$$

$$a \leq \frac{g}{\sin\varphi\cos\varphi}\left[\cos\alpha(1-\sin^2\varphi) - \sin\alpha\cos\varphi\sin\varphi\right]$$

$$a \leq \frac{g}{\sin\varphi\cos\varphi}(\cos\alpha\cos^2\varphi - \sin\alpha\cos\varphi\sin\varphi)$$

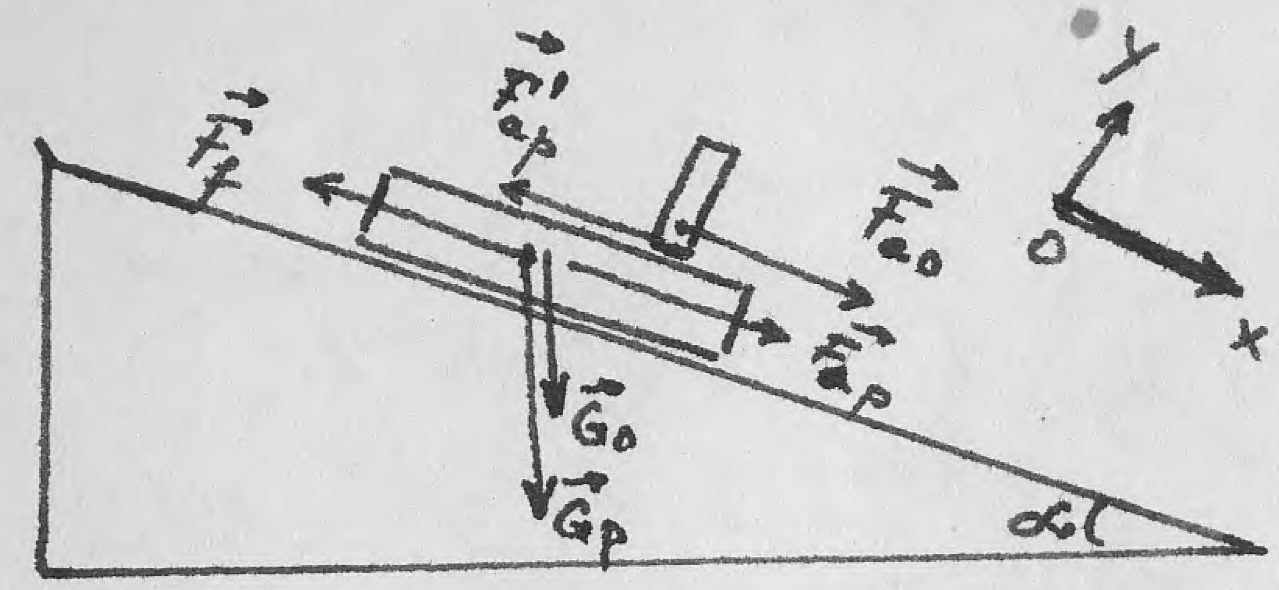
$$a \leq \frac{g}{\sin\varphi}(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi) = \frac{g}{\sin\varphi}\cos(\alpha+\varphi)$$

Așadar, dacă $\boxed{a \leq \frac{g\cos(\alpha+\varphi)}{\sin\varphi}}$ atunci

F este minim pentru $\boxed{\beta = \alpha+\varphi}$ Numeric:

Dacă $a \leq 26,77\ m/s^2$, atunci $\beta = 45°$ dă F minim.

1.3.143. Soluție: Prof. D. Rosca



Dacă platforma coboară:

$\vec{G}_p$ greutatea platformei

$\vec{G}_o$ greutatea omului

$\vec{F}_f$ forța de frecare dintre platformă și plan.

$\vec{F}_{ap}$ forța ce accelerează platforma dacă omul stă pe loc.

$\vec{F}_{ao}$ forța ce accelerează omul în mișcare pe platformă, manifestată prin intermediul frecării cu platforma: $\vec{F}_{ao} = -\vec{F}'_{ap}$

$\vec{F}'_{ap}$ forța ce accelerează platforma datorită mișcării omului pe ea, manifestată prin intermediul frecării dintre om și platformă.

Condiția mișcării uniforme a platformei:

$$\vec{G}_p + \vec{G}_o + \vec{F}_f + \vec{F}'_{ap} = 0$$

$$\vec{G}_p + \vec{G}_o + \vec{F}_f - \vec{F}_{ao} = 0; \quad G_{px} + G_{ox} - F_{fx} - F_{ao} = 0$$

$$Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha - \mu(Mg\cos\alpha + mg\cos\alpha) - ma_o = 0$$

$$\boxed{a_o = \frac{M+m}{m}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

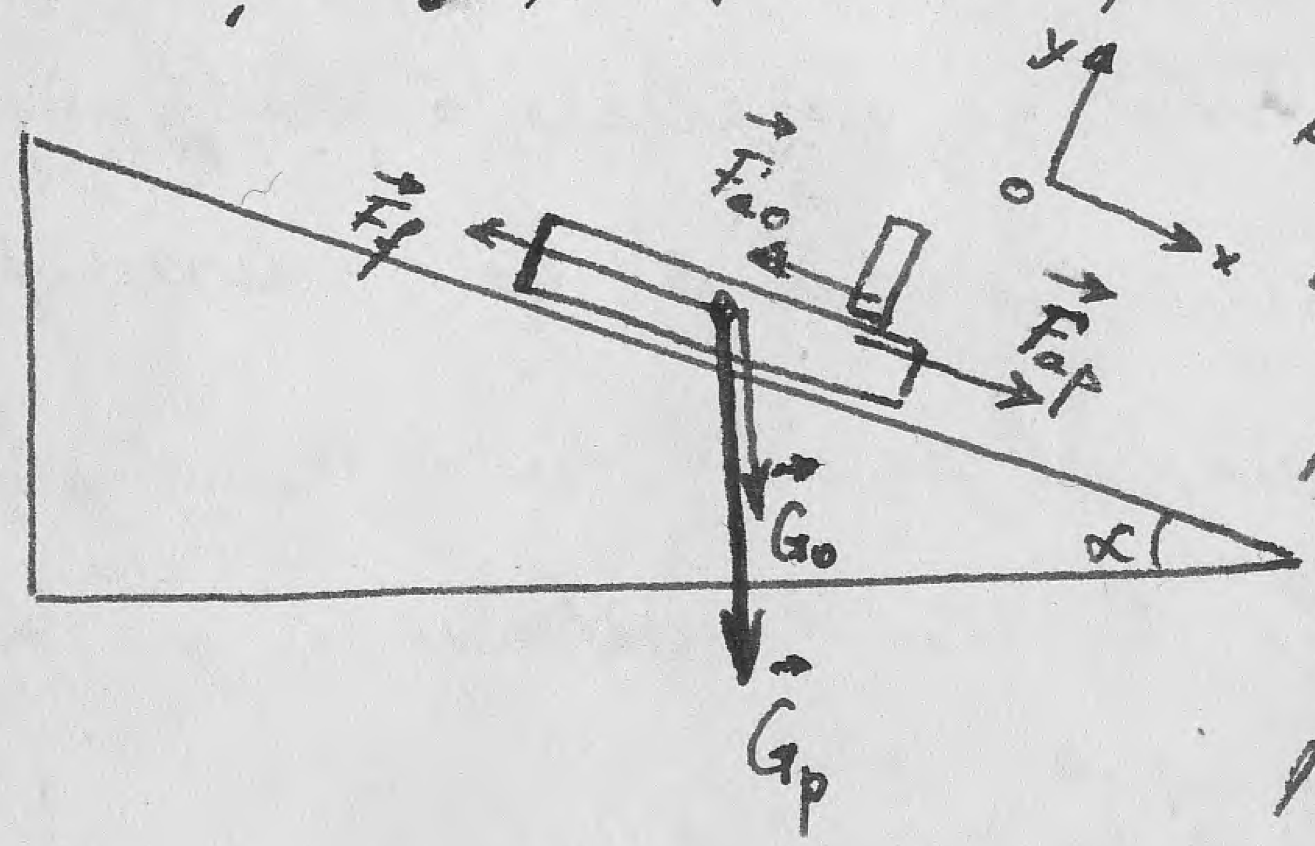
Observații: Se știe că $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ unde φ este unghiul de frecare.

La noi $\mu = 0{,}2$ și $\alpha = 6^\circ$. Pentru unghiuri $\alpha < \varphi$ corpul nu coboară pe plan.

Dar: $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}2$ duce la $\varphi \simeq 11^\circ 20'$

Așadar, platforma nu coboară pe plan, și raționamentul anterior nu este valabil în cazul datelor numerice din problemă.

1° Pentru ca platforma să înceapă a coborî uniform este necesar ca omul să „urce" pe platformă cu accelerația $\vec{a}_0$, astfel încât forța $\vec{F}_{a0} = m\vec{a}_0$



care o produce, depusă de platformă prin intermediul frecării, să aibă ca reacțiune asupra platformei $\vec{F}_{ap}$ cu

$$\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{a0}$$

și $\vec{G}_p + \vec{G}_0 + \vec{F}_f + \vec{F}_{ap} = 0$ sau

$\vec{G}_p + \vec{G}_0 + \vec{F}_f - \vec{F}_{a0} = 0$ proiectând-o:

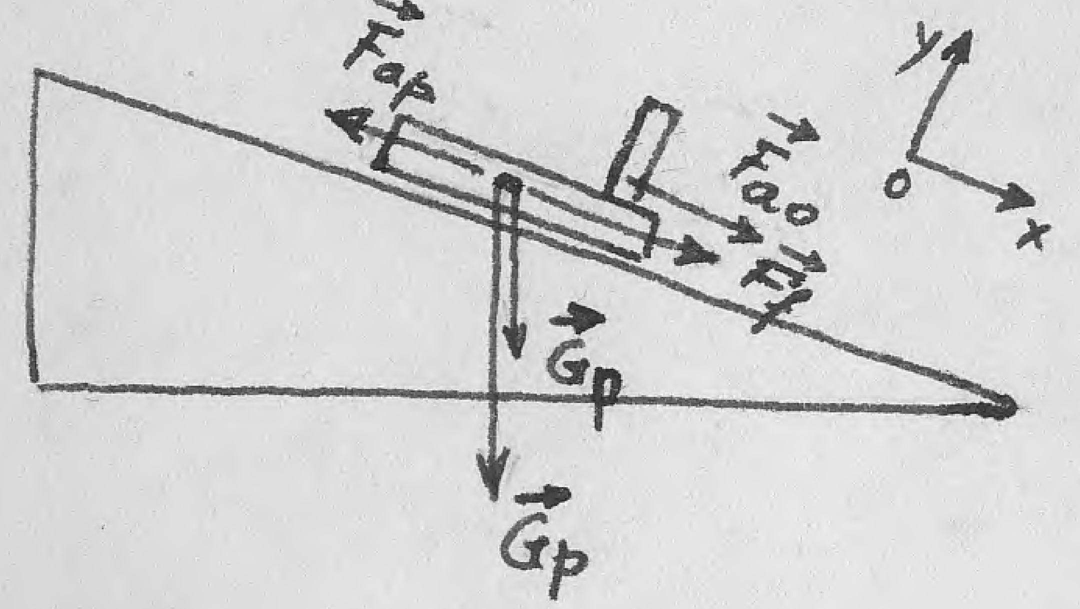
$G_{px} + G_{0x} - F_{fx} - (-F_{a0x}) = 0$

$$Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha - \mu[Mg\cos\alpha + mg\cos\alpha] + ma_0 = 0$$

$$(m+M)g\sin\alpha - \mu(m+M)g\cos\alpha + ma_0 = 0$$

$$\boxed{a_0 = -\frac{m+M}{m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}$$

2°. Este posibil ca platforma să urce uniform pe plan, dacă omul coboară pe platformă cu o accelerație $\vec{a}_0$, astfel încât forța $\vec{F}_{a0} = m\vec{a}_0$ care o produce,



depusă de platformă prin intermediul frecării, să aibă ca reacțiune asupra platformei $\vec{F}_{ap}$ cu $\vec{F}_{ap} = -\vec{F}_{a0}$ și

$\vec{G}_p + \vec{G}_0 + \vec{F}_f + \vec{F}_{ap} = 0$ sau

$\vec{G}_p + \vec{G}_0 + \vec{F}_f - \vec{F}_{a0} = 0$ care prin proiecție

$$G_{px} + G_{0x} + F_{fx} - F_{a0x} = 0$$

$$Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha + \mu(Mg\cos\alpha + mg\cos\alpha) - ma_0 = 0$$

$$\boxed{a_0 = \frac{m+M}{m}g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

1.5.52

1.5.59

1.5.61

1.5.63

1.5.69

1.5.72

1.5.75

1.5.77

1.5.80

1.5.81

113

24 – 1.3.143 Hristev 1983

nu

$M = 140\,Kg$

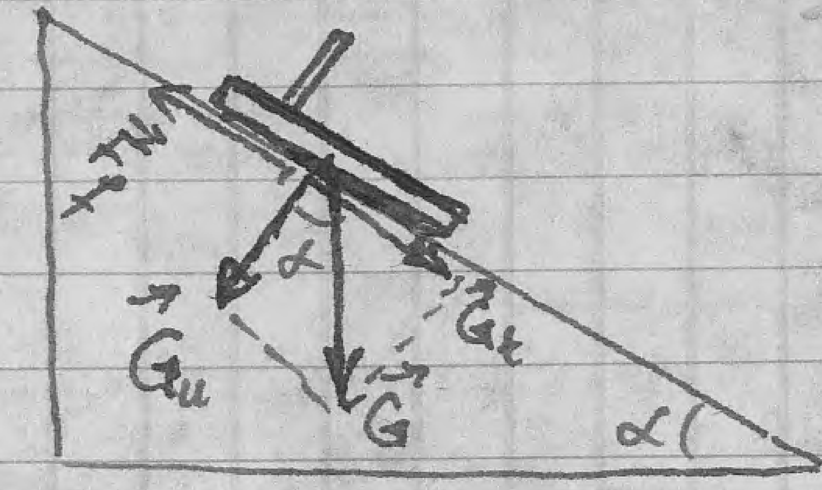
$\alpha = 6^\circ$

$\mu = 0,2$

$m = 70\,Kg$

$a_o = ?$

$a_p = 0$



$G_n = G\cos\alpha = (M+m)g\cos\alpha$

$G_t = G\sin\alpha = (M+m)g\sin\alpha$

$F_f = \mu G_n = \mu(M+m)g\cos\alpha$

$F_{a_{po}} = G_t - F_f\,;\quad (M+m)a_{po} = (M+m)g\sin\alpha - \mu(M+m)g\cos\alpha$

$$\boxed{a_{po} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}$$

$F_{a_{po}} = (M+m)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g$ forța care accelerează sistemul platformă om pe planul înclinat în timpul coborârii.

Spre a coborî uniform, trebuie ca omul să coboare pe platformă cu o accelerație a_o față de pământ, având o asemenea valoare încât forța $F_{op} = m_o a_o$ cu care omul acționează asupra platformei în sens invers coborâri să fie de aceeași valoare cu $F_{a_{po}}$. Așadar:

$$m\cdot a_{op} = (M+m)(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g$$

$$\boxed{a_{op} = \frac{M+m}{m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g}$$

1°) Răspunsul din Culegere. Numeric, în culegere:

$a = -3\ m/s^2$. Dar:

$$a_{op} = \frac{140+70}{70}(\sin 6° - 0,2\cos 6°)\cdot 9,8 =$$

$$= 3\cdot 9,8(0,10453 - 0,2\cdot 0,99452) =$$

$$= 29,4(0,10453 - 0,198904) =$$

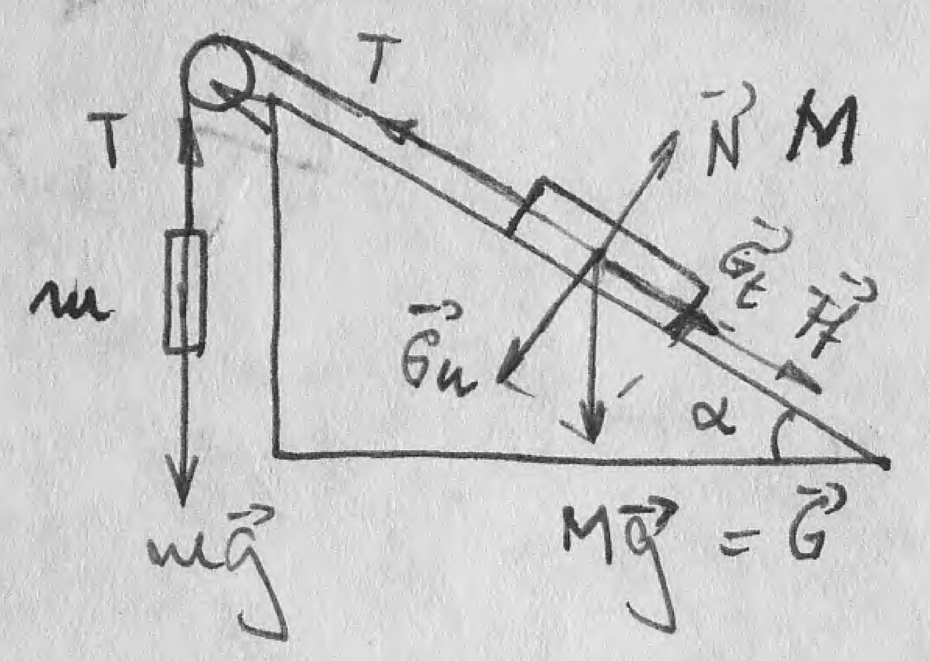
$$= 29,4(-0,09437) = -2,774\ m/s^2$$

$\boxed{a_{op} = -2,774\ m/s^2}$ Așadar, alt răspuns!!!

2°) Semnul lui a ($a<0$) arată că omul are o accelerație de sens opus celei a platformei, care coboară pe plan dacă omul stă pe platformă. Deci omul „urcă" pe platformă. Dar atunci platforma este accelerată în plus în coborâre. Pentru anularea accelerației platformei trebuia omul să „coboare" pe platformă.

114

1.3.145 (Soluție, Bulen Teodora, XA)



$G_n = Mg\cos\alpha$

$G_t = Mg\sin\alpha$

Aplicând principiul fundamental al dinamicii sistemului format din cele două corpuri se obține:

$$a = \frac{mg - Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha}{m+M}$$

Deci:

$$a = \frac{m - M(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M}\cdot g \quad (1)$$

Numeric $a \approx 2,8\ m/s^2$ (2,776)

Accelerația corpului de masă M este dată de relația: $a = \frac{T - Mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{M}$ (2) ??? mai comod să folosim celălalt corp!

Din (1) și (2) se obține:

$$T = \frac{gmM}{M+m}(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$mg - T = m\cdot a$

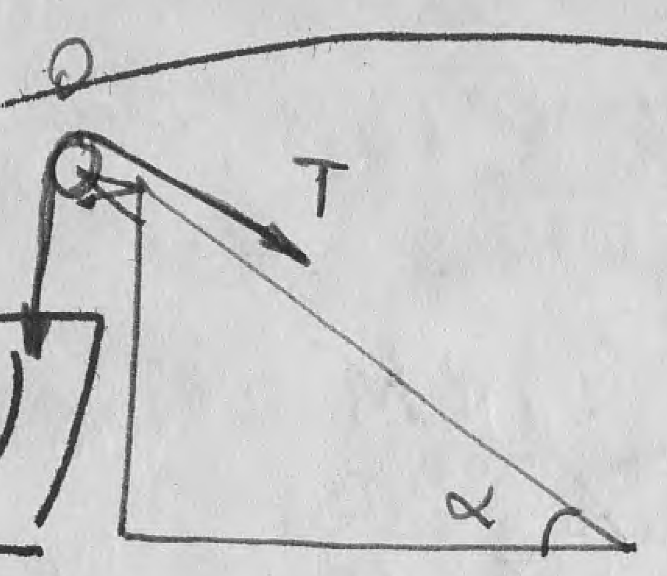
$T = m(g-a)$

Numeric:

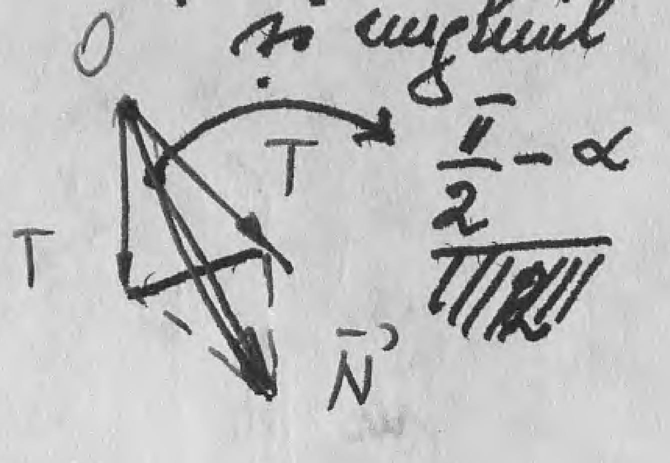
$T \approx 28\ N$ (28,135)

$N = 2T\cos\frac{\pi/2-\alpha}{2}$

$$\boxed{N = 2T\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$



romb cu latura T și unghiul $\frac{\pi}{2}-\alpha$



Forța N care apasă asupra ~~ala~~ scripetelui este rezultanta celor două tensiuni.

$$N^2 = T^2 + T^2 + 2TT\cos(90-\alpha)$$

$$N^2 = 2T^2(1+\sin\alpha)$$

$$N = T\sqrt{2(1+\sin\alpha)}$$

Numeric:

$$N = 48,44\,N$$

115

25 – 1.3.146 Hristev 1983

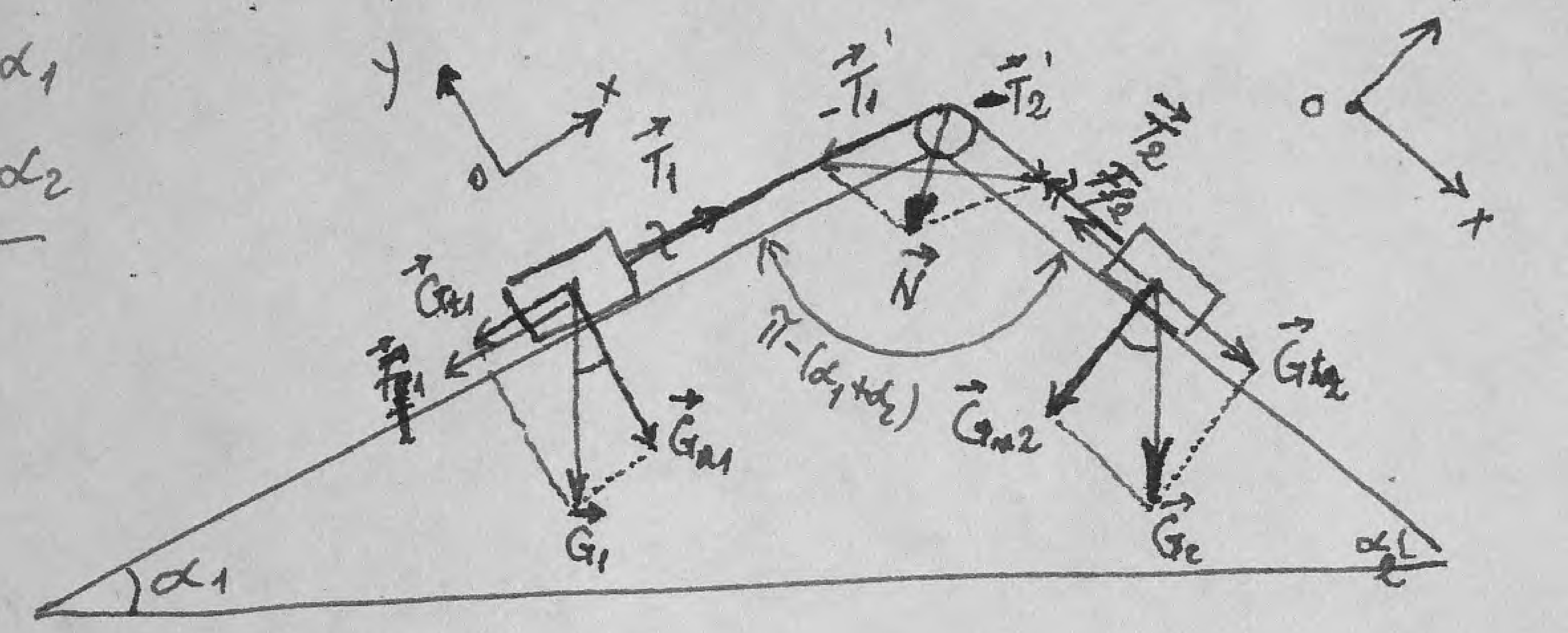
$m_1; \mu_1; \alpha_1$

$m_2; \mu_2; \alpha_2$

$a = ?$

$T = ?$

$N = ?$



a) $\vec{G}_{t_1} + \vec{F}_{f1} + \vec{T}_1 = \vec{F}_{1a}$; $\vec{G}_{t_2} + \vec{F}_{f2} + \vec{T}_2 = \vec{F}_{2a}$

$T_1 = T_2 = T$

$$\begin{cases} -m_1 g\sin\alpha_1 - \mu_1 m_1 g\cos\alpha_1 + T = m_1 a \\ m_2 g\sin\alpha_2 - \mu_2 m_2 g\cos\alpha_2 - T = m_2 a \end{cases}$$ le adun

$$m_2 g\sin\alpha_2 - m_1 g\sin\alpha_1 - \mu_2 m_2 g\cos\alpha_2 - \mu_1 m_1 g\cos\alpha_1 = (m_1+$$

$$\boxed{a = \frac{g}{m_1+m_2}\left[m_2(\sin\alpha_2 - \mu_2\cos\alpha_2) - m_1(\sin\alpha_1 + \mu_1\cos\alpha\right.}$$

b) $T = m_1 a + m_1 g\sin\alpha_1 + \mu_1 m_1 g\cos\alpha_1$

$$T = \frac{m_1 g}{m_1+m_2}\left[m_2\sin\alpha_2 - m_2\mu_2\cos\alpha_2 - \cancel{m_1\sin\alpha_1} - m_1\cancel{\mu_1\cos\alpha_1} + \ldots\right.$$

$$\left. + m_1\cancel{\mu_1\cos\alpha_1} + m_2\sin\alpha_1 + m_2\mu_1\cos\alpha_1\right]$$

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1+m_2}\left[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \mu_1\cos\alpha_1 - \mu_2\cos\alpha_2\right.}$$

c) În vîrful planelor tensiunile compuse duc la un r
în care forța de apăsare $\vec{N}$ este diagonală. Cum
gonalele rombului sînt perpendiculare, din

din triunghiurile dreptunghice formate, în care un unghi ascuțit este $\frac{\pi-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$ (în romb diagonalele sunt și bisectoare), avem:

$$\frac{N}{2} = T\cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right] = T\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

unde am folosit că cosinusul unui unghi este egal cu sinusul complementului său. Observ că pentru unghiul $\frac{\pi}{2} - a$ complementul este a.

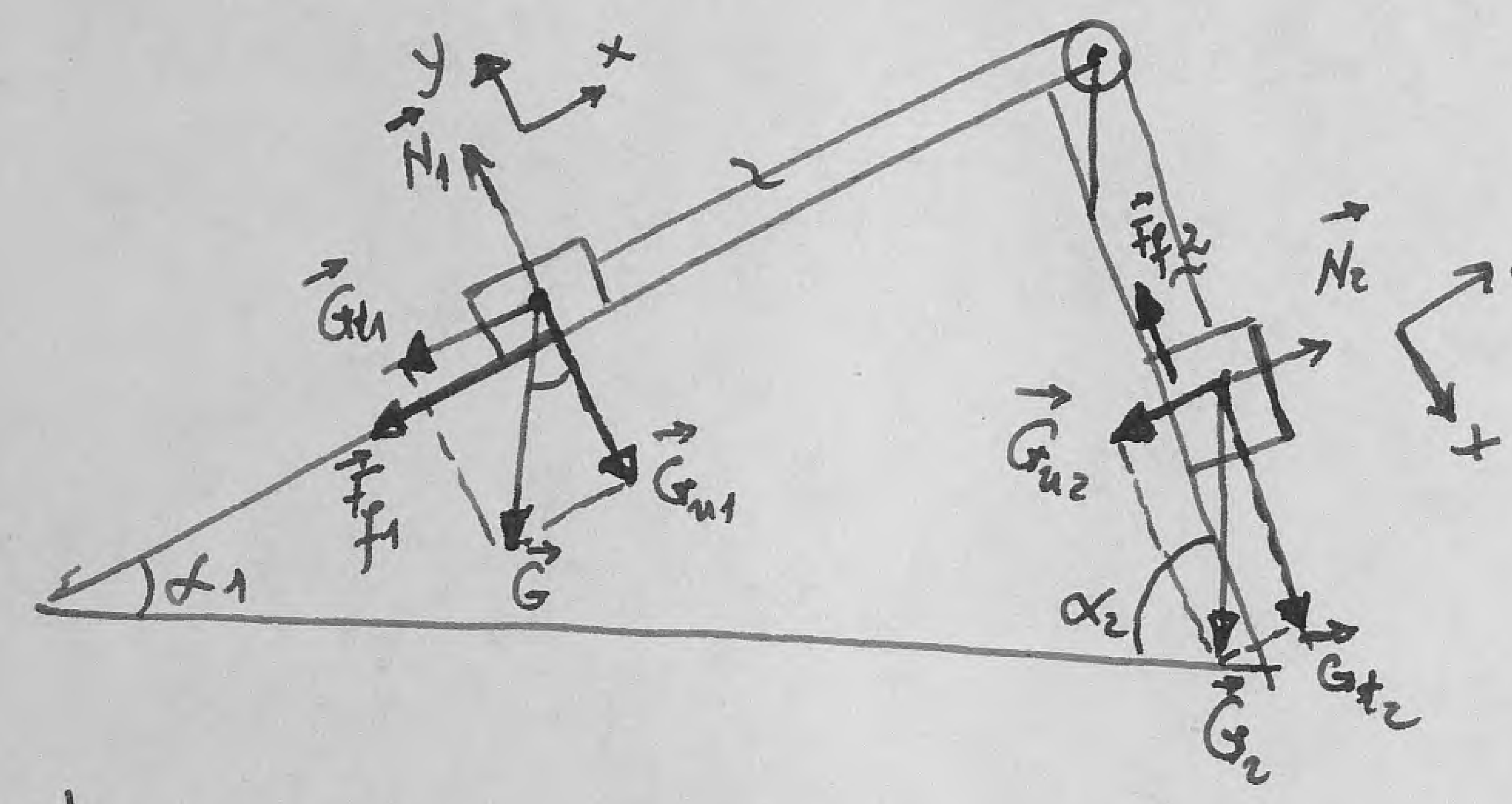
$$\boxed{N = 2T\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

148

25 - 1.3.146 Hristev 1983

$m_1 = 100\,g$, $m_2 = 200\,g$; $\alpha_1 = 30°$; $\alpha_2 = 60°$; $\mu_1 = 0{,}2$, μ

a) $a = ?$; $T = ?$ b) $F = ?$



a) $-m_1 g\sin\alpha_1 - \mu_1 m_1 g\cos\alpha_1 + T = m_1 a$

$m_2 g\sin\alpha_2 - \mu_2 m_2 g\cos\alpha_2 - T = m_2 a$

$m_2 g\sin\alpha_2 - m_1 g\sin\alpha_1 - \mu_2 m_2 g\cos\alpha_2 - \mu_1 m_1 g\cos\alpha_1 = (m_1+m_2$

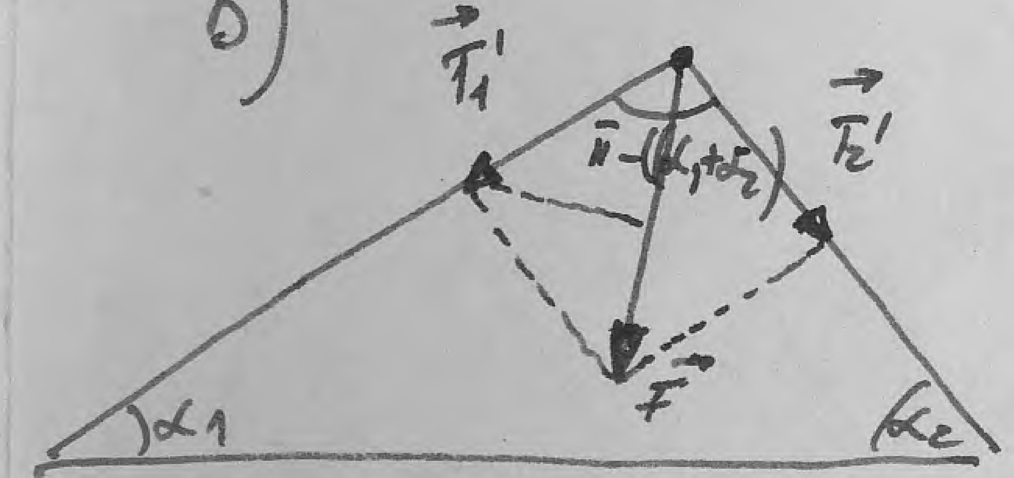
$$\boxed{a = g\,\frac{m_2(\sin\alpha_2 - \mu_2\cos\alpha_2) - m_1(\sin\alpha_1 + \mu_1\cos\alpha_1)}{m_1+m_2}}$$

$$T = m_1 g\left(\frac{m_2\sin\alpha_2 - \mu_2 m_2\cos\alpha_2 - m_1\sin\alpha_1 - m_1\mu_1\cos\alpha_1}{m_1+m_2} + \right.$$

$$\left. + \sin\alpha_1 + \mu_1\cos\alpha_1\right)$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\,g\left(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \mu_1\cos\alpha_1 - \mu_2\cos\alpha_2\right)$$

b)



$T_1' = T_2' = T$. Patrulaterul este romb cu unghiul $\pi - (\alpha_1+\alpha_2)$

$$\frac{F}{2} = T\cos\frac{\pi-(\alpha_1+\alpha_2)}{2}$$

$$F = 2T\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)$$

$$F = 2T\left[\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right]$$

unde am folosit formula:

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\boxed{F = 2T\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

deoarece: $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

H. 1.3. 147

$m = 1\,kg$; $|\vec{a}| = 4{,}9\ m/s^2$

a) pl. orizontal ; b) pl. incl. $\alpha = 30^\circ$ în sus;

c) pl. incl. $\alpha = 30^\circ$ în jos; $\theta = ?$; $T = ?$

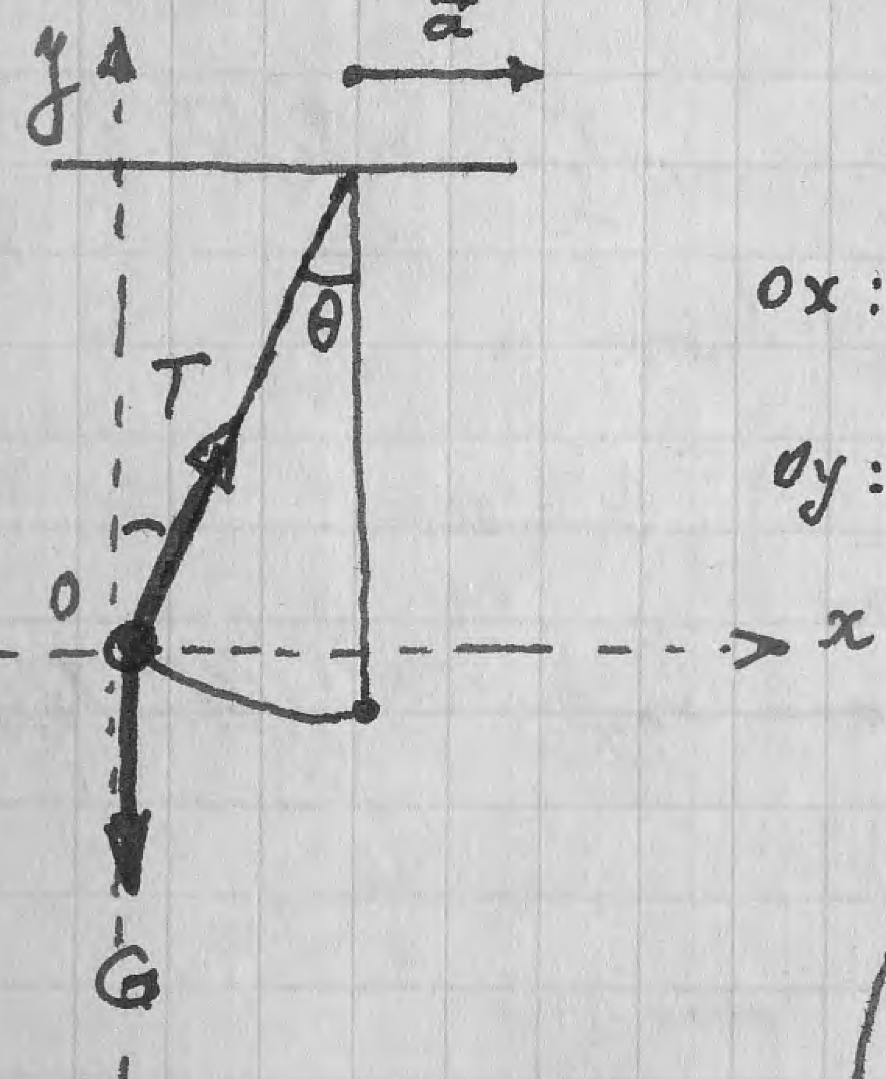
d) alunecă liber pl. orizont $\varphi = 15^\circ$;

e) alun. liber pl. incl. $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 15^\circ$, în jos.

f) alun. liber pl. incl. $\alpha = 30^\circ$, $\varphi = 15^\circ$, în sus.

---

a)



$\vec{G} + \vec{T} = \vec{F}_a$

Ox: $T\sin\theta = ma$

Oy: $-mg + T\cos\theta = 0$

$$\begin{cases} T\sin\theta = ma \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

$\boxed{tg\,\theta = \frac{a}{g}}$ literele sunt module

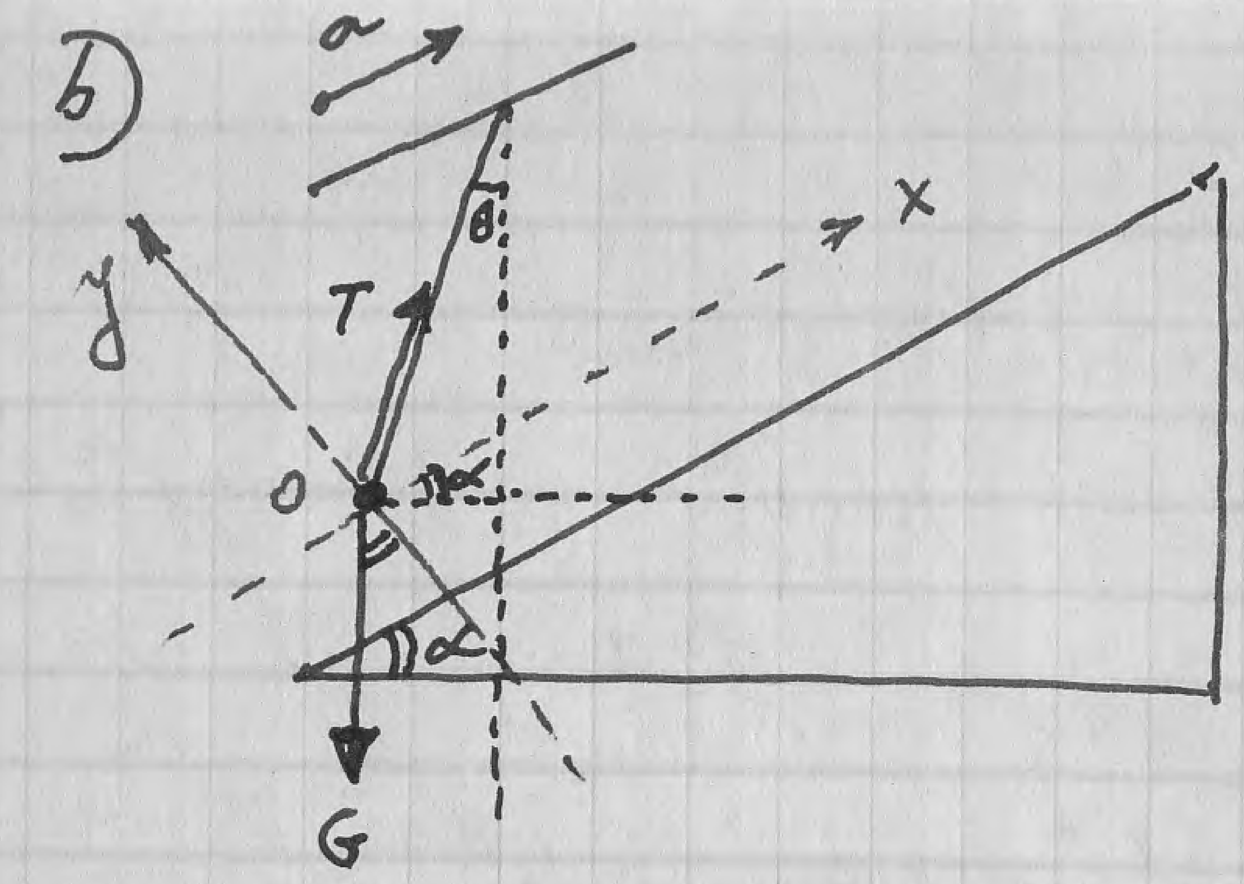
$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{mg}{\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}}} = mg\sqrt{1+tg^2\theta}$

$T = mg\sqrt{1+\frac{a^2}{g^2}}$

$$\boxed{T = m\sqrt{a^2+g^2}}$$

---

b)



$\vec G + \vec T = \vec F_a$

Ox: $-mg\sin\alpha + T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta\right) = ma$

Oy: $-mg\cos\alpha + T\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\theta\right) = 0$

$$\begin{cases} T\sin(\alpha+\theta) = mg\sin\alpha + ma \\ T\cos(\alpha+\theta) = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$tg(\alpha+\theta) = tg\alpha + \frac{a}{g\cos\alpha}$$

$$\frac{tg\alpha + tg\theta}{1 - tg\alpha\, tg\theta} = tg\alpha + \frac{a}{g\cos\alpha}$$

$$\cancel{g\,tg\alpha\cos\alpha} + g\,tg\theta\cos\alpha = \cancel{g\cos\alpha\,tg\alpha} + a - tg^2\alpha\,tg\theta\,g\cos\alpha - a\,tg\alpha\,tg\theta$$

$$(g\cos\alpha + tg^2\alpha + a\,tg\alpha)\,tg\theta = a$$

$$\left(g\cos\alpha + g\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + a\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)tg\theta = a$$

$$(g + a\sin\alpha)\,tg\theta = a\cos\alpha \quad ;$$

$$\boxed{tg\theta = \frac{a\cos\alpha}{g+a\sin\alpha}}$$

$$T = \frac{mg\cos\alpha}{\cos(\alpha+\theta)} = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta} =$$

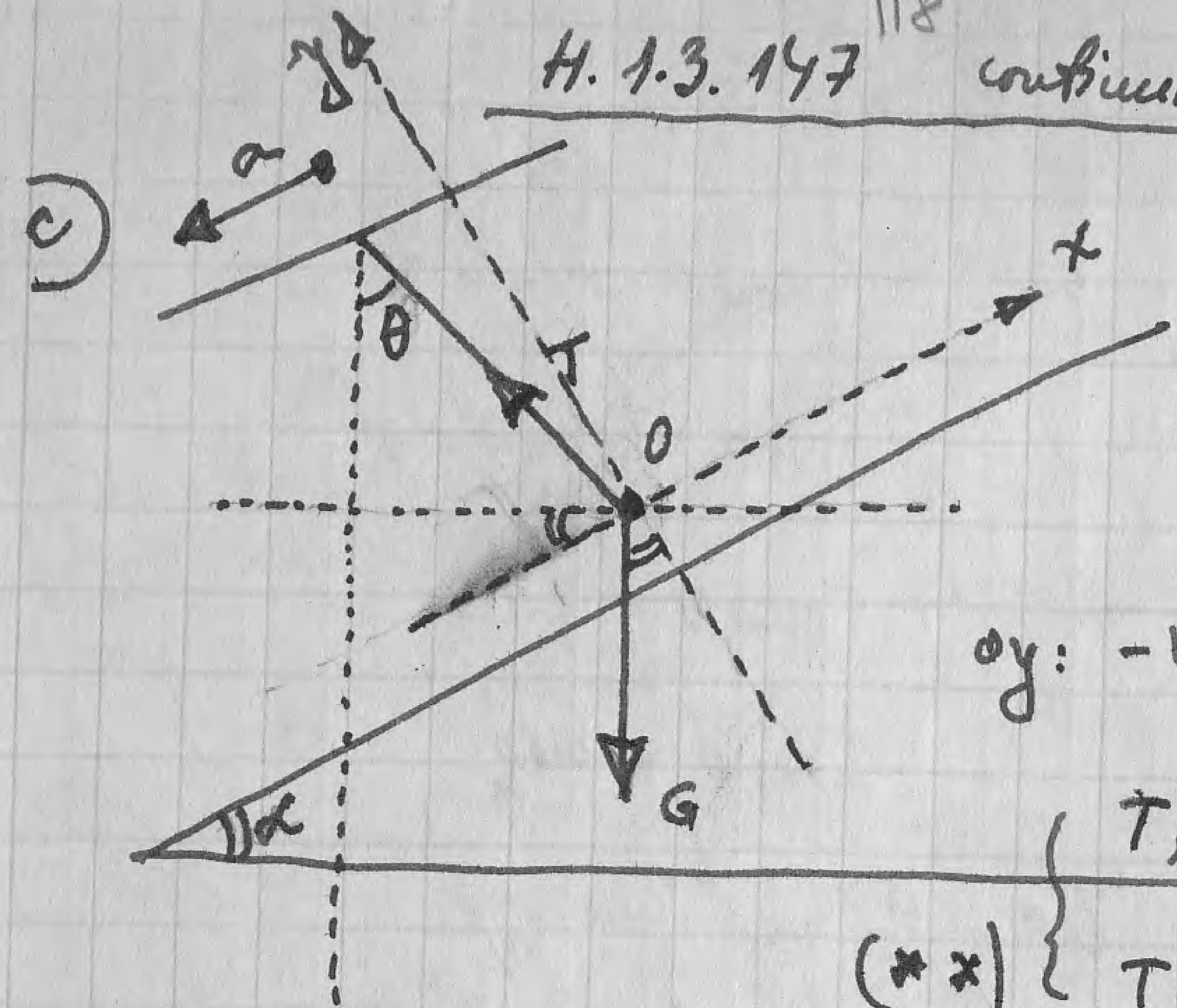
$$= \frac{mg\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+tg^2\theta}} - \frac{\sin\alpha\,tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}}} = \frac{mg\cos\alpha\sqrt{1+tg^2\theta}}{\cos\alpha - \sin\alpha\,tg\theta} =$$

$$= \frac{mg\cos\alpha\sqrt{1+\frac{a^2\cos^2\alpha}{(g+a\sin\alpha)^2}}}{\cos\alpha - \sin\alpha\,\frac{a\cos\alpha}{g+a\sin\alpha}} = \frac{mg\sqrt{g^2+a^2\sin^2\alpha+2ag\sin\alpha+a^2\cos^2\alpha}}{g+a\sin\alpha-a\sin\alpha} =$$

$$= \frac{mg\sqrt{g^2+a^2+2ag\sin\alpha}}{g} \qquad \boxed{T = m\sqrt{g^2+a^2+2ag\sin\alpha}}$$

H. 1.3. 147 [118] continuare (2)

c)



$\vec G + \vec T = \vec F_a$

Ox: $-mg\sin\alpha - T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right) = -ma$

Oy: $-mg\cos\alpha + T\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right) = 0$

$$(**)\begin{cases} T\sin(\theta-\alpha) = -mg\sin\alpha + ma \\ T\cos(\theta-\alpha) = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$tg(\theta-\alpha) = -tg\alpha + \frac{a}{g\cos\alpha} \qquad (*)$$

$$\frac{tg\theta - tg\alpha}{1+tg\theta\cdot tg\alpha} = -tg\alpha + \frac{a}{g\cos\alpha}$$

$$g\cos\alpha\,tg\theta - \cancel{g\cos\alpha\,tg\alpha} = -\cancel{g\cos\alpha\,tg\alpha} + a - g\cos\alpha\,tg^2\alpha\,tg\theta + a\,tg\alpha\,tg\theta$$

$$\left(g\cos\alpha + g\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - a\,tg\alpha\right)tg\theta = a$$

$$[g(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - a\sin\alpha]\,tg\theta = a\cos\alpha$$

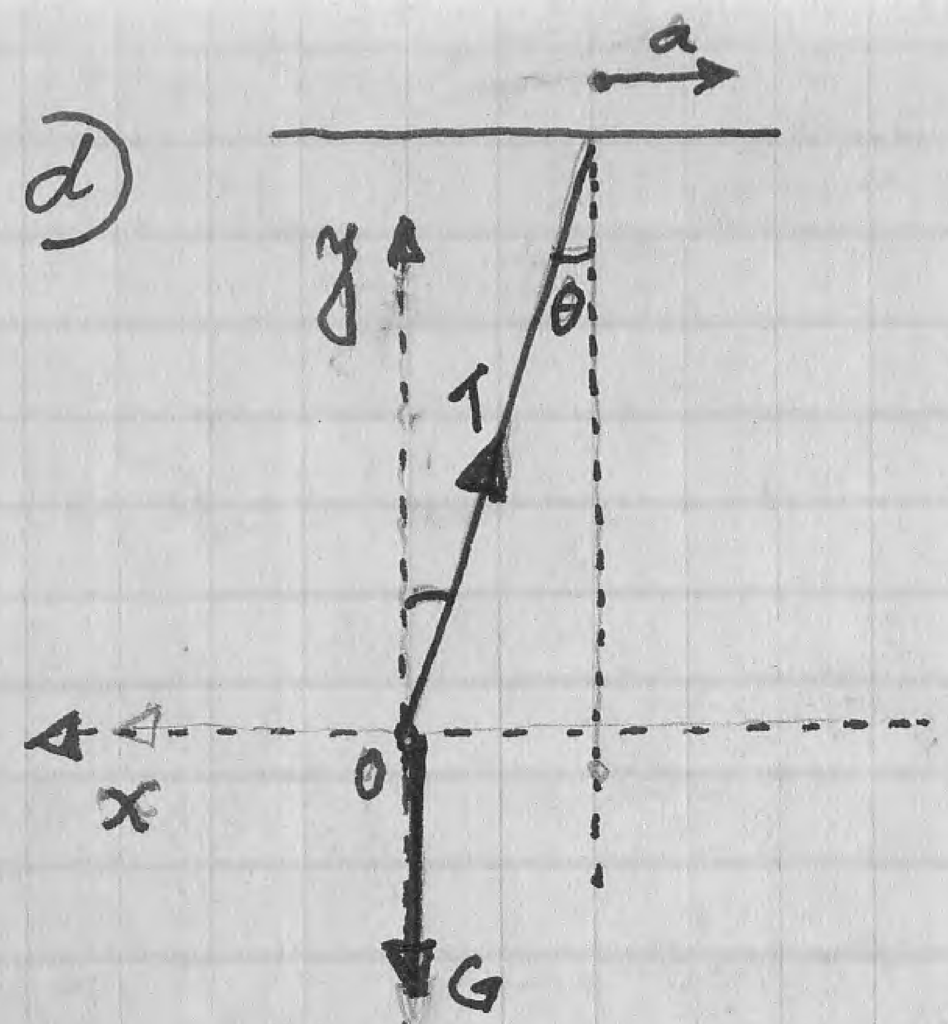
$$(g - a\sin\alpha)\,tg\theta = a\cos\alpha \qquad \boxed{tg\theta = \frac{a\cos\alpha}{g-a\sin\alpha}}$$

$$T = \frac{mg\cos\alpha}{\cos(\theta-\alpha)} = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha} = \frac{mg\cos\alpha\sqrt{1+tg^2\theta}}{\cos\alpha + \sin\alpha\,tg\theta} =$$

$$= \frac{mg\cos\alpha\sqrt{g^2+a^2\sin^2\alpha-2ag\sin\alpha+a^2\cos^2\alpha}}{\dfrac{(g-a\sin\alpha)[\cos\alpha(g-a\sin\alpha)+\sin\alpha\cdot a\cos\alpha]}{g-a\sin\alpha}} =$$

$$= \frac{mg\sqrt{g^2+a^2-2ag\sin\alpha}}{g} \quad ; \quad \boxed{T = m\sqrt{g^2+a^2-2ag\sin\alpha}}$$

d)



$$\vec{G}+\vec{T}=\vec{F_a}$$

Ox: $-T\sin\theta=-ma$

Oy: $-mg+T\cos\theta=0$

$$\begin{cases} T\sin\theta = ma \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

Vagonul merge în sensul Ox.

$tg\theta=\frac{a}{g}=\frac{\mu g}{g}=\mu$

$\vec{F_{av}}=\vec{F_{fr}}$

$tg\theta=\mu$; $tg\theta=tg\varphi$; $\boxed{\theta=\varphi}$

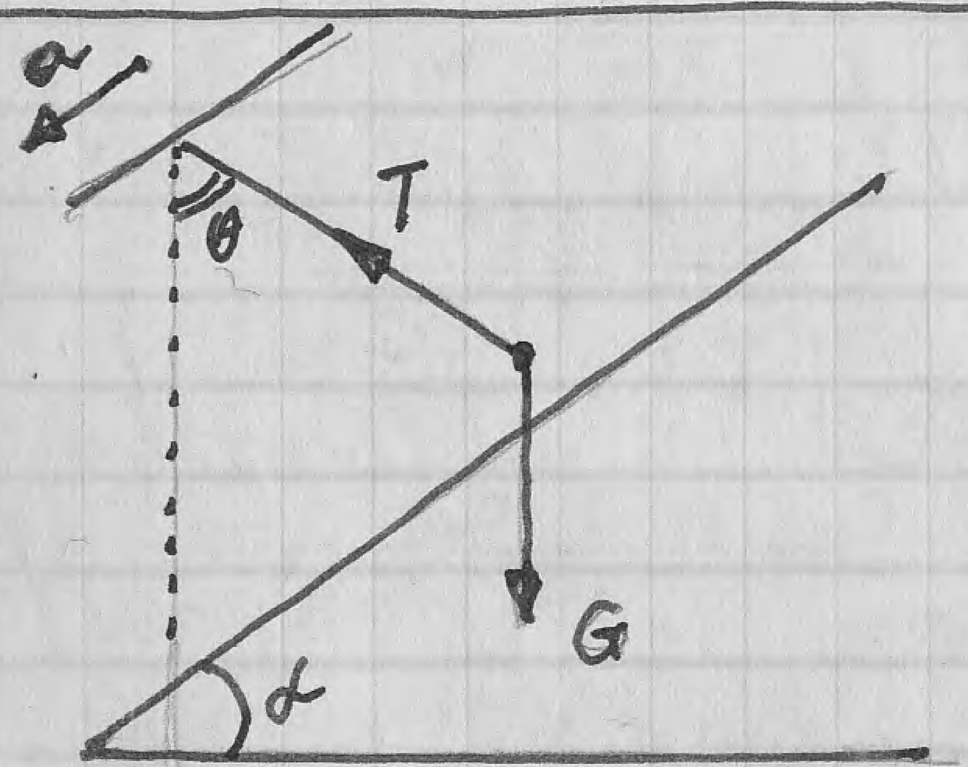
$-Ma_v=-\mu Mg$

$\boxed{a_v=\mu g}$

$T=\frac{mg}{\cos\theta}=mg\sqrt{1+tg^2\theta}=mg\sqrt{1+tg^2\varphi}$

Firul „o ia înaintea" vagonului. sau $\boxed{T=\frac{mg}{\cos\varphi}}$

e)



La urcarea pe plan în urma unui impuls inițial, vagonul urcă cu accelerația

$$a=g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

În rest problema se reduce la cazul (c). Înlocuind acest a în relația (*) avem:

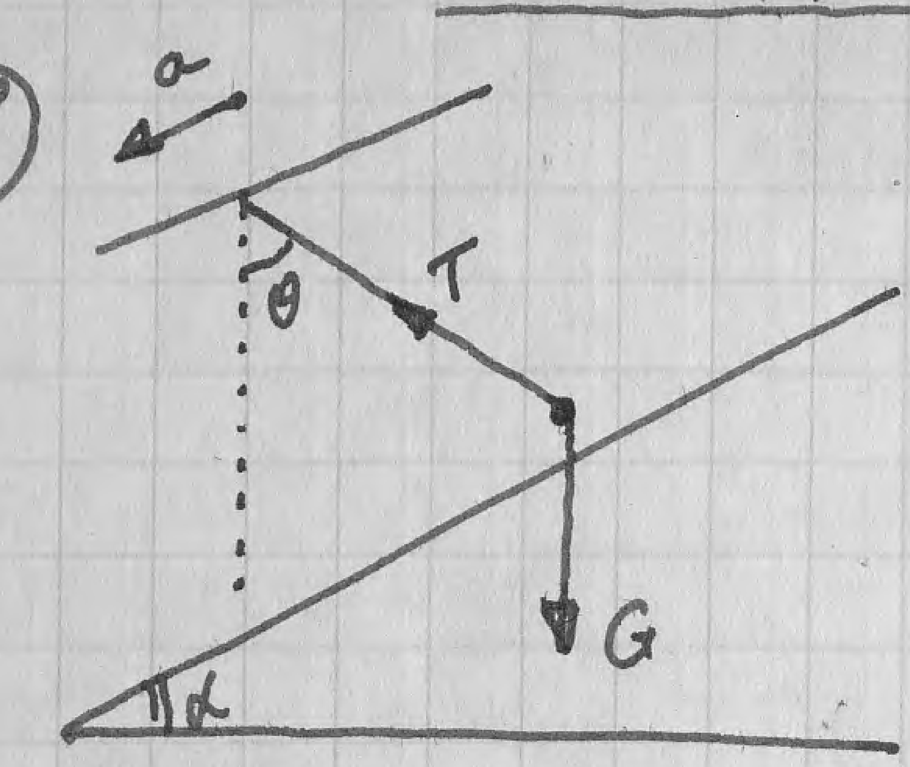
$$tg(\theta-\alpha)=-tg\alpha+\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$tg(\theta-\alpha)=\mu$; $tg(\theta-\alpha)=tg\varphi$; $\boxed{\theta=\alpha+\varphi}$

Ducând pe θ în (**) avem: $T=\frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}$

H. 1.3. 147 continuare (3)

f)



La coborârea „liberă" pe plan vagonul are accelerația

$$a=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

În rest problema se reduce la cazul (c). Înlocuind acest „a" în (*):

$$tg(\theta-\alpha)=-tg\alpha+\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$tg(\theta-\alpha)=-\mu$; $tg(\theta-\alpha)=-tg\varphi$

$tg(\alpha-\theta)=tg\varphi$; $\boxed{\theta=\alpha-\varphi}$

Ducând θ în relația (**) avem:

$$T=\frac{mg\cos\alpha}{\cos(\alpha-\varphi-\alpha)}=\frac{mg\cos\alpha}{\cos(-\varphi)}=\frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

$$\boxed{T=mg\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}}$$

•——•

1.3.148 Solutie: Krausz Ovidiu

În miscarea circulară uniformă

avem: $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R n$

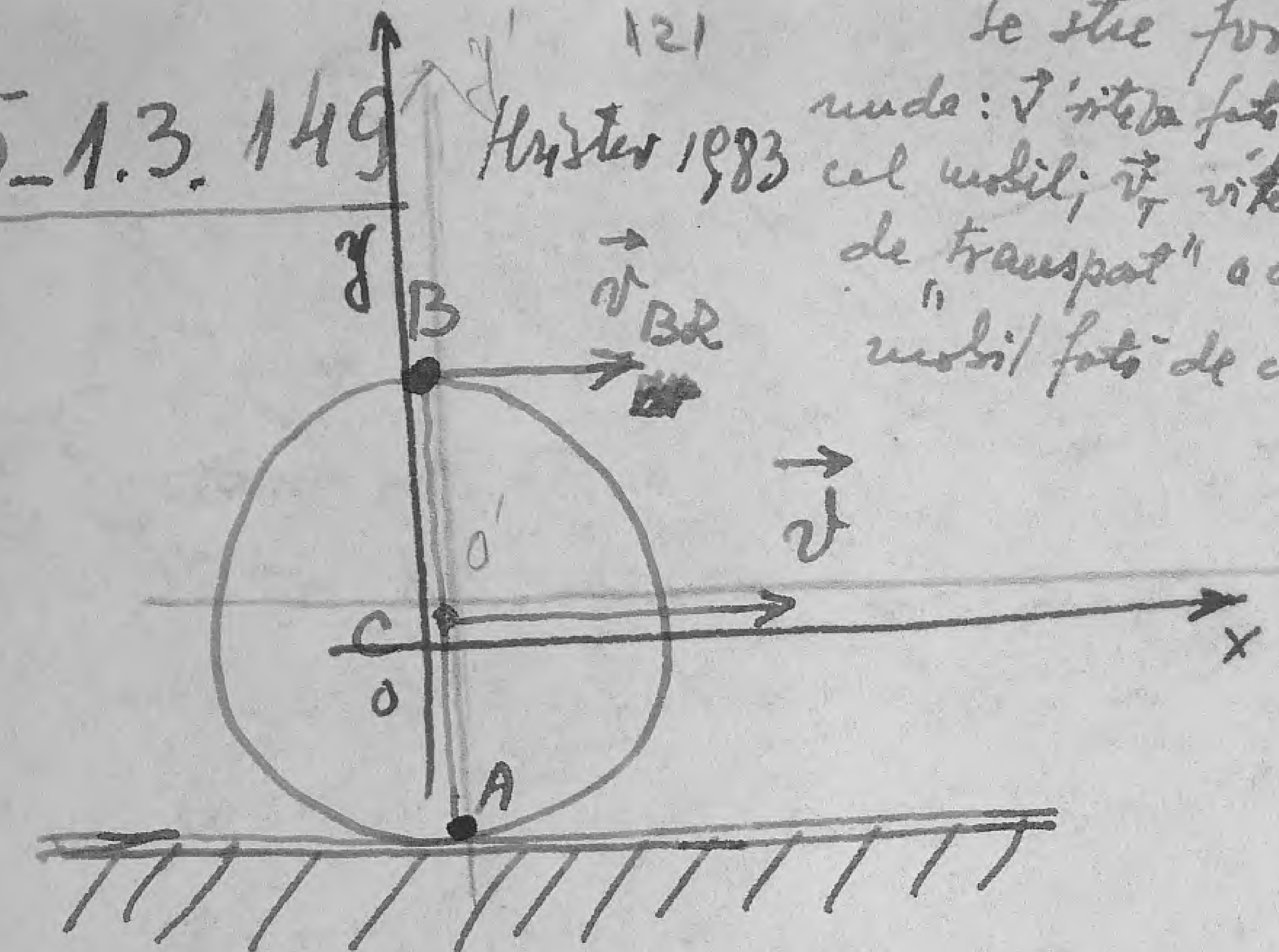
$\underline{V = \pi \cdot D \cdot n}$

Numeric $V = 3{,}14 \cdot 60 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{90}{60}$ m/s

$V = 2{,}8$ m/s

$V = 10{,}17$ Km/h

25_1.3.149 Hrister 1983



Se stie formula: $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T$ unde: $\vec{v}$ viteza fată de referenţial „fix"; $\vec{v}_R$ fată de cel mobil; $\vec{v}_T$ viteza „de transport" a celui mobil fată de cel fix.

$\vec{v}_{BR}$ viteza lui B fată de O'x'y'

$\vec{v}$ viteza lui O'x'y' fată de Oxy

$\vec{v}_{BP}$ viteza lui B fată de pământ

$\vec{v}_{BP} = \vec{v} + \vec{v}_{BR}$ proiectând-o pe Ox:

$\boxed{v_{BP} = v + v_{BR}}$ (*) Dar: $v_{BR} = \omega R$

$v_{BR} = 2\pi \nu R$

$v = 2\pi R \cdot \nu$ spatiul parcurs la o rotire ori numărul de rotiri pe secun…

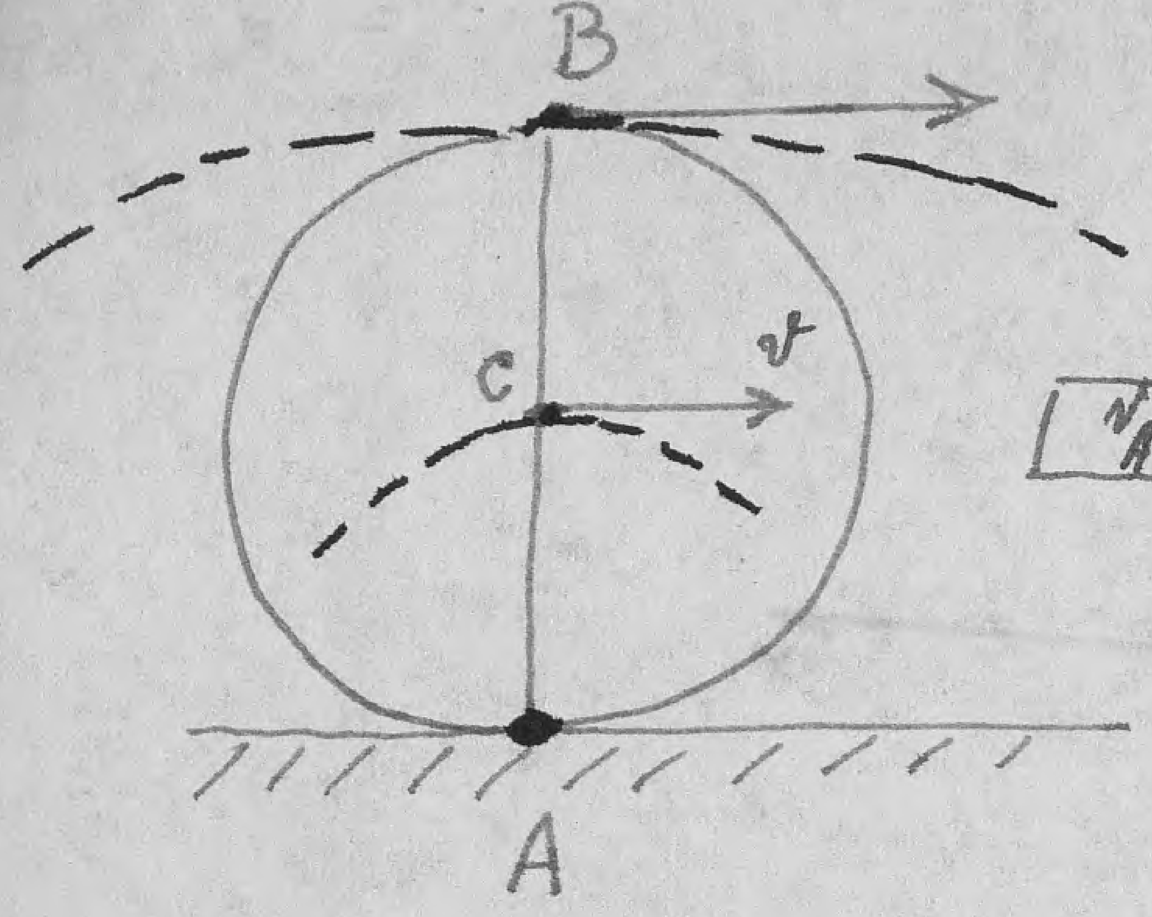
Observ: $v = v_{BR}$ Atunci în (*)

$v_{BP} = v + v$ $\boxed{v_{BP} = 2v}$

Remarc că

$\boxed{v_{AP} = 0}$ v_{AP} fiind viteza punctului A al Roţii fată de pământ

Vezi verso! Aici greu de înteles!



$\boxed{v_A=0}$

Dacă roata nu derapează punctul A este fix pe pămînt.

Pentru un moment dat (un interval st suficient de mic), B descrie un cerc de centru A şi de rază $AB = 2R$, iar C descrie un cerc de centru A şi rază $AC = R$.

Vitezele periferice ale lui B, respectiv C, pe cercurile menţionate sînt:

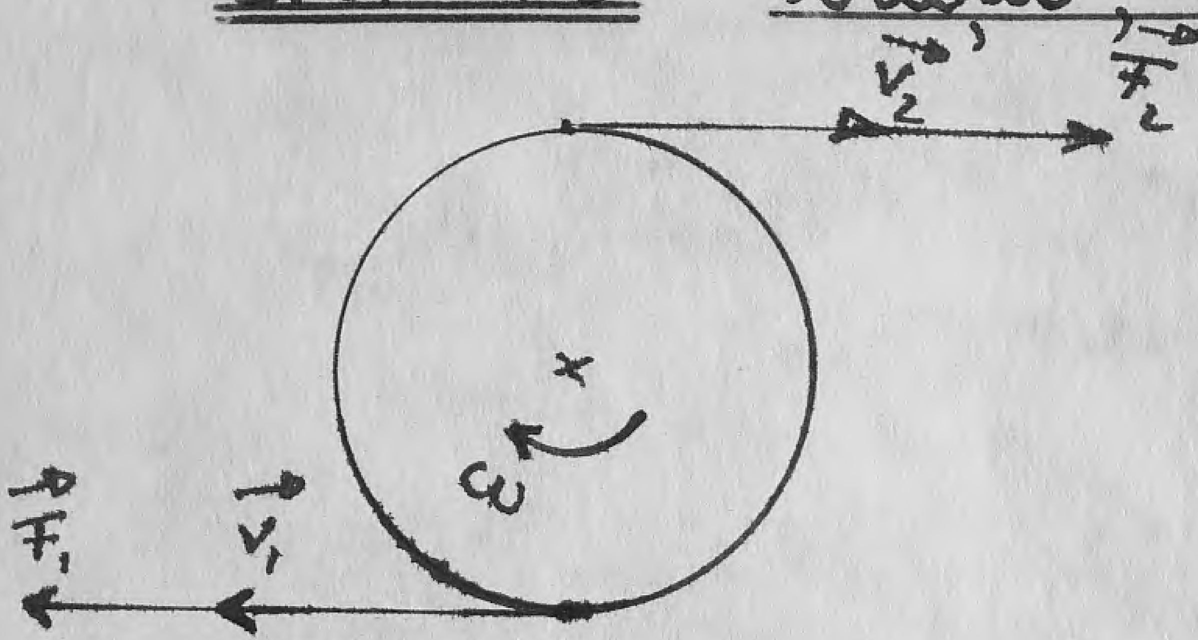
$$v_B = 2\pi AB\,\nu \;; \quad v_A = 2\pi AC\,\nu = v$$

$$v_B = 2\pi \cdot 2R\,\nu \;; \quad v_A = 2\pi R\,\nu = v$$

$$v_B = 2 \cdot 2\pi R\nu = 2v$$ Deci:

$$\boxed{v_B = 2v}$$

1.3.150 Soluție, Krausz Ovidiu



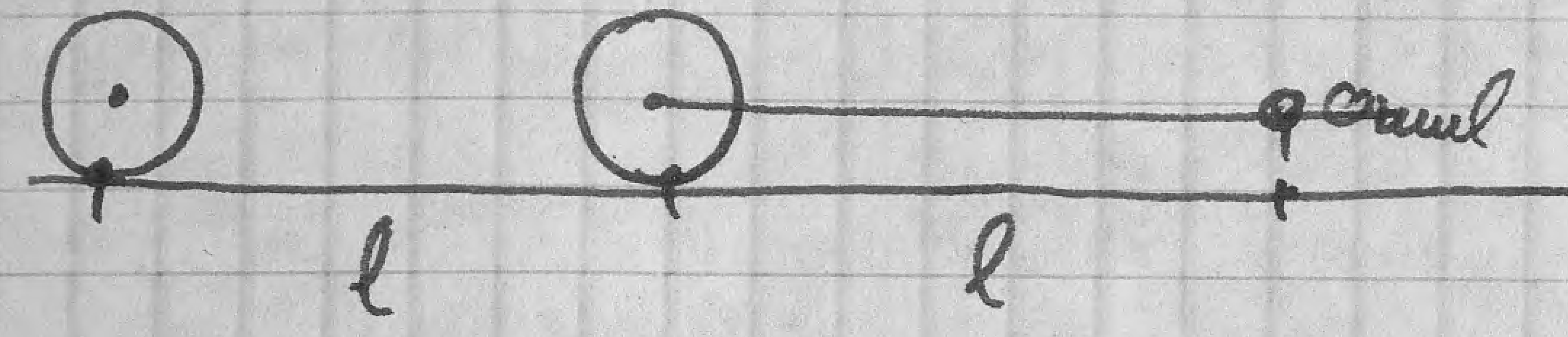
Observăm că fiecare din $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ determină rotația mosorului în jurul punctului de aplicație a celeilalte, deci o rotație de rază $2R$. Ambele forțe determină rotirea mosorului în același sens, cu vitezele unghiulare $\omega_1 = \frac{v_1}{2R}$ $\omega_2 = \frac{v_2}{2R}$ de rezultantă $\omega = \omega_1 + \omega_2$;

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2R}$$

Numeric $\omega = 30$ rad/s

H. 1.3.151

$l = 5$ m ; $d = ?$



În timpul deplasării omului tăvălugul se rostogolește pe o distanță egală cu lungimea sforii, care se „așterne" pe pământ odată cu circumferința tăvălugului. Distanța totală d parcursă de om va fi

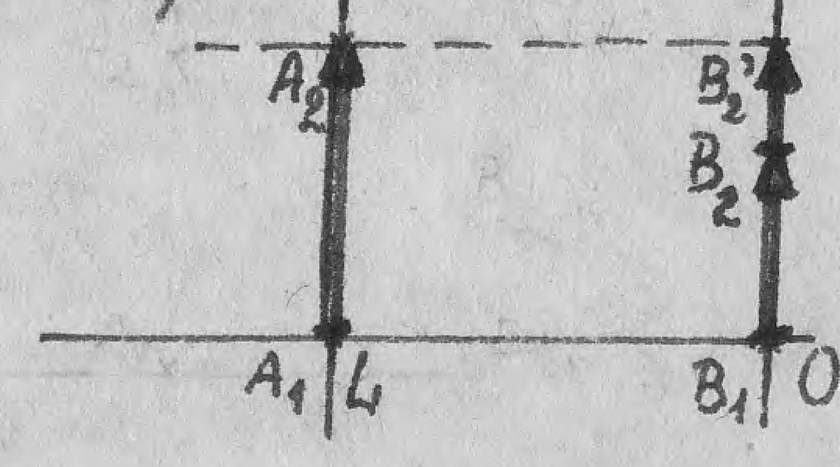
$$d = 2l = 10 \text{ m}.$$

1.3.155 Soluție, Krausz Ovidiu, X A

Notații:

R_{PL} distanța de la centrul Pământului la Lună; R_P raza Pământului; T_L perioada de revoluție a Lunii în jurul Pământului; T_P perioada de rotație a Pământului în jurul axei proprii; v_L viteza tangențială a Lunii pe orbita circumterestră; v_P viteza unui punct O de pe Pământ în rotația diurnă a Pământului.

Vom considera că la un moment t_0 Luna și un punct O de pe Pământ în care se află un observator se găsesc în punctele A_1, respectiv B_1. După o secundă Luna se va afla pe orbita ei în A_2, iar observatorul pe orbita lui în B_2. Timpul de o secundă fiind foarte scurt, putem considera arcele descrise ca identice cu segmentele paralele A_1A_2 și B_1B_2. Evident:



$v_L = A_1A_2$; $v_P = B_1B_2$

cu $v_L = \frac{2\pi R_{PL}}{T_L}$ și $v_P = \frac{2\pi R_P}{T_P}$

Cum $\frac{v_L}{v_P} = \frac{R_{PL}}{R_P}\cdot\frac{T_P}{T_L} = \frac{384\cdot 10^6}{64\cdot 10^5}\cdot\frac{24\cdot 60^2}{28\cdot 24\cdot 60^2} = 2,14 > 1$

rezultă că $v_L > v_P$ și umbra Lunii după o secundă va fi în B_2' pe orbita punctului O (observatorului). Față de observatorul O umbra lunii se va deplasa în sensul de rotație diurnă a Pământului cu viteza v_{UO} dată de:

$v_{UO} = B_2B_2'$; $v_{UO} = v_L - v_P$ sau

$$v_{UO} = \frac{2\pi R_{PL}}{T_L} - \frac{2\pi R_P}{T_P} = 2\pi\left(\frac{R_{PL}}{T_L} - \frac{R_P}{T_P}\right)$$

Numeric: $v_{UO} = 2\cdot 3,14\left(\frac{384\cdot 10^6}{28\cdot 24\cdot 60^2} - \frac{64\cdot 10^5}{24\cdot 60^2}\right)$

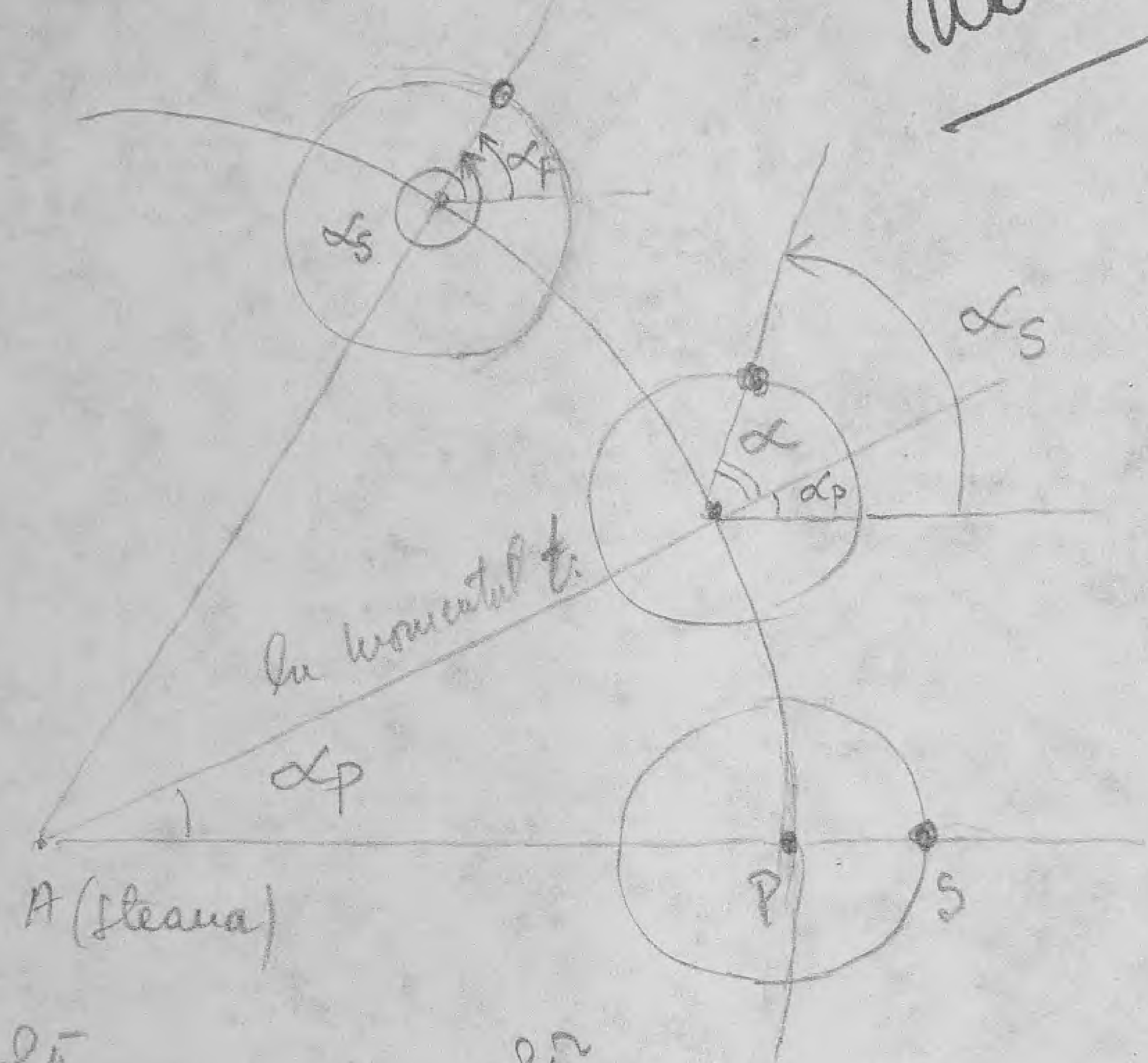
$$v_{UO} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 64\cdot 10^5}{24\cdot 60^2}\left(\frac{60}{28} - 1\right)$$

$$v_{UO} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 2\cdot 10^3}{3\cdot 9}\cdot\frac{8}{7} = 531,64 \text{ m/s}.$$

125

26-1.3.156 Hunter 1983

nedeterminată



$\alpha_P = \frac{2\pi}{T}$; $\alpha_S = \frac{2\pi}{T'}$

Fie t_r perioada de timp după care se repetă eclipsa satelitului.

La un moment t:

$\alpha = \alpha_S - \alpha_P$

A doua eclipsă a satelitului are loc când $\alpha = 2\pi$

Adică

$$\alpha_S - \alpha_P = 2\pi$$

$$\omega_S t_r - \omega_P t_r = 2\pi$$

$$t_r\left(\frac{2\pi}{T'} - \frac{2\pi}{T}\right) = 2\pi$$

$$t_r\,\frac{T-T'}{TT'} = 1$$

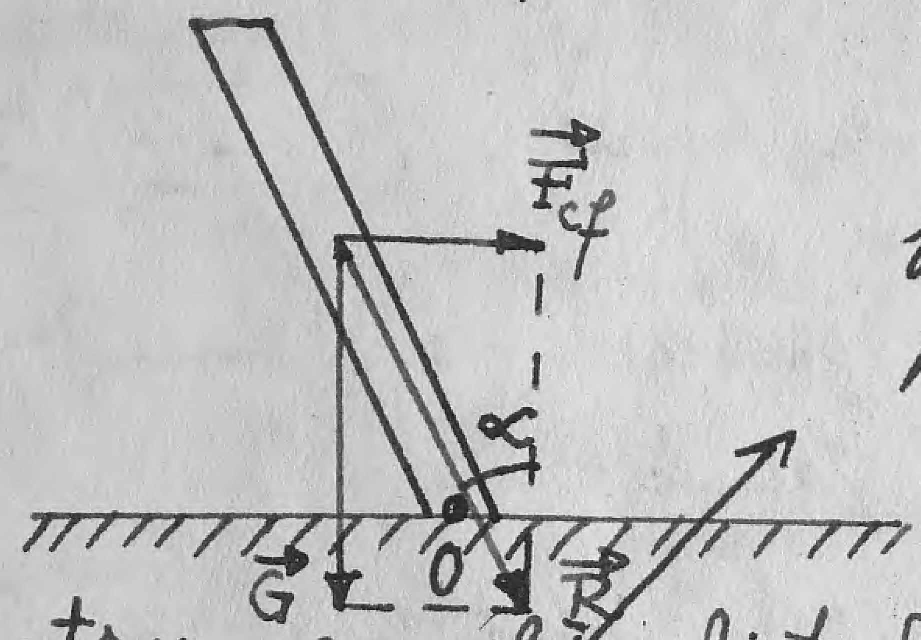
$$\boxed{t_r = \frac{TT'}{T-T'}}$$

$$t = \frac{b}{v}\left\{n\alpha + \frac{\pi}{2}\left[n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1\right]\right\}$$

$$t = \frac{b}{v}\left[n\alpha + \frac{\pi}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{nb}{v}\left[\alpha + \frac{\pi}{4}(n+1)\right]$$

Numeric: $t = \frac{10 \cdot 0{,}2}{10}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \cdot 11\right) = 1{,}831\,s$

1.3.158 Soluție: Krausz Ovidiu



adică să nu se răstoarne prin rotire în jurul lui O, punctul de sprijin pe pământ

Pentru ca biciclistul să-și mențină echilibrul, trebuie ca rezultanta dintre forța de greutate $\vec{G}$ și forța centrifugă $\vec{F}_{cf}$ să fie conținută în planul bicicletei:

$$tg\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m v^2}{R} \cdot \frac{1}{m g}$$

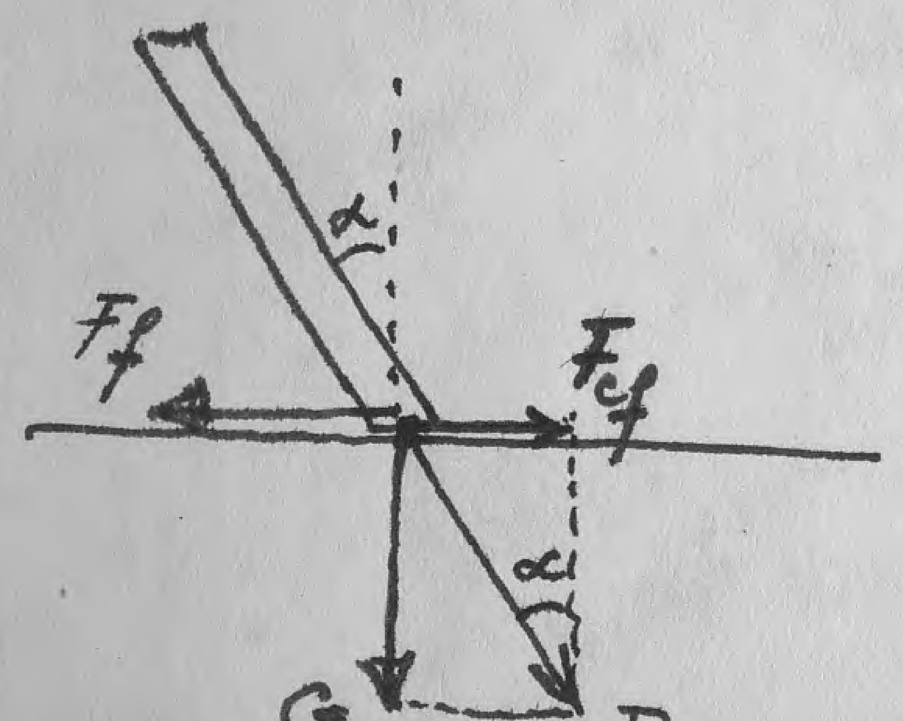
$$tg\,\alpha = \frac{v^2}{R g}$$

$$\boxed{R = \frac{v^2}{g\,tg\,\alpha}} \quad (1)$$

A doua condiție ce trebuie îndeplinită este ca

~~Numeric: R = 7,85 m~~

bicicleta să nu derapeze în O, sub acțiunea lui R și a lui F_f. Pentru aceasta este necesar:



$$F_f \geq F_{cf}$$

$$\mu m g \geq \frac{m v^2}{R}$$

$$\mu g \geq \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{R \geq \frac{v^2}{\mu g}} \quad (2)$$

Relațiile (1) și (2) trebuie să

fie simultan îndeplinite. Așadar, din ele:

$$\frac{v^2}{g\,tg\alpha} \geq \frac{v^2}{\mu g} \; ; \; \frac{1}{tg\alpha} \geq \frac{1}{\mu} \; ; \; tg\alpha \leq \mu \; ; \; tg\alpha \leq tg\varphi$$

unde φ este unghiul de frecare. $\boxed{\alpha \leq \varphi}$ (3)

și $\boxed{R = \frac{v^2}{g\,tg\alpha}}$ (1) trebue simultan satisfacute.

La aceeași viteză v, din (1) rezultă că R va fi minim pentru α maxim. Din (3) rezultă că $\alpha = \alpha_M$ este maxim pentru

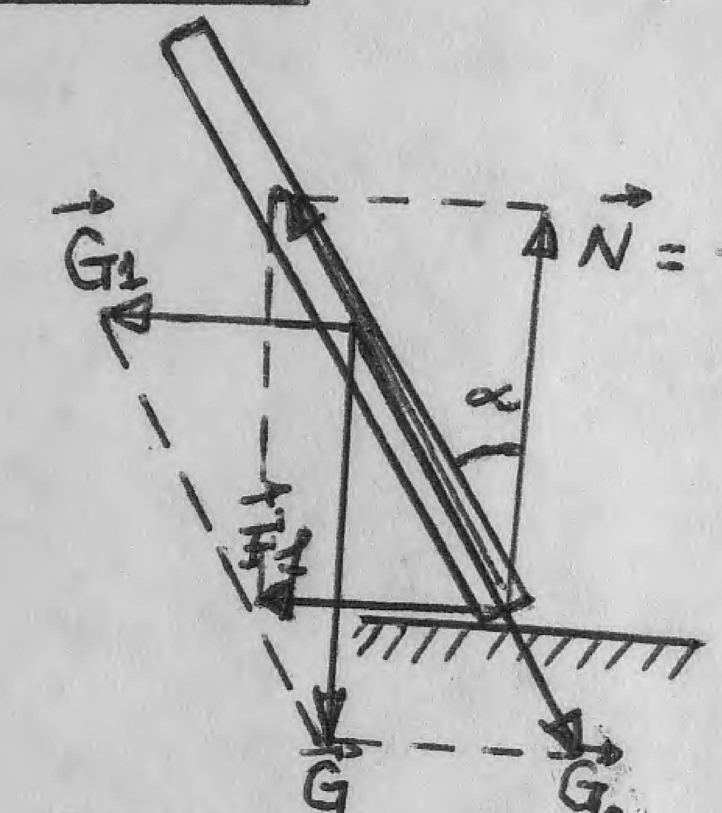
$$\boxed{\alpha_M = \varphi} \quad (4)$$

Așadar: $$\boxed{R_{min} = \frac{v^2}{g\,tg\alpha_M}} \quad (5)$$

Observații

1. Unghiul maxim de înclinare față de verticală este egal cu unghiul de frecare.
2. La aceeași viteză, raza minimă de viraj se realizează pentru unghiul maxim de înclinare.

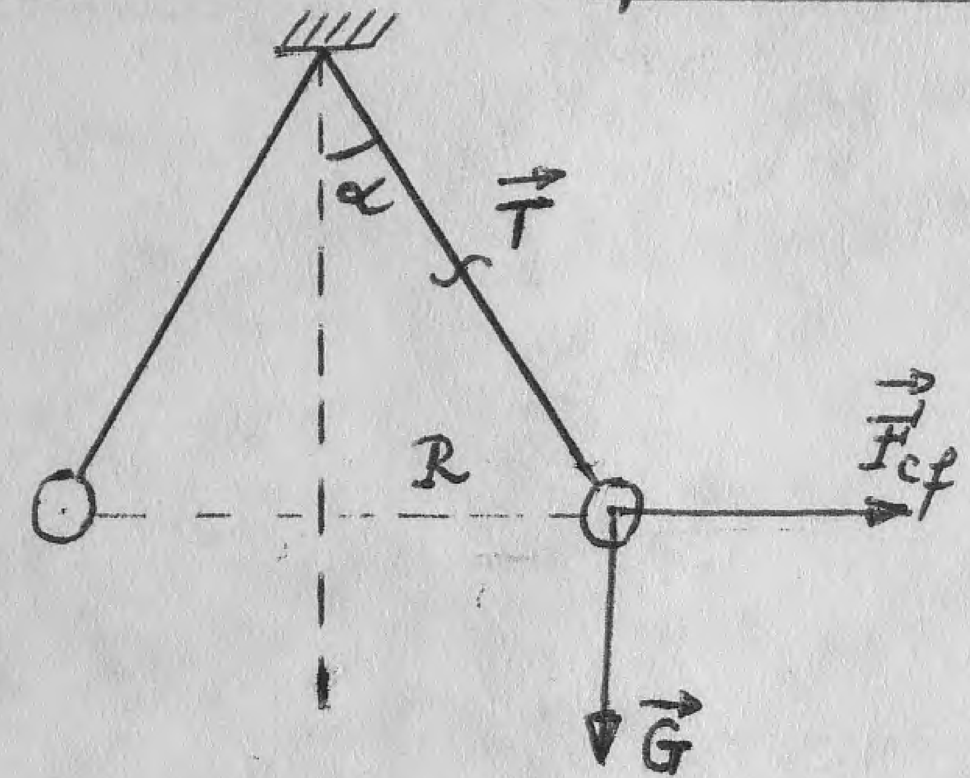
1.3.161

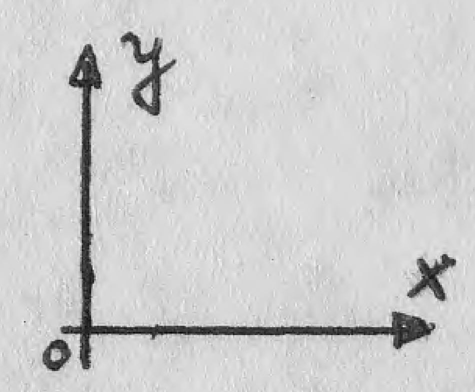


Inclinîndu-se pentru a cădea, va apărea o componentă $\vec{G_1}$ orizontală a greutății care curbează traictoria: $G_1 = G\,tg\,\alpha$. Cealaltă componentă $\vec{G_2}$ a lui $\vec{G}$ este în planul monedei înclinate, trece prin punctul de contact cu masa și este echilibrată de reacțiunea normală $\vec{N}$ a mesei și forța de frecare $\vec{F_f}$

$$\vec{G_2} + \vec{N} + \vec{F_f} = 0$$

1.3.162 Soluţie: Krausz Ovidiu





Analizînd echilibrul instabil din figură avem: $\vec{T} + \vec{F}_{cf} + \vec{G} = 0$

Proiectînd pe cele 2 axe avem: ox: $-T\sin\alpha + F_{cf} = 0$
oy: $T\cos\alpha - G = 0$

$$T\sin\alpha = F_{cf} \qquad T\cos\alpha = G$$

$$\Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg}$$

$$R = l\sin\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{v^2}{gl\sin\alpha}$$

$$v = 2\pi R n = 2\pi l \sin\alpha \cdot n$$

$$tg\,\alpha = \frac{4\pi^2 \cdot l^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot n^2}{gl\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2 n^2 l}$$

Numeric: $\cos\alpha = 0{,}5$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

1.3.168 Soluţie, Krausz Ovidiu

Deoarece forţa centrifugă este numeric egală cu $F_{cf} = m\omega^2 R$ iar greutatea picăturii $G = mg$ raportul F/G este egal cu: $\frac{F}{G} = \omega^2 \cdot \frac{R}{g}$

Dar $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$, expresia anterioară devine $\frac{F}{G} = 4\pi^2\nu^2 \cdot \frac{R}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 R}{t^2 g}$

Numeric: $\frac{F}{G} = 4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 400 \cdot \frac{0{,}2}{9{,}8}$

$$\frac{F}{G} = 320$$

<u>Obs</u>: În Culegere: $\frac{F_{cf}}{G} = \frac{4\pi^2 n^2 R}{g} = 320$

este greşit. Calculul nu dă 320.

27 — 1.3.168 Hristev 1983 [131]

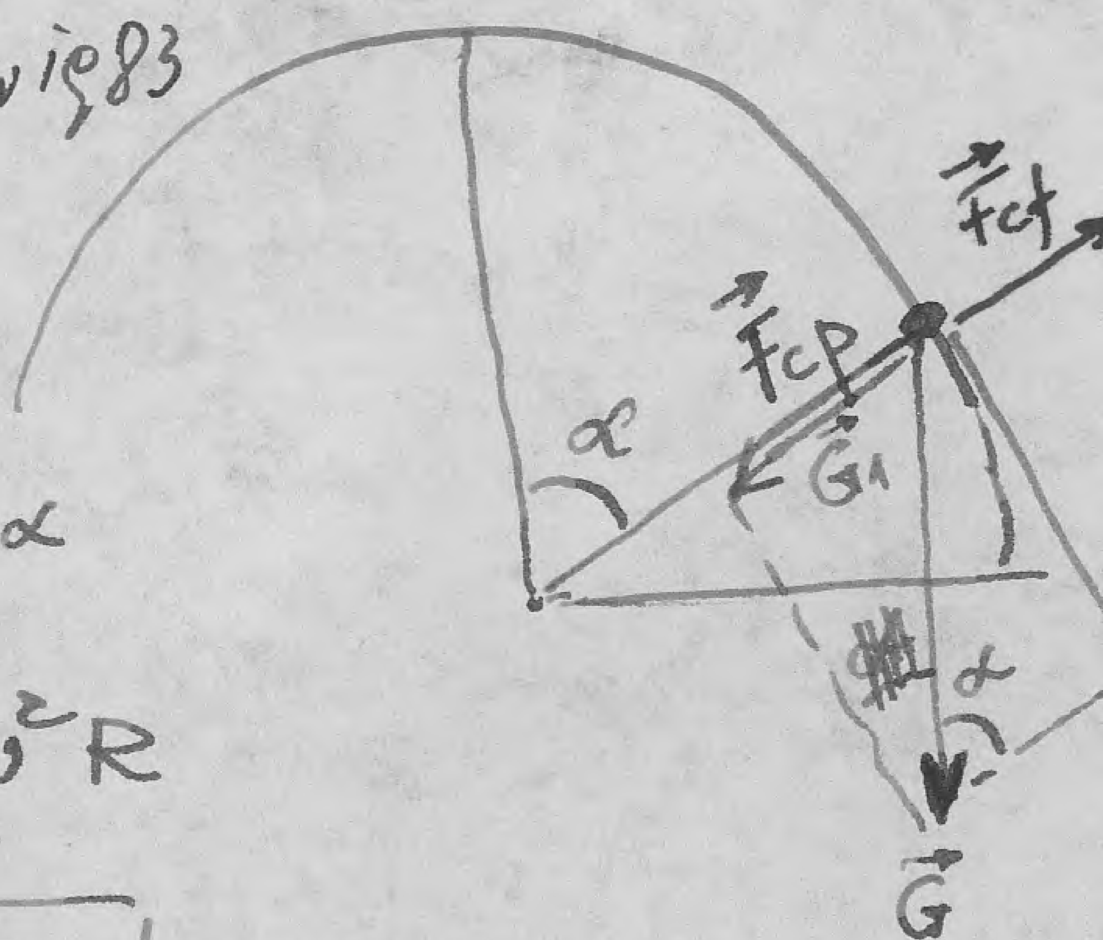
$n = 1200$ rot/min
$R = 20$ cm $= 0{,}2$ m
$t = 60$ s

$$\frac{F_{cf}}{G} = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{m\cdot 4\pi^2/T^2 \cdot R}{m g} = \frac{4\pi^2 \frac{n^2}{t^2} R}{g}$$

$$\boxed{\frac{F_{cf}}{G} = \frac{4\pi^2 n^2 R}{t^2 g}} \simeq \frac{4\cdot 10\cdot 144\cdot 10^4\cdot 0{,}2}{36\cdot 10^2\cdot 10} = \cancel{64}\ 320$$

$$\frac{F_{cf}}{G} = 320$$ În carte $$\frac{F_{cf}}{G} = \frac{4\pi^2 n^2 R}{g} = 32$$

27 — 1.3.171 Hristev 1983



$v = ?$
$R = 50$ m
$\alpha = 60^\circ$
$p = 0$

$G_1 = G\cos\alpha$
$G_1 = mg\cos\alpha$
$F_{cp} = m\omega^2 R$

$p = 0$ dacă $\boxed{G_1 = F_{cp}}$ caz în care F_{cp} curb

Traiectoria și din G_1 nu rămâne nimic pentru a apăsa podul (altfel apasă G_1 ste echilibr de F_{cf}).

$mg\cos\alpha = m\omega^2 R$; $\frac{v^2}{R^2}\cdot R = g\cos\alpha$; $v = \sqrt{Rg\cos}$

27 – 1.3172 Hristev 1983

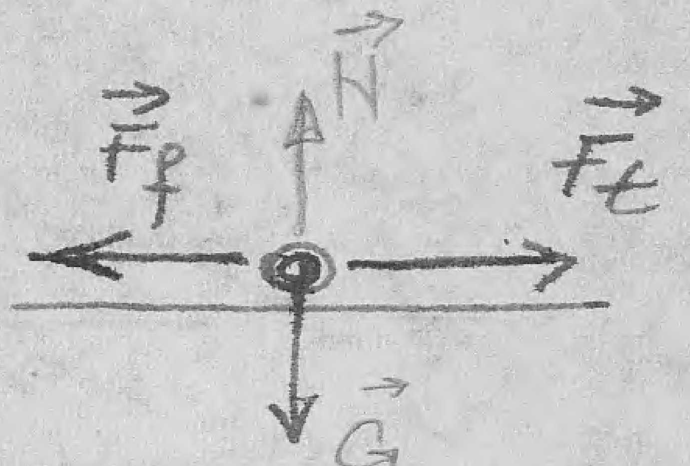
$F_{max} = 15\,kN$

$F'_{max} = ?$

vezi rezolvarea completă

$v = 72\,km/h$

$R = 40\,m$

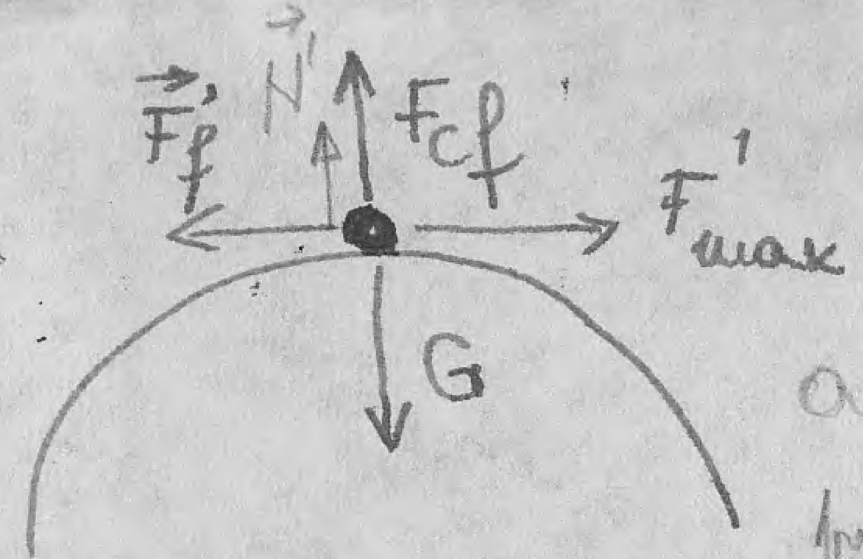


Camionul se presupune că merge uniform la viteza de regim, deci

$$F_{max} = F_f$$

$$F_{max} = \mu m g$$

a)



De ce am ales aici poziția camionului pentru forța de tracțiune maximă?

$$F'_{max} = F'_f$$

$$F'_{max} = \mu(G - F_{cf})$$

$$F'_{max} = \mu\left(mg - \frac{mv^2}{R}\right)$$

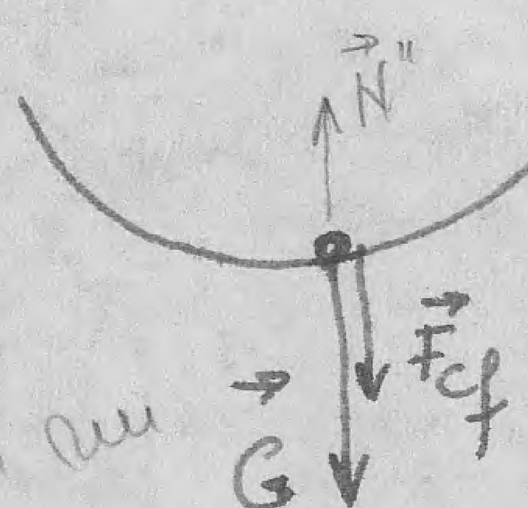
$$F'_{max} = \mu mg - \mu\frac{mv^2}{R}$$

$$F'_{max} = F_{max} - \frac{v^2}{Rg}\mu mg$$

$$F'_{max} = F_{max} - \frac{v^2}{Rg}F_{max}$$

$$\boxed{F'_{max} = F_{max}\left(1 - \frac{v^2}{Rg}\right)}$$

b)



nici aici nu înțeleg alegerea poziției

$F''_{max} = \mu(G + F_{cf})$ se găsește analog

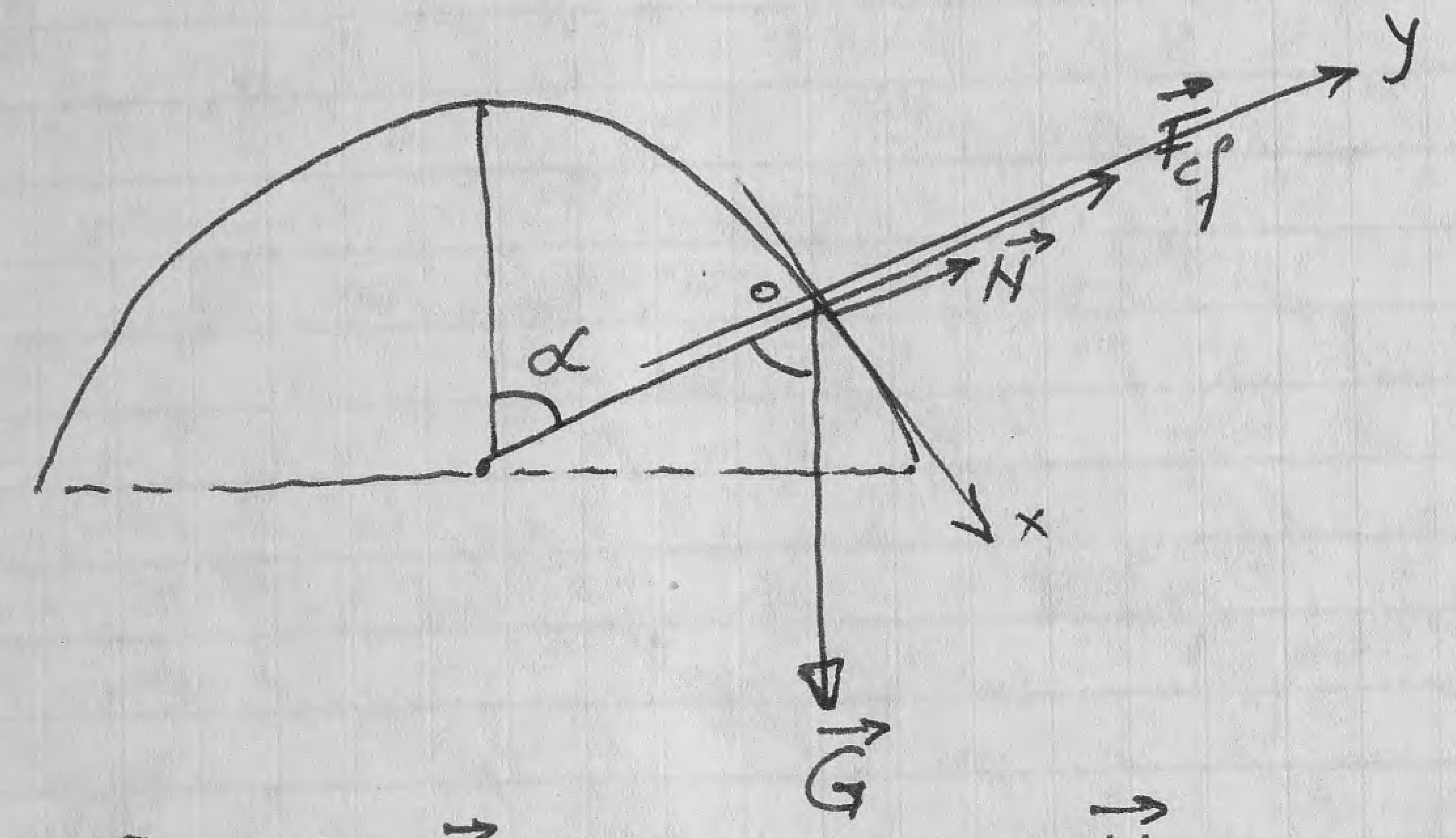
$$\boxed{F''_{max} = F_{max}\left(1 + \frac{v^2}{Rg}\right)}$$

sau

$$\boxed{F''_{max} = F_{max}\left(1 \mp \frac{v^2}{Rg}\right)}$$

H. 1.3.171

$R = 50\,m$; $\alpha = 60°$; $N = 0$; $v = ?$

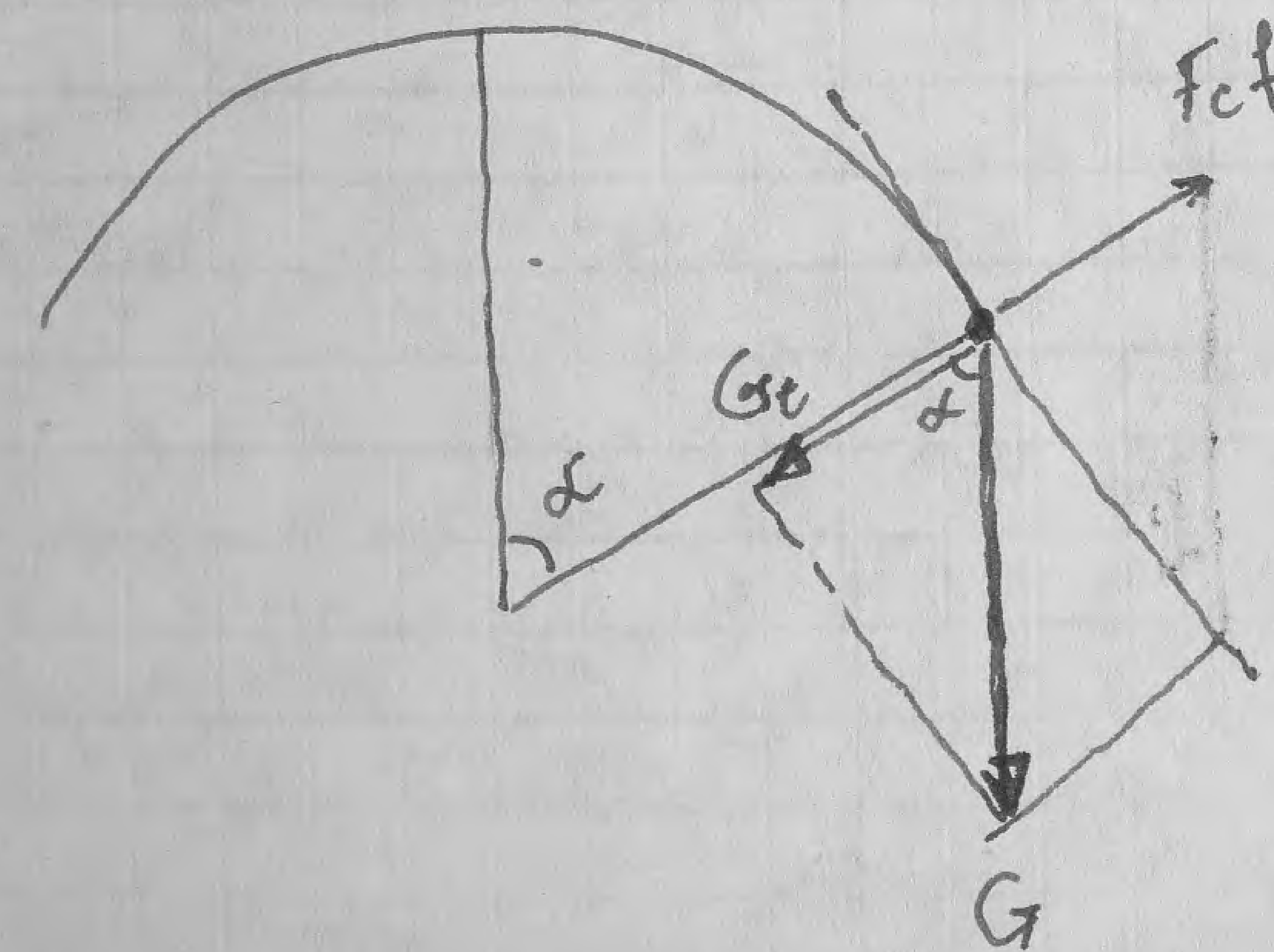


$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{cf} = 0$ cum $\vec{N} = 0$ avem:

$$Ox:\ -mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R} = 0$$

$$v^2 = Rg\cos\alpha \qquad \boxed{v = \sqrt{Rg\cos\alpha}}$$

Altă soluție



Cum $N = 0$ este necesar:

$$F_{cf} = G_t$$

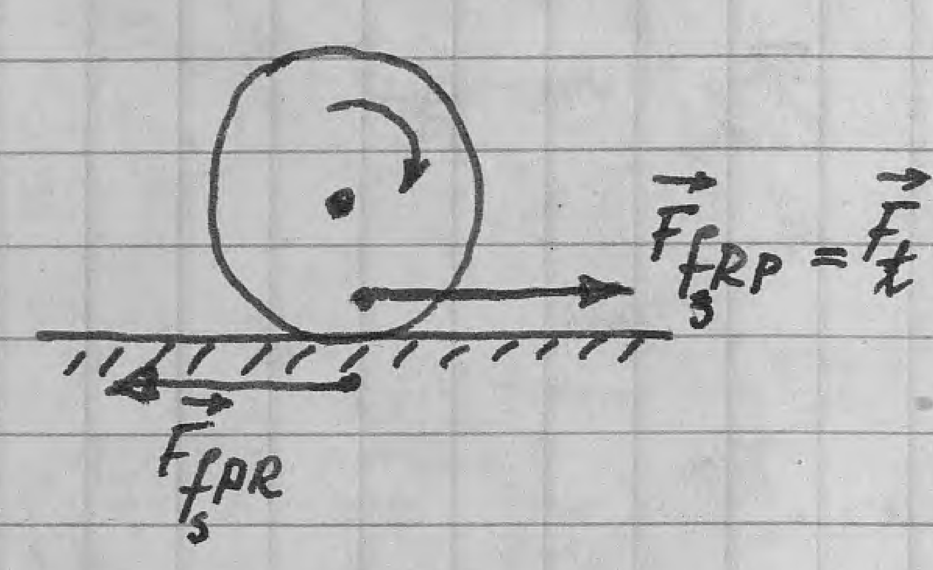
$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha$$

$$v = \sqrt{Rg\cos\alpha}$$

H. 1.3. 172

$F_{tM} = 15\,kN$; $v = 72\,km/h$; $R = 40\,m$

$F'_{tM} = ?$



F_{f_s} este frecarea statică.

F_f este frecarea dinamică

$F_{f_s} \le F_f$

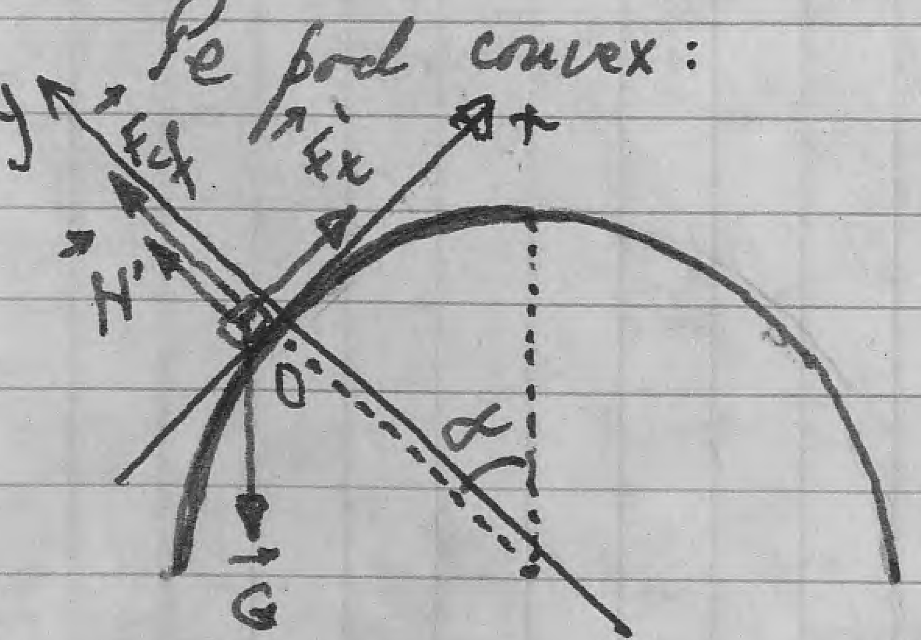
Frecarea dinamică este realizată atunci când are loc derapare. Prin urmare derapare limitează superior forța de tracțiune:

$F_t \le F_f = \mu m g$

Pe drum orizontal

$F_{tM} = F_f = \mu m g$

Pe pod convex:



$v = ct \Rightarrow \vec{F}'_a = 0$. Față de un reper legat de camion:

$\vec{G} + \vec{N}' + \vec{F}_{cf} + \vec{F}''_t = 0$

$oy: \; -mg\cos\alpha + N' + \frac{mv^2}{R} = 0$

$N' = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{R} = mg\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{Rg}\right)$ $\quad \cos\alpha \ge \frac{v^2}{Rg}$ condiție

Dar $\quad F'_{tM} = F'_f = \mu N' = \mu m g\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{Rg}\right)$

$\boxed{F'_{tM} = F_{tM}\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{Rg}\right)}$ Aceasta este forța de tracțiune maximă în punctul O pentru care raza face unghiul α cu verticala.

Cea mai mare valoare a lui F'_{tM} se va obține în punctul pentru care $\cos\alpha = 1$, deci când $\alpha = 0$, adică camionul este în vârful podului:

$F'_{tM} = F_{tM}\left(1 - \frac{v^2}{Rg}\right)$ dacă $v^2 < Rg$ având $F'_{tM} \ge 0$

Observații: 1) Se tratează analog situația la „coborârea" pe pod, găsindu-se același rezultat.

2) Se tratează coborârea și urcarea pe podul concav, găsindu-se:

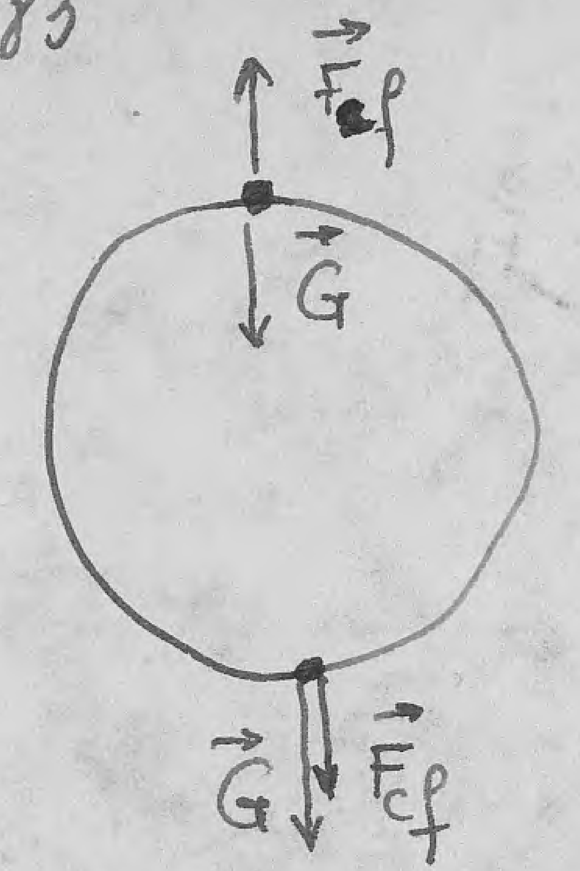
$$F'_{EM} = F_{EM}\left(1+\frac{v^2}{Rg}\right)$$

27 – 1.3.17 3 Hristev 1983

$m = 70\ kg$

$R = 800\ m$

$v = 720\ km/h$



a) $F_s = ?$

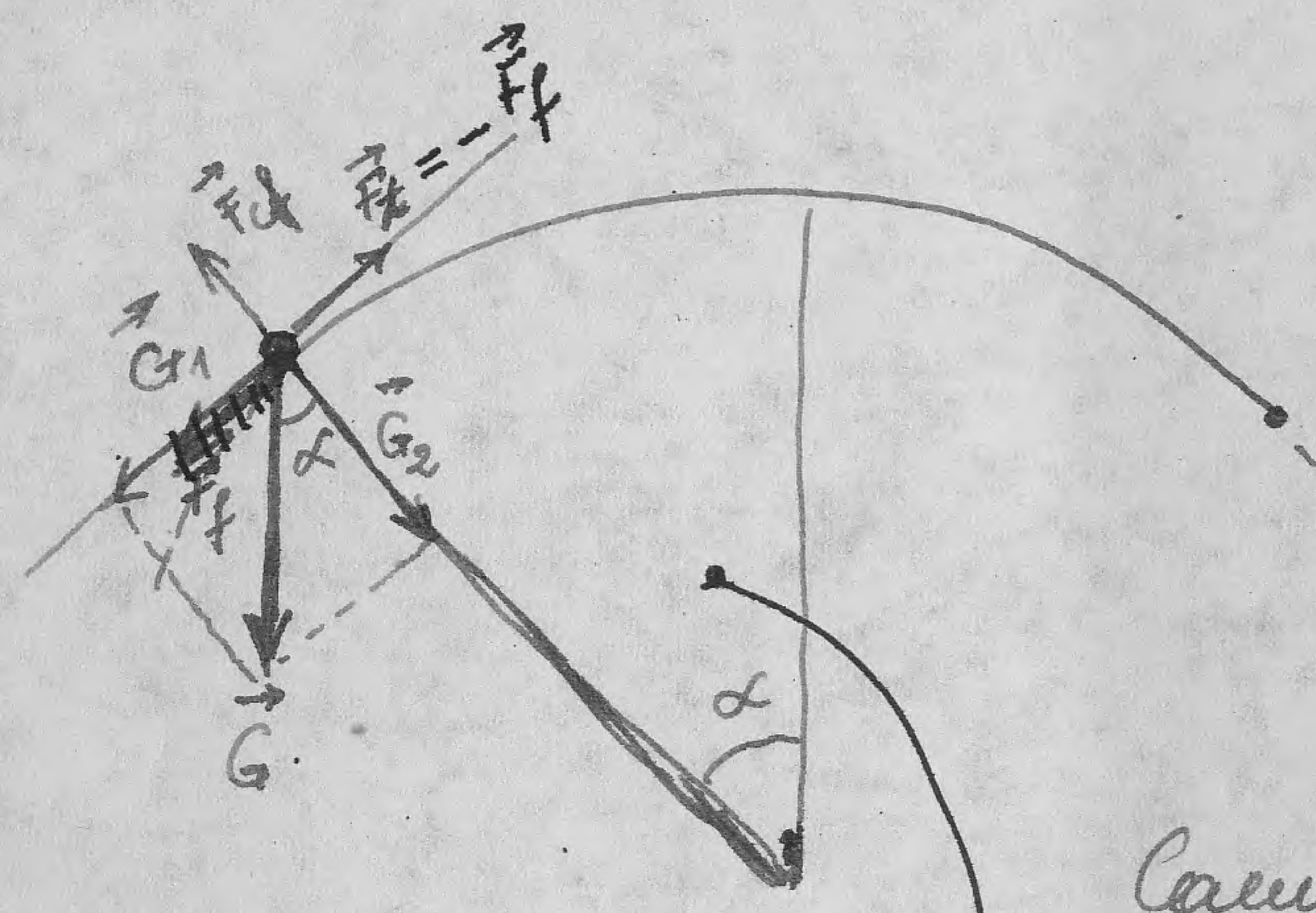
b) $F_i = ?$

$$F_s = F_{cf} - G = \frac{mv^2}{R} - mg =$$

$$F_i = F_{cf} + G = \frac{mv^2}{R} + mg$$

$$\boxed{F = \frac{mv^2}{R} \mp mg}$$

27 – 1.3.174 Hristev 1983



$\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{R} = \frac{l}{2R}$

$G_t = G\sin\alpha$

$G_n = G\cos\alpha$

$N = G_n - F_{cf}$

$F_f = \mu N = \mu(G_n - F_{cf})$

$\vec F_t = -\vec F_f$

Camionul se deplasează uniform dacă

$\vec G_t = -\vec F_t$ sau

$G_t = F_f$ adică:

$mg\sin\alpha = \mu(mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{R})$

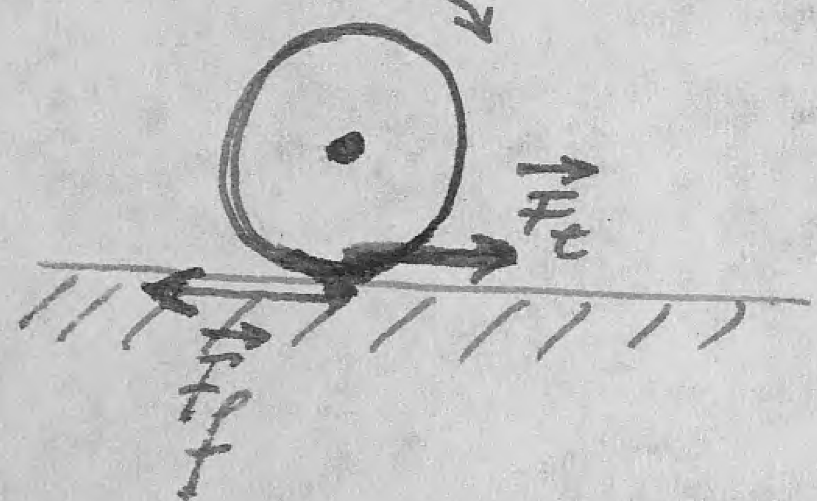
$mg\sin\alpha = \mu m(g\cos\alpha - \frac{v^2}{R})$

$g\sin\alpha = \mu g\cos\alpha - \frac{\mu v^2}{R}$

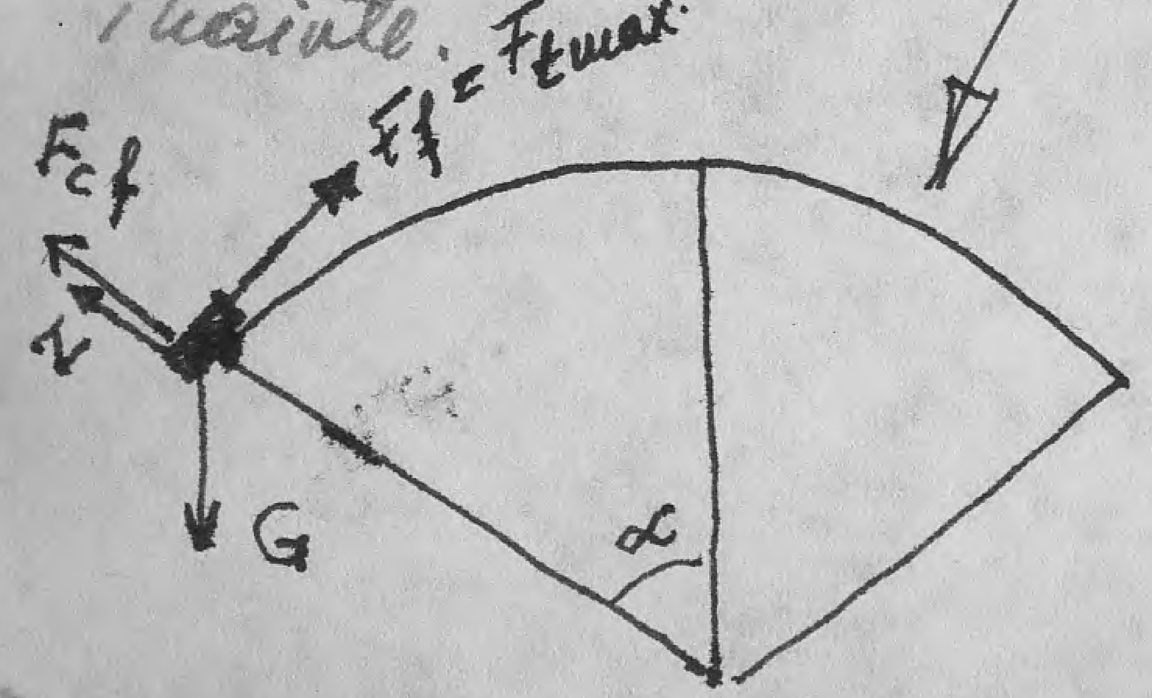
$\frac{\mu v^2}{R} = \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha$

$v^2 = \frac{Rg}{\mu}(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$

$$\boxed{v = \sqrt{Rg\left(\cos\frac{l}{2R} - \frac{1}{\mu}\sin\frac{l}{2R}\right)}}$$



La rostogolirea fără alunecare a unei roți forța de frecare $\vec F_f$ este aplicată de roată asupra pământului, iar pământul aplică roții forța $\vec F_t = -\vec F_f$ care trage vehiculul înainte.



135

27 – 1.3.175 Hristev 1983

Fie v viteza camionului când vede șoseaua barată și d distanța la obstacol.

a) $F_f = \mu mg$; $F_a = F_f$; $ma = \mu mg$; $a = \mu g$

$v^2 = 2ad$; $a = \frac{v^2}{2d}$; $\mu = \frac{a}{g}$; $\mu = \frac{v^2}{2dg}$

$F_f = \frac{v^2}{2dg} mg$; $\boxed{F_f = \frac{mv^2}{2d}}$ forța de frecare care oprește camionul pe d.

b) $F_{cf} = \frac{mv^2}{d}$ este forța centrifugă în cazul virajului de rază d, spre a ocoli (feri) obstacolul.

Observăm $\frac{F_{cf}}{F_f} = \frac{mv^2}{d}\cdot\frac{2d}{mv^2} = 2$

$F_{cf} = 2F_f$

Așadar, o forță de frecare în deplasare rectilinie de două ori mai mică decât cea centripetă are același rezultat de evitare a pericolului.

Cum forța centripetă se exercită tot prin intermediul frecării dintre roți și șosea, riscul derapării și deci al ciocnirii este de două ori mai mare în cazul virajului.

Este deci mai bine a frâna f… virare.

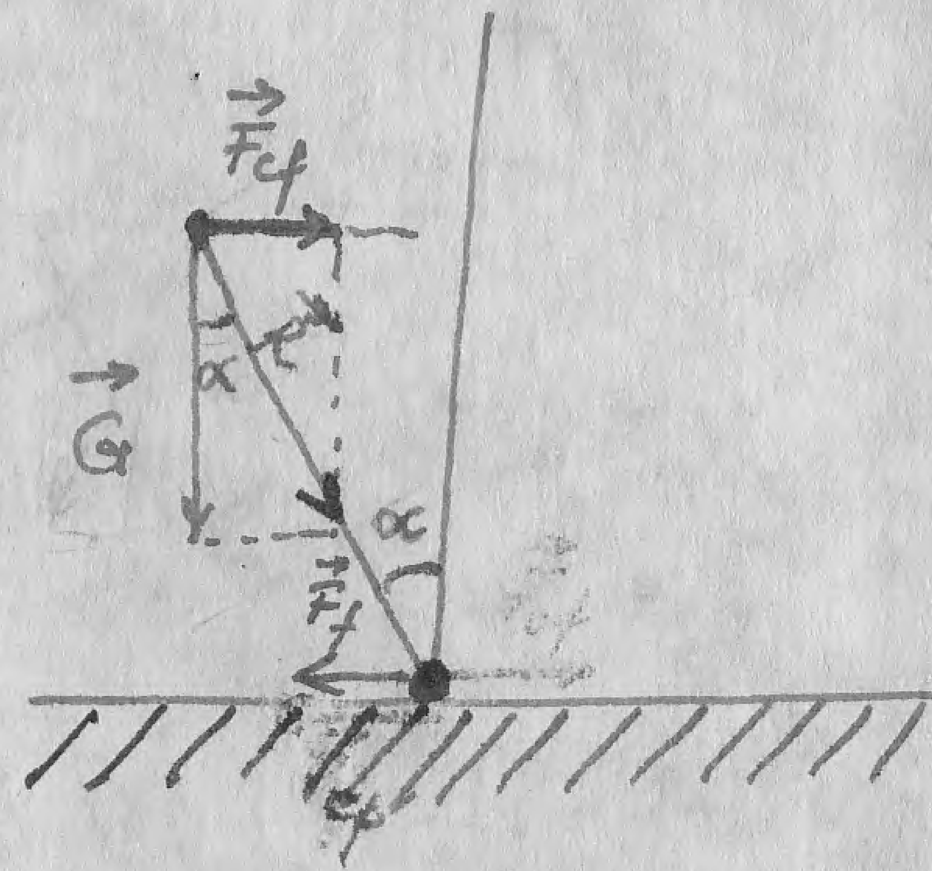
27 – 1.3.177 Hristev 1983

$v = 36\ km/h$

$\mu = 0,1$

$\alpha = ?$

$R = ?$



Patinatorul nu „cade" dacă forța rezultantă $\vec R = \vec G + \vec F_{cf}$ trece prin punctul de sprijin (ea nu are în acest caz ca efect rotirea în jurul punctului de sprijin - lucru pentru care ar trebui să cunosc noțiunea de moment al unei forțe $\vec R$).

Unghiul α este maxim când $F_{cf} = F_f$. Deci

$$tg\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{F_f}{G} = \frac{\mu mg}{mg} = \mu \qquad \boxed{tg\,\alpha = \mu}$$

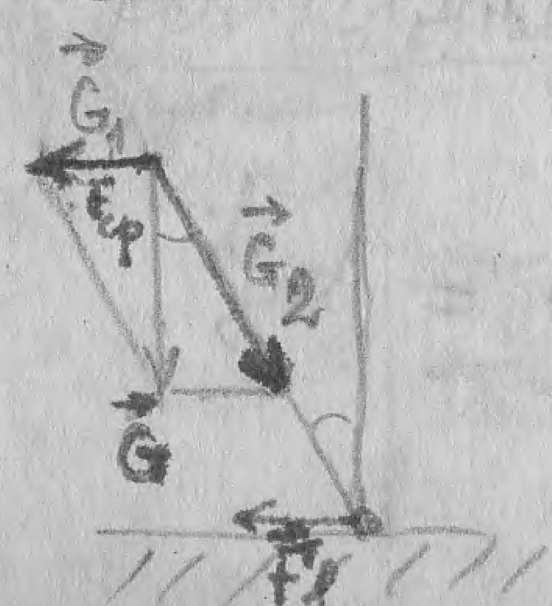
Dacă $F_{cf} > F_f$ s-ar produce derapajul.

Din $F_{cf} \leq F_f$ avem $\frac{mv^2}{R} \leq \mu mg$

$$R \geq \frac{v^2}{\mu g}$$

$$\boxed{R_{min} = \frac{v^2}{\mu g}}$$

Altă rezolvare



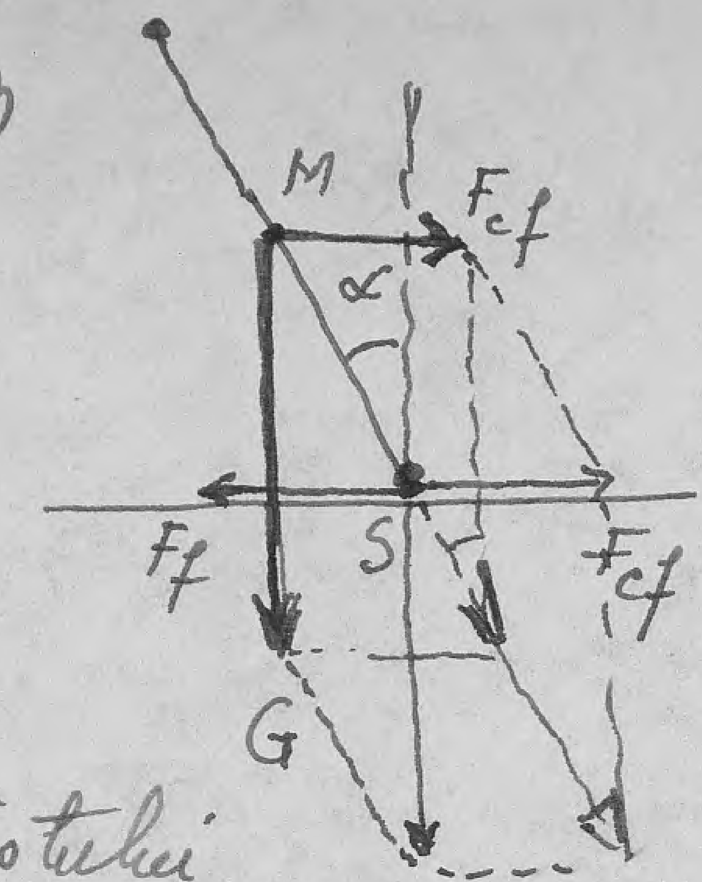
Descompunem: $\vec G = \vec G_1 + \vec G_2$

Efectul lui $\vec G_2$ este anulat de rezistența gheții, iar $\vec G_1 = \vec F_{cp} = \vec F_f$ deoarece F_{cp} se manifestă prin intermediul frecării: $tg\,\alpha = \frac{F_f}{G} = \frac{\mu mg}{mg} = \mu$; $\frac{mv^2}{R} = \mu mg$; $R = \frac{v^2}{\mu g}$

27 – 1.3.176 Hristev 1983

$\alpha_M = ?$

$\varphi = 14°$



În viraj asupra motociclistului acționează aplicate în centrul de masă $\vec G$ și $\vec F_{cf}$ iar în punctul de sprijin $\vec F_f$.

Pentru a nu roti în jurul lui S rezultanta $\vec R$

$$\vec R = \vec G + \vec F_{cf}$$

aplicată în M trebuie să treacă prin S. Avem

$$tg\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{mv^2}{R} \cdot \frac{1}{mg} = \frac{v^2}{Rg}\ ; \quad \boxed{tg\,\alpha = \frac{v^2}{Rg}} \ (1)$$

Pentru că motocicleta nu rotește, rezultanta $\vec R$ poate fi aplicată oriunde de-a-lungul suportului. Aplicând-o în S și descompunând-o după direcțiile lui $\vec F_{cf}$ și $\vec G$, observăm că pentru a nu derapa trebuie să avem:

$$F_f \geq F_{cf}$$

$$\mu mg \geq \frac{mv^2}{R}\ ; \quad \frac{v^2}{Rg} \leq \mu$$

Unghiul maxim se realizează pentru

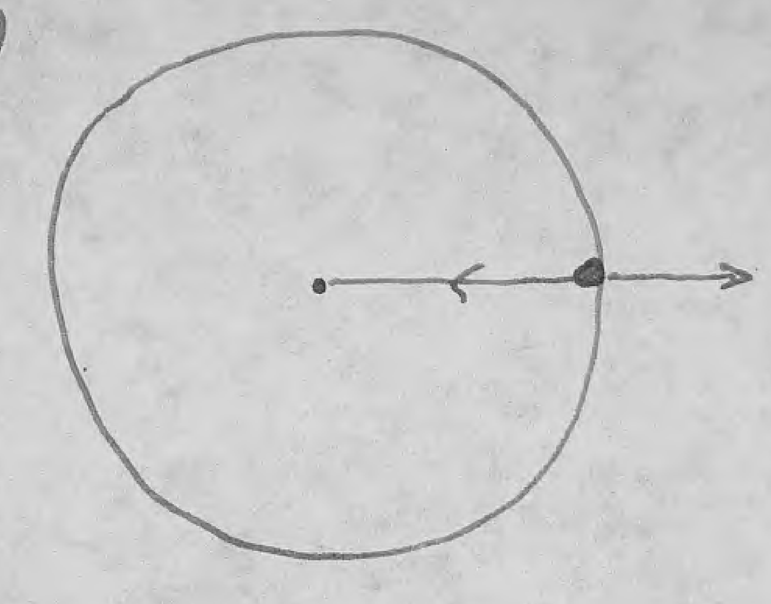
$$\boxed{\frac{v^2}{Rg} = \mu.}\ (2)$$

Din (1) și (2) avem $tg\,\alpha_M = \mu = tg\,\varphi$ adică

$$\alpha_M = \varphi = 14°.$$

137

27 – 1.3.178 Hristev 1983



$n = 30$ rot/min

$R = 19,6$ cm

$\mu = ?$

$F_{cf} \leq F_f$; $m\omega^2 R \leq \mu m g$

$4\pi^2 n^2 R \leq \mu g$

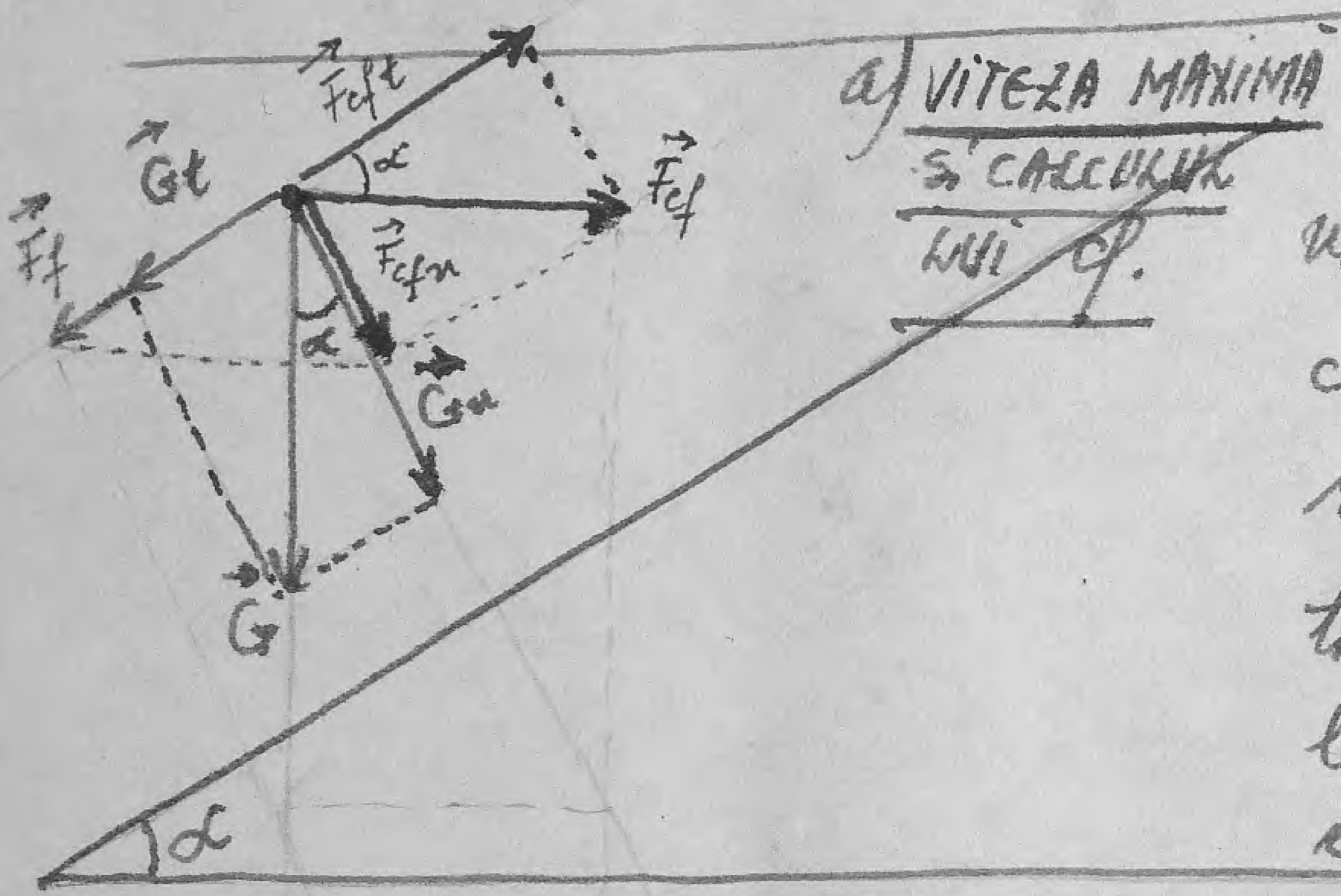
$$\mu \geq \frac{4\pi^2 n^2 R}{g}$$

138

27 – 1.3.179 ~~Hristev~~ 1983

$R = 100\,m$; $\alpha = 15^\circ$; $\alpha > \varphi$ unde φ este unghiul de frecare.

$v_M = 77\ km/h$; $\varphi = ?$; $v_m = ?$



a) VITEZA MAXIMĂ ȘI CALCULUL LUI φ.

Pe planul înclinat cu frecare forța care ar produce de[...] spre exterior la [...] raparea este componen[...]ta forței centrifuge, para[...]lelă la plan, iar a[...] care se împotrivește derapării este forța de frecare pe plan și componenta greutății, paralelă la plan.

Așadar, viteza maximă v_M admisă va fi dată de condiția:

$\boxed{F_{cft} \le F_f + G_t}$ unde: $F_{cft} = F_{cf}\cos\alpha = \frac{m v_M^2}{R}\cos[...]$

$F_f = \mu N = \mu(G_n + F_{cfn}) = \mu(mg\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha)$

$F_f = \mu\left(mg\cos\alpha + \frac{m v_M^2}{R}\sin\alpha\right)$

$G_t = mg\sin\alpha$ Deci relația de condiție dev[...]

$\frac{m v_M^2}{R}\cos\alpha \le \mu\left(mg\cos\alpha + \frac{m v_M^2}{R}\sin\alpha\right) + mg\sin\alpha$ De un[...]

$\frac{m v_M^2}{R}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \le mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$

$v_M^2 \le \frac{Rg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = Rg\,\cancel{\frac{\mu\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - \mu\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}}$

prefăc

$$v_M^2 \le Rg\,\frac{\mu + tg\alpha}{1 - \mu\, tg\alpha}$$

Se știe însă că unghiul de frecare φ este dat de: $tg\varphi = \mu$. Așadar

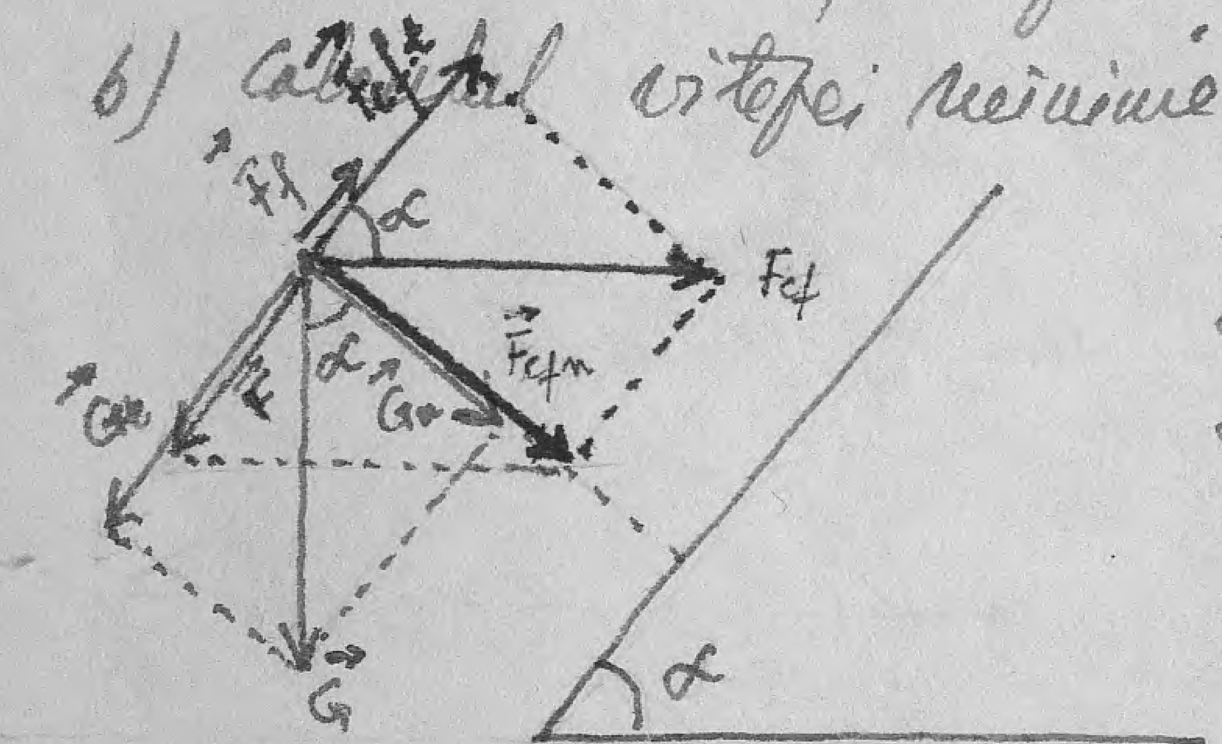
$$v_M^2 \le Rg\,\frac{tg\varphi + tg\alpha}{1 - tg\varphi\, tg\alpha}$$

De aici se scoate tgφ și apoi φ cerut de problemă. Vom prefera însă o altă continuare, spre a obține rezultatul din Culegere, dar trebuie cunoștințe de matematică care poate nu s-au făcut, anume formula $tg(\alpha \pm \varphi) = \frac{tg\alpha \pm tg\varphi}{1 \mp tg\alpha\, tg\varphi}$. Avem:

$$\boxed{v_M = \sqrt{Rg\, tg(\alpha+\varphi)}}$$

De aici se calculează ușor tg(α+φ), apoi α+φ și cum α este cunoscut, se găsește φ cerut de problemă.

b) Calculul vitezei minime v_m. Viteza minimă la viraj trebuie să dea o forță centrifugă a cărei componentă paralelă la plan să echilibreze forța F care ar face corpul să alunece la vale (derapare spre interior) care este tocmai $G_t - F_f = F$



$F_{cft} = G_t - F_f$; $\frac{m v_m^2}{R}\cos\alpha = mg\sin\alpha - \mu N$

$N = G_n + F_{cfn} = mg\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha = mg\cos\alpha + \frac{m v_m^2}{R}\sin\alpha$

$\frac{m v_m^2}{R}\cos\alpha = mg\sin\alpha - \mu\left(mg\cos\alpha + \frac{m v_m^2}{R}\sin\alpha\right)$

$\frac{m v_m^2}{R}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$

$v_m^2 = \frac{Rg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = \underbrace{Rg\,\frac{tg\alpha - \mu}{1 - \mu\, tg\alpha} = Rg\,\frac{tg\alpha - tg\varphi}{1 - tg\alpha\, tg\varphi}}$

$\boxed{v_m = \sqrt{Rg\, tg(\alpha - \varphi)}}$ idem.

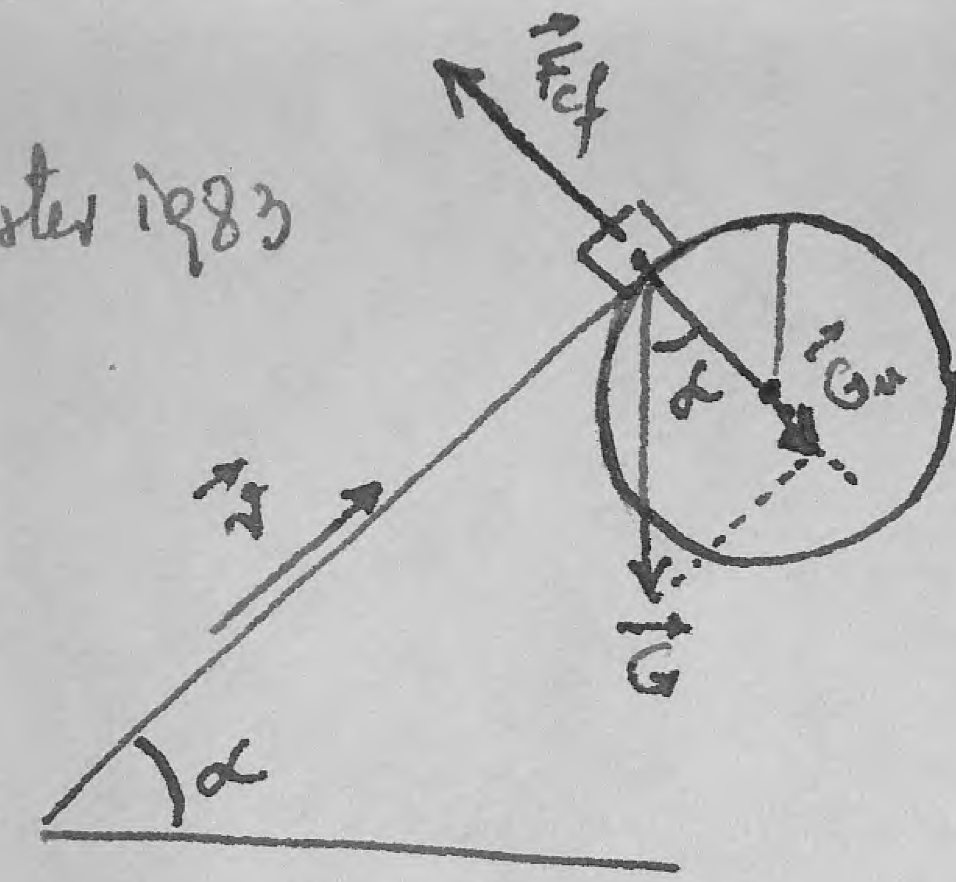
$v_m^2 = Rg\,\frac{\sin\alpha - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha}{\cos\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\sin\alpha} = Rg\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi - \sin\varphi\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi} = \frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos(\alpha-\varphi)}Rg$

28 - 1.3.180 Hristev 1983

$\alpha = 60°$

$R = 0{,}4\,m$

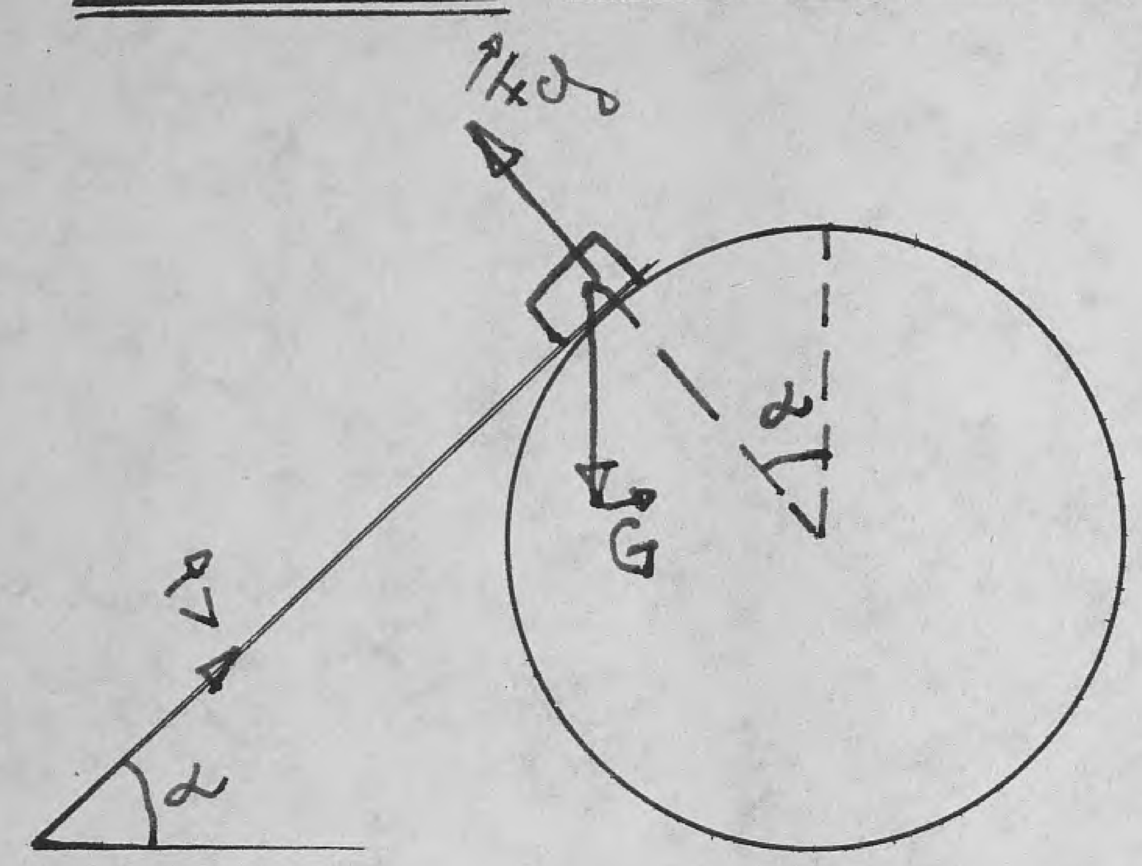
$v = ?$



Condiția desprinderii este $F_{cf} = \vec{G}_n$

$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha$; $\boxed{v = \sqrt{Rg\cos\alpha}}$

1. 3. 180 Soluție, Krausz Ovidiu



Pentru a se desprinde corpul de tambur este necesar ca $\vec{F}_{cf}$ să fie mai mare decît $\vec{G}$ radială

$F_{cf} \geq G\cos\alpha$ deci $\frac{\cancel{m} v^2}{R} \geq \cancel{m} g \cos\alpha$

$\Rightarrow v^2 \geq R g \cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow v \geq \sqrt{R g \cos\alpha}$

$v \geq 1,4$ m/s

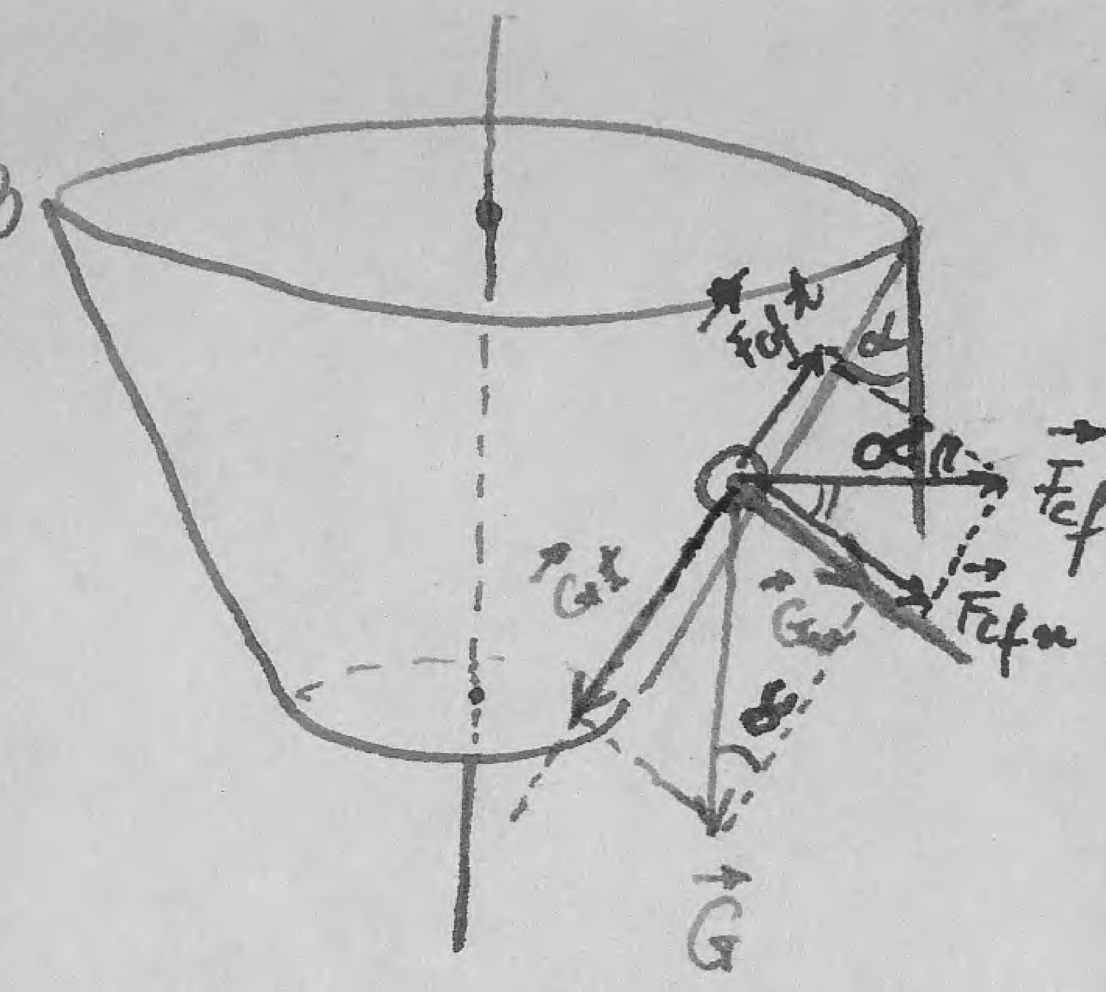
$v_{min} = 1,4$ m/s.

28 _ 1.3.182 Hristev 1983

$D = 10$ cm

$\alpha = 45°$

$\nu = ?$



Condiția de urcare a bilei pe peretele paharului în timpul rotației acestuia este:

$F_{cft} \geq G_t \sin\alpha \cdot m\omega^2 R \geq mg\cos\alpha$

(Observ din figură: $G_t = G\cos\alpha$; $F_{cft} = F_{cf}\cdot\sin\alpha$)

$4\pi^2\nu^2 R = g\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}\,ctg\,\alpha}$

$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{D}\,ctg\,\alpha}} = 2,2$ rot/s.

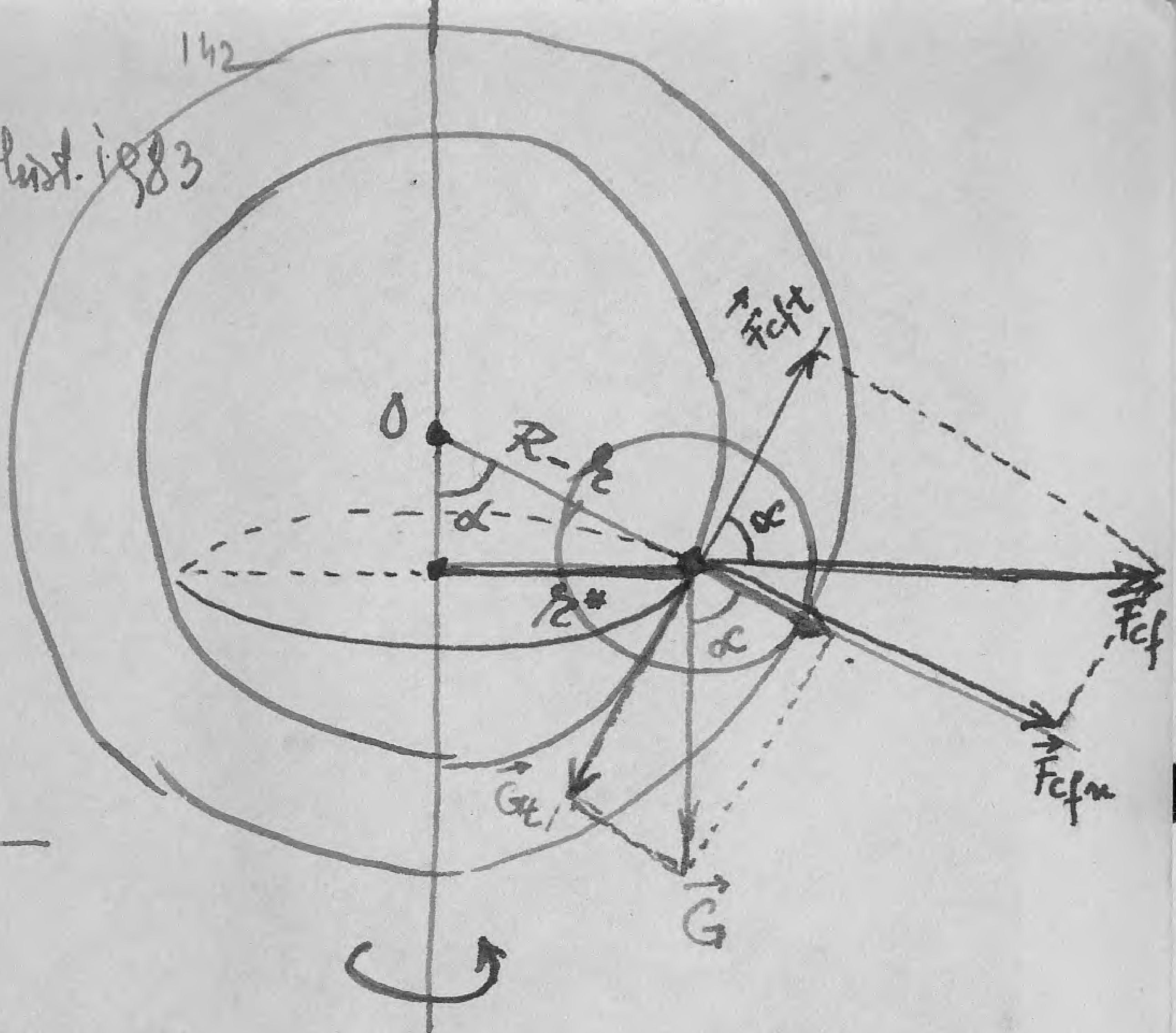
28 – 1.3.183 Hust. 1983

$R = 60\,cm$

$r = 10\,cm$

$n = 1{,}0\ rot/s$

$\alpha = ?$



Considerăm masa sferei mici concentrată în centrul ei și sfera redusă la un punct. Acesta se rotește odată cu sfera mare la distanța $R-r$ de O.

Asupra sferei mici acționează simultan greutatea ei și forța centrifugă. Componentele normale ale acestora sunt anulate de rezistența suprafeței sferei mari.

Sfera mică va sta în echilibru pe suprafața celei mari pentru un unghi α care satisface

$$G_t = F_{cft}$$

Avem

$$mg\sin\alpha = F_{cf}\cos\alpha$$

$$F_{cf} = m\omega^2 r^* = m\,4\pi^2\nu^2(R-r)\sin\alpha$$

28 – 1.3.184 Hust 1983

Din 1.3.183 avem

$$\cos\alpha = \frac{g}{4\pi^2\nu^2(R-r)}$$

Pentru firul de nisip $r=0$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$$

a) $\cos\alpha_1 = \frac{g}{\omega_1^2 R} = \frac{9{,}8}{16\cdot 0{,}49} = \frac{980}{16\cdot 49}$

$$\begin{array}{r} 49\cdot 16 \\ \hline 294 \\ 49 \\ \hline 784 \end{array}$$

$\cos\alpha_1 = \frac{980}{784} > 1$ imposibil

Un asemenea unghi α_1 nu există. Deci, ~~simultan f~~ firul de nisip rămâne la fundul sferei.
~~$\omega^2 R$ trebuie să crească până la minim 980, prin mărirea turației~~

b) $\cos\alpha_2 = \frac{g}{\omega_2^2 R} = \frac{980}{25\cdot 49} = \frac{3920}{4900} \doteq \frac{392}{490}$

$\alpha_2 \approx 37^\circ$

114

28 — 1.3.185 Hristev 1983 $\qquad$ Vezi rezolvarea a 2^a

$R = 10\,m$

$n = 2$ rot/min

$u_{pl} = 30$ km/h

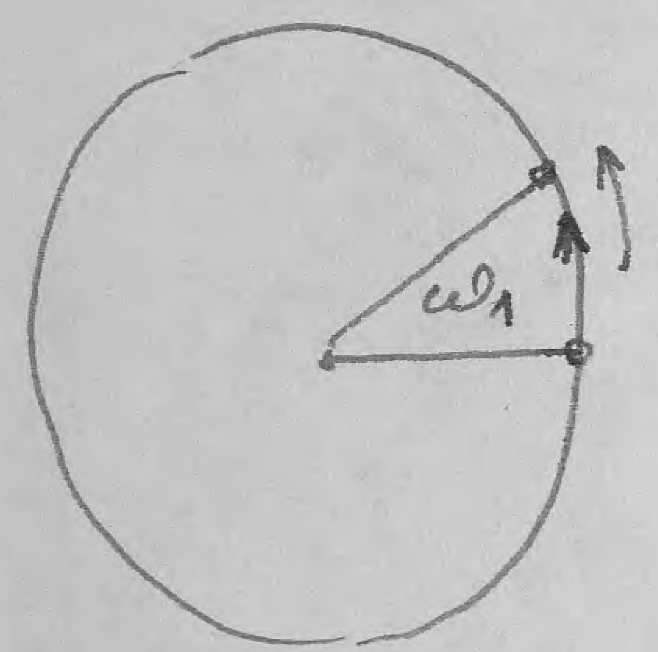
$\mu = ?$

$F_{cf} = m\omega^2 R$

$F_{cf} = 4\pi^2\nu^2 m R$

$F_f = \mu m g$

$F_f \geq F_{cf}$



a) motociclistul merge în sensul rotirii platformei

$\omega_1 = \dfrac{u}{R}$ a motociclistului dacă platforma nu se rotește.

$\omega_2 = 2\pi\nu$ a platformei față de pământ

$\omega = \omega_1 + \omega_2$ a motociclistului față de pământ

$\mu m g \geq 4\pi^2\nu^2 m R$ $\qquad$ unde: m masa motociclistului

ν turația motociclistului față de pământ.

$2\pi\nu = 2\pi\nu_1 + 2\pi\nu_2$

$\nu = \nu_1 + \nu_2$

$\nu_2 = n \;;\; \nu_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{u}{R\cdot 2\pi}$

$\nu = \dfrac{u}{2\pi R} + n$

$\mu \geq \dfrac{4\pi^2\left(\dfrac{u}{2\pi R} + n\right)^2 R}{g} = \dfrac{4\pi^2}{gR}\,\dfrac{(u+2\pi R n)^2}{4\pi^2}$

$\mu \geq \dfrac{1}{Rg}\,(u + 2\pi R n)^2$

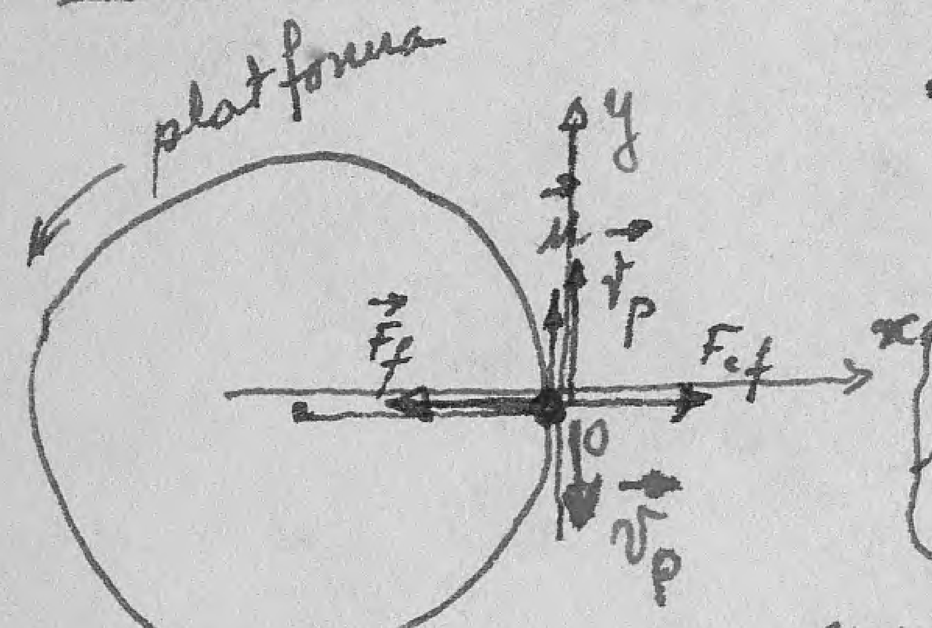
b) Motociclistul merge în sens invers celui de rotire a platformei.

Atunci $\omega = \omega_1 - \omega_2$

și obținem:

$$\mu \geq \frac{1}{Rg}\left(u - 2\pi R n\right)^2$$

Rezolvarea a 2-a:



Pentru a nu aluneca:

$F_f \geq F_{cf}$; $\mu m g \geq \frac{m v_m^2}{R}$

$$\boxed{\mu \geq \frac{v_m^2}{Rg}} \quad (1)$$

unde v_m este viteza motociclistului față de pământ

Notăm v_p viteza platformei față de pământ

Din formula generală $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t$ obținem în cazul problemei: $\vec{v}_m = \vec{u} + \vec{v}_p$ sau:

$$Oy: \boxed{v_m = u \pm v_p} \quad (2)$$

unde $v_p = \omega R = 2\pi n R$, deci

$\boxed{v_m = u \pm 2\pi n R}$ (3) care dusă în (1):

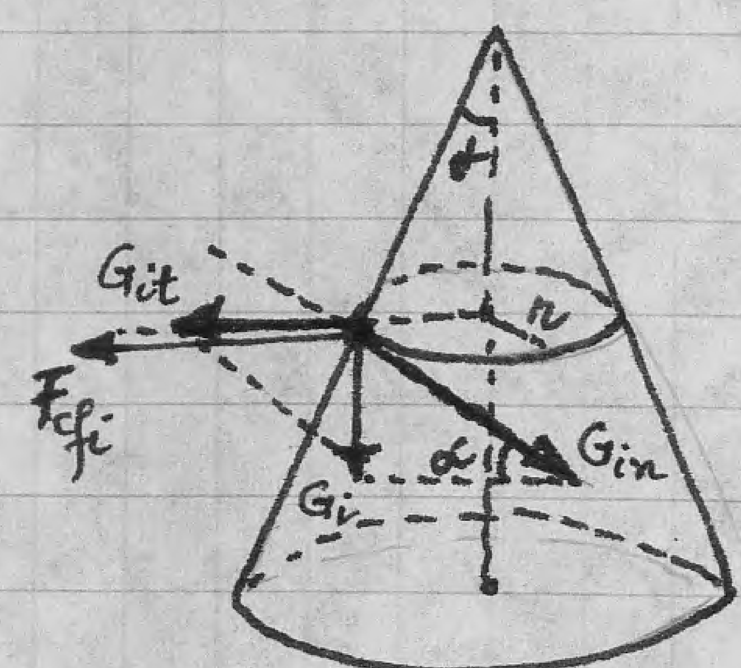
$$\mu \geq \frac{(u \pm 2\pi n R)^2}{Rg}$$

Notă: cu verde s-a tratat cazul în care motociclistul merge în sens invers rotației platformei.

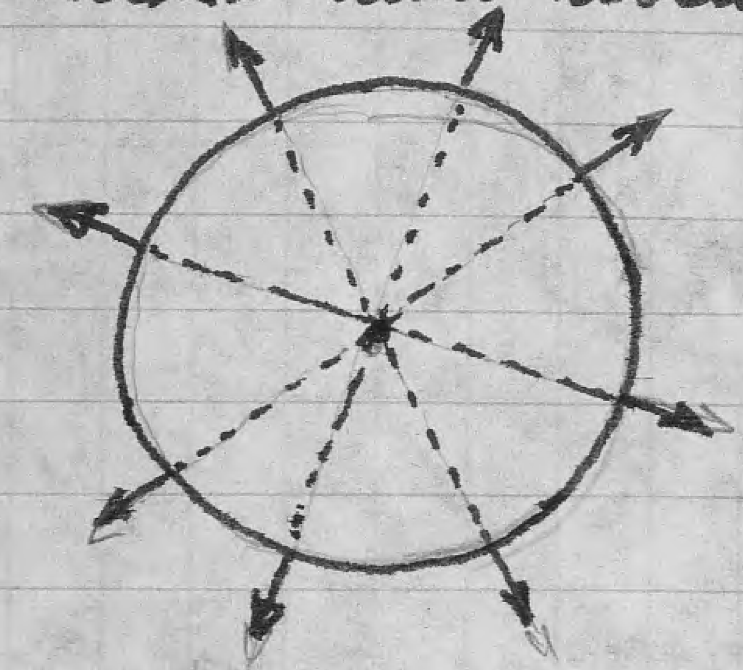
1.3.187

$2\alpha = 90°$; $m = 0,4\,kg$; $l = 1\,m$; $\omega = 6\,rad/s$; $T = ?$

Rezolvarea 1



Vom considera lănțișorul împărțit în „n" elemente egale, suficient de mici încât fiecare să fie practic punctiformă. Fie „m_i" masa unui asemenea element.



Lănțișorul ia formă circulară dacă asupra fiecărui element acționează forțe F_i radiale ca în figură. Ele se datorează componentei G_{it} orizontale a greutății elementului și forței centrifuge F_{cfi} care acționează asupra sa în timpul rotirii:

$$F_i = G_{it} + F_{cfi} = G_i \operatorname{ctg}\alpha + m_i \omega^2 r \quad \text{cu}$$

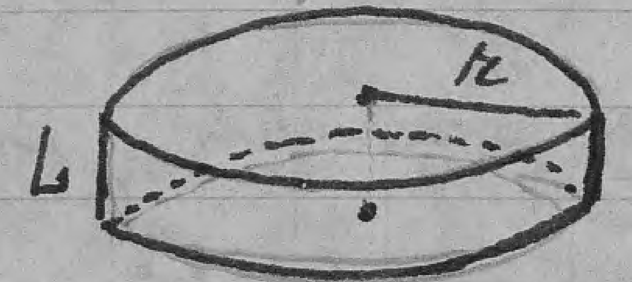
$r = \frac{l}{2\pi}$ adică $F_i = m_i\left(g \operatorname{ctg}\alpha + \omega^2 \frac{l}{2\pi}\right)$

Forța totală F care întinde lănțișorul (observăm că $\vec{F} = 0$. De ce?) va fi:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = \left(g \operatorname{ctg}\alpha + \omega^2 \frac{l}{2\pi}\right)\sum_{i=1}^{n} m_i$$

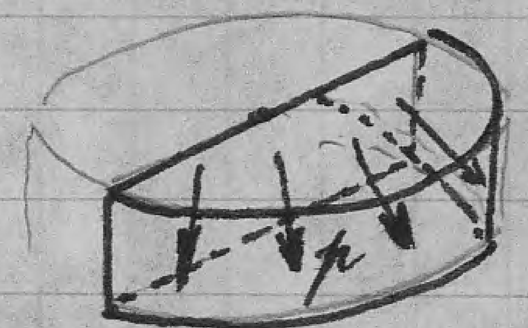
$$\boxed{F = m\left(g \operatorname{ctg}\alpha + \omega^2 \frac{l}{2\pi}\right)}$$

F se datorează presiunii conului asupra lănțișorului, exercitată radial în planul lănțișorului. Evident, această presiune este aceeași în toate direcțiile.

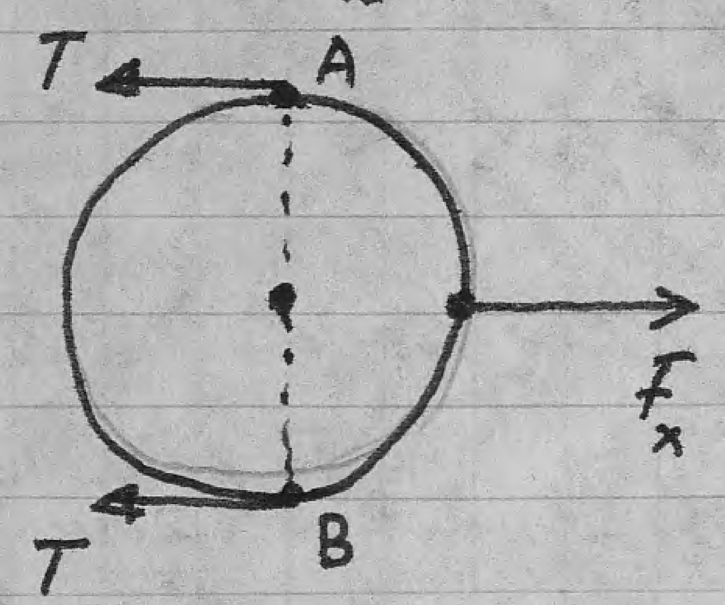


Să privim lănțișorul ca pe un cilindru de rază r și înălțime L. Asupra pereților acestui cilindru se exercită presiunea p din partea conului, rezultând forța totală F de întindere a lanțului:

$p = \frac{F}{S} = \frac{F}{2\pi r \cdot L}$

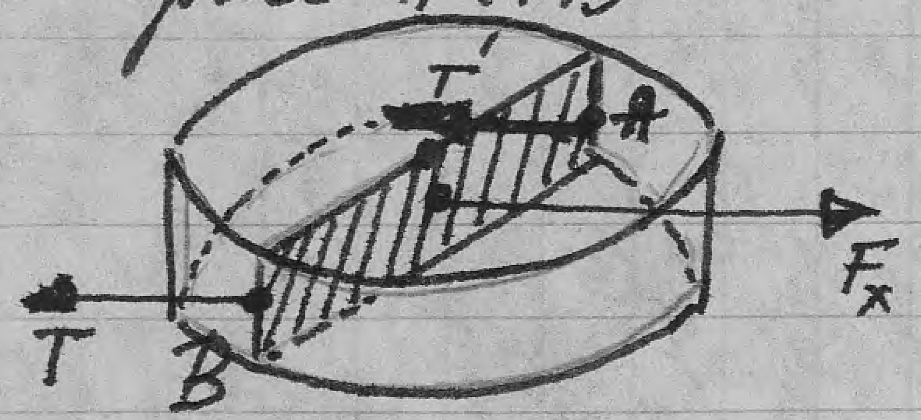


$\boxed{p = \frac{F}{2\pi r L}}$



Componenta F_x a forței F pe o direcție oarecare Ox este anulată de tensiunea din lanț aplicată în punctele diametral opuse A și B:

$\boxed{F_x = 2T}$



Pe de altă parte, F_x se exercită pe o suprafață S_x egală cu proiecția cilindrului pe un plan perpendicular pe baza sa ce trece prin A și B. Avem:

$S_x = 2R \cdot L$; $p_x = \frac{F_x}{S_x} = \frac{F_x}{2RL}$ $\boxed{p_x = \frac{F_x}{2RL}}$

Cum presiunea este aceeași în toate direcțiile

1.3.187 (continuare)

avem: $p = p_x$ adică

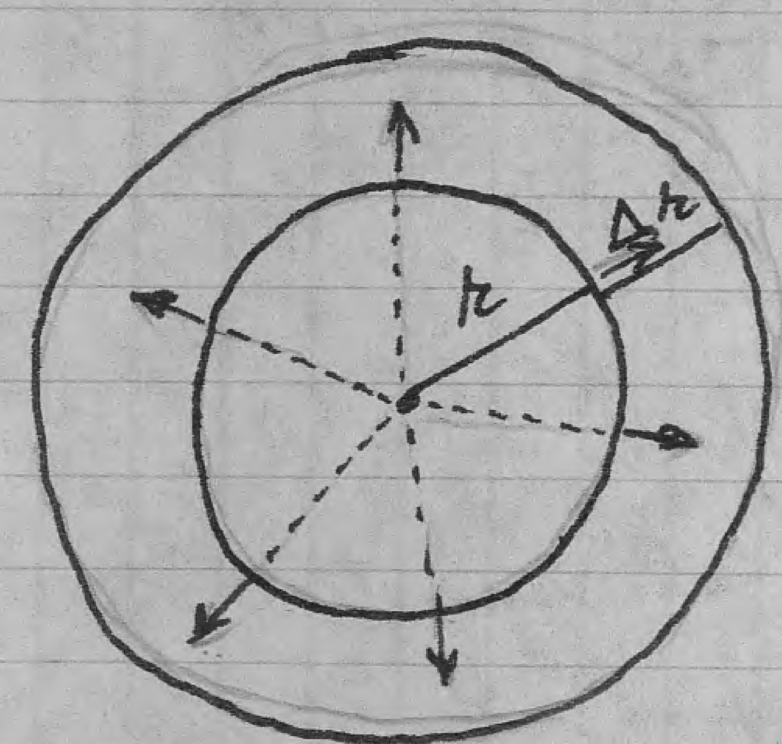
$\frac{F}{2\pi r L} = \frac{F_x}{2rL}$; $\boxed{F_x = \frac{F}{\pi}}$ și

$T = \frac{F_x}{2} = \frac{F}{2\pi}$; $\boxed{T = \frac{F}{2\pi}}$

Ținând seama de expresia găsită pentru F:

$$\boxed{T = \frac{m}{2\pi}\left(g\,ctg\,\alpha + \omega^2 \frac{l}{2\pi}\right)}$$

Rezolvarea a 2-a



Fie F forța exercitată de con asupra lănțișorului. Întrucât F întinde lănțișorul, presupunem că îi determină o deformare elastică, în urma căreia punctul de aplicație al lui F se deplasează cu atât cu cât se alungește raza, deci Δr.

Lucrul forței F va fi

$\boxed{L_F = \frac{F}{2} \cdot \Delta r}$ (1) ($\frac{F}{2}$ valoarea medie a forței, care nu-i constantă în timpul deplasării).

În timpul deformării elastice energia potențială a lănțișorului a suferit o variație egală cu lucrul forței deformatoare:

$\boxed{\Delta E_p = L_F}$ (2) Dar la deformarea elastică

$\Delta E_p = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$ unde $\Delta x = 2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r$

$\Delta x = 2\pi\,\Delta r$ deci $\boxed{\Delta E_p = \frac{1}{2}k(2\pi\Delta r)^2}$ (3)

Alungirea Δx a lanțului este determinată de tensiunea T din lanț, care are rol de forță deformatoare de-a-lungul lanțului:

$T = k\cdot\Delta x$; $T = k\,2\pi\,\Delta r$; $\boxed{k = \frac{T}{2\pi\Delta r}}$ (4)

Ducând (4) în (3):

$\Delta E_p = \frac{1}{2}\frac{T}{2\pi\Delta r}\cdot(2\pi\Delta r)^2$; $\Delta E_p = \frac{2\pi\Delta r T}{2} = \pi\Delta r T$

$\boxed{\Delta E_p = \pi\Delta r T}$ (5) Ducem (5) și (1) în (2):

$\pi\Delta r T = \frac{F}{2}\Delta r$; $\boxed{T = \frac{F}{2\pi}}$

F se calculează prin același raționament ca la rezolvarea (1): $F = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n}(G_i + F_{cf\,i}) =$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(m_i g\,ctg\,\alpha + m_i\omega^2\frac{l}{2\pi}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(g\,ctg\,\alpha + \omega^2\frac{l}{2\pi}\right)m_i =$

$= \left(g\,ctg\,\alpha + \omega^2\frac{l}{2\pi}\right)\sum_{i=1}^{n} m_i = m\left(g\,ctg\,\alpha + \omega^2\frac{l}{2\pi}\right)$

$$\boxed{T = \frac{m}{2\pi}\left(g\,ctg\,\alpha + \omega^2\frac{l}{2\pi}\right)}$$

H.1.3.187

Rezolvarea a 3-a dubioasă!

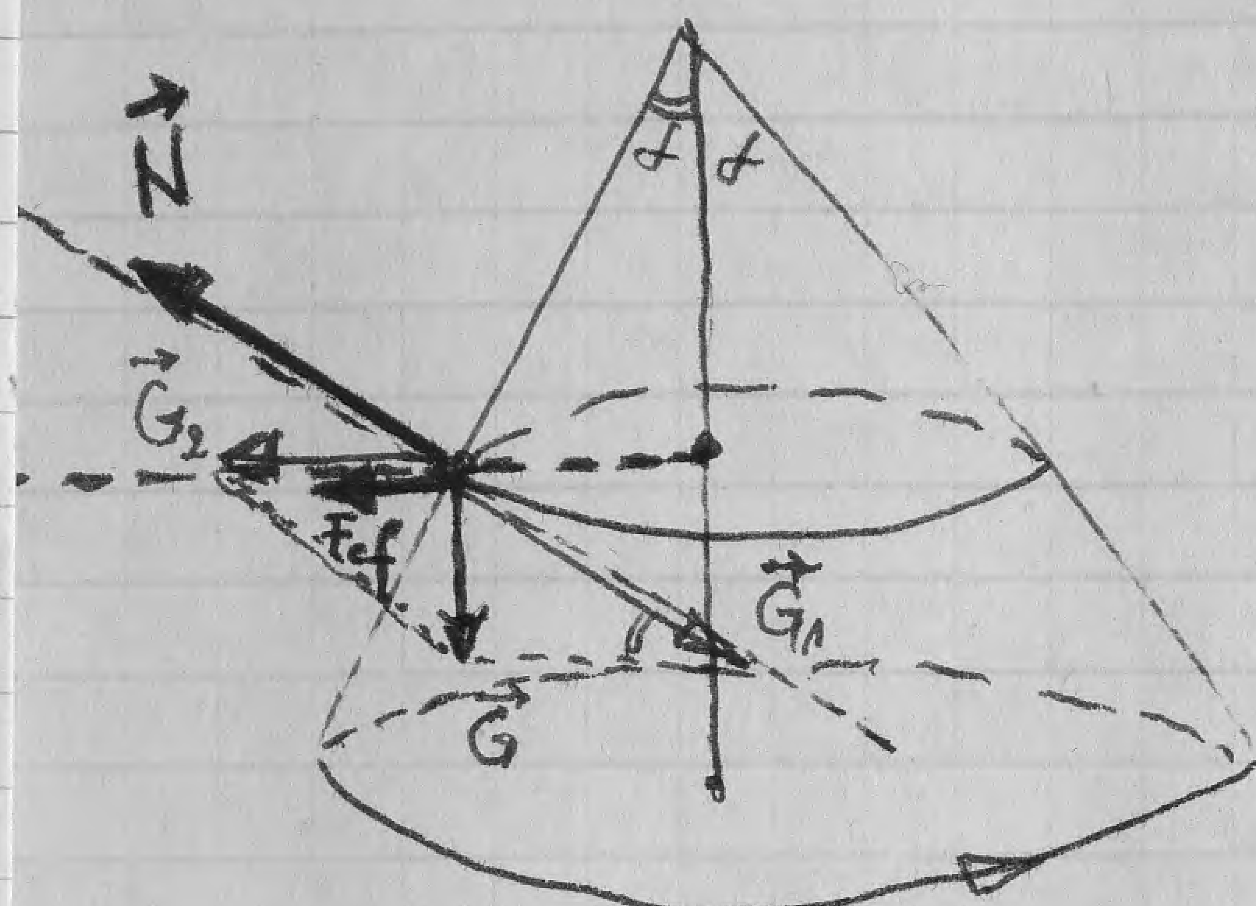
$2\alpha = 90°$

$m = 0{,}4$

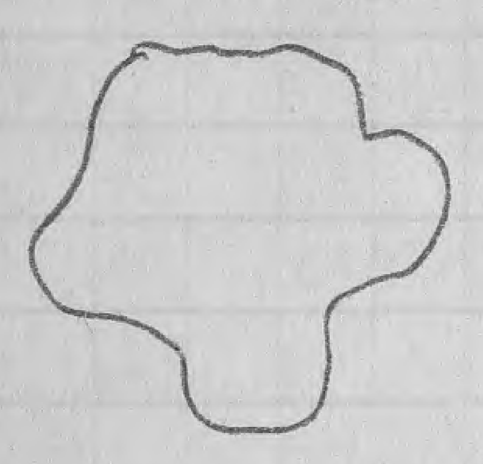
$l = 1m$

$\omega = 6\,rad/s$

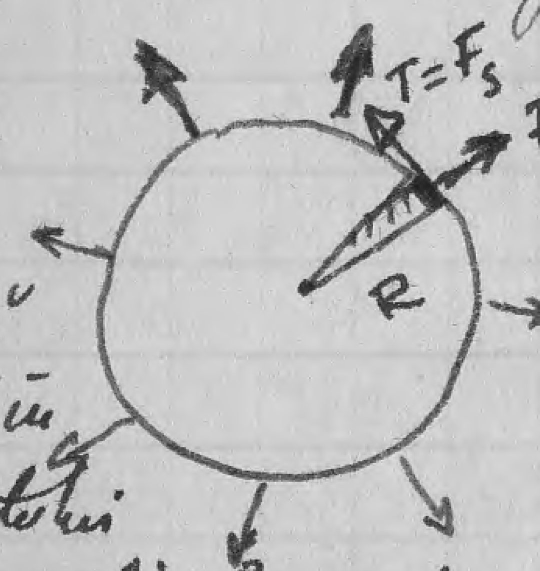
$T = ?$



Fie lănțișorul de lungime l, înaintea așezării pe con:



Pentru ca el să ia forma circulară trebuie să se exercite forțe de tipul celor de tensiune superficială. Se vede că aceste forțe se datorează componentei orizontale G_2 a lui G și forței centrifuge. Este vorba de G și F_{cf} a porțiunii de lanț cuprinsă într-un unghi la centru egal cu $\frac{1}{2\pi}$ rad: $G = \frac{mg}{2\pi}$; $F_{cf} = \frac{m}{2\pi}\omega^2 R$

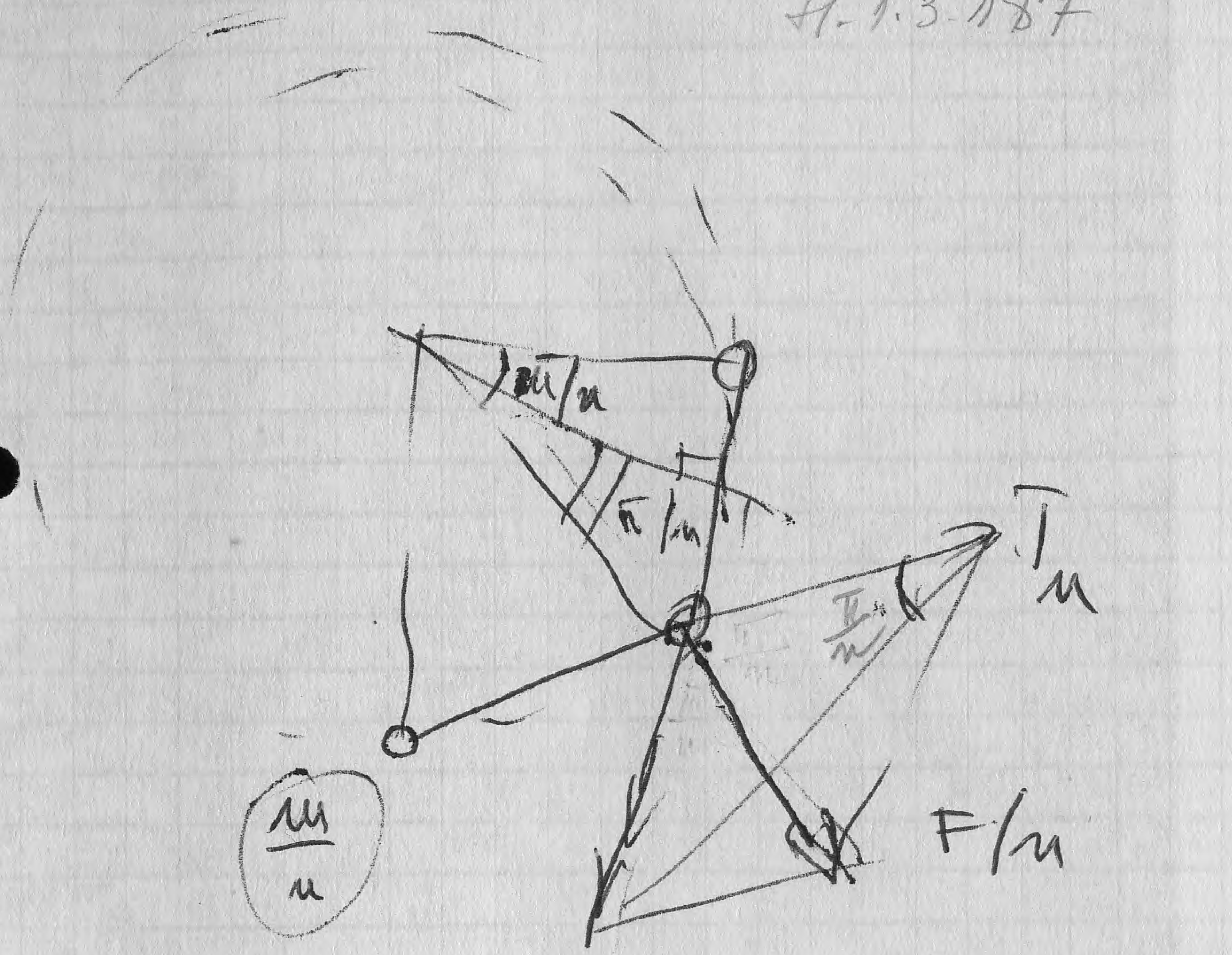


Forțele de tensiune superficială se exercită în planul lanțului circular, perpendiculare pe orice dreaptă din plan, deci și pe R. Urmează că tensiunea din lanț T este egală cu forțele de tensiune superficială!

$T = G_2 + F_{cf} = \frac{G\,ctg\,\alpha}{2\pi} + \frac{m\omega^2}{2\pi}\frac{l}{2\pi}$

$T = \frac{mg}{2\pi}ctg\,\alpha + \frac{m}{2\pi}\frac{\omega^2 l}{2\pi}$ $\boxed{T = \frac{m}{2\pi}\left(g\,ctg\,\alpha + \frac{\omega^2 l}{2\pi}\right)}$

H.1.3.187

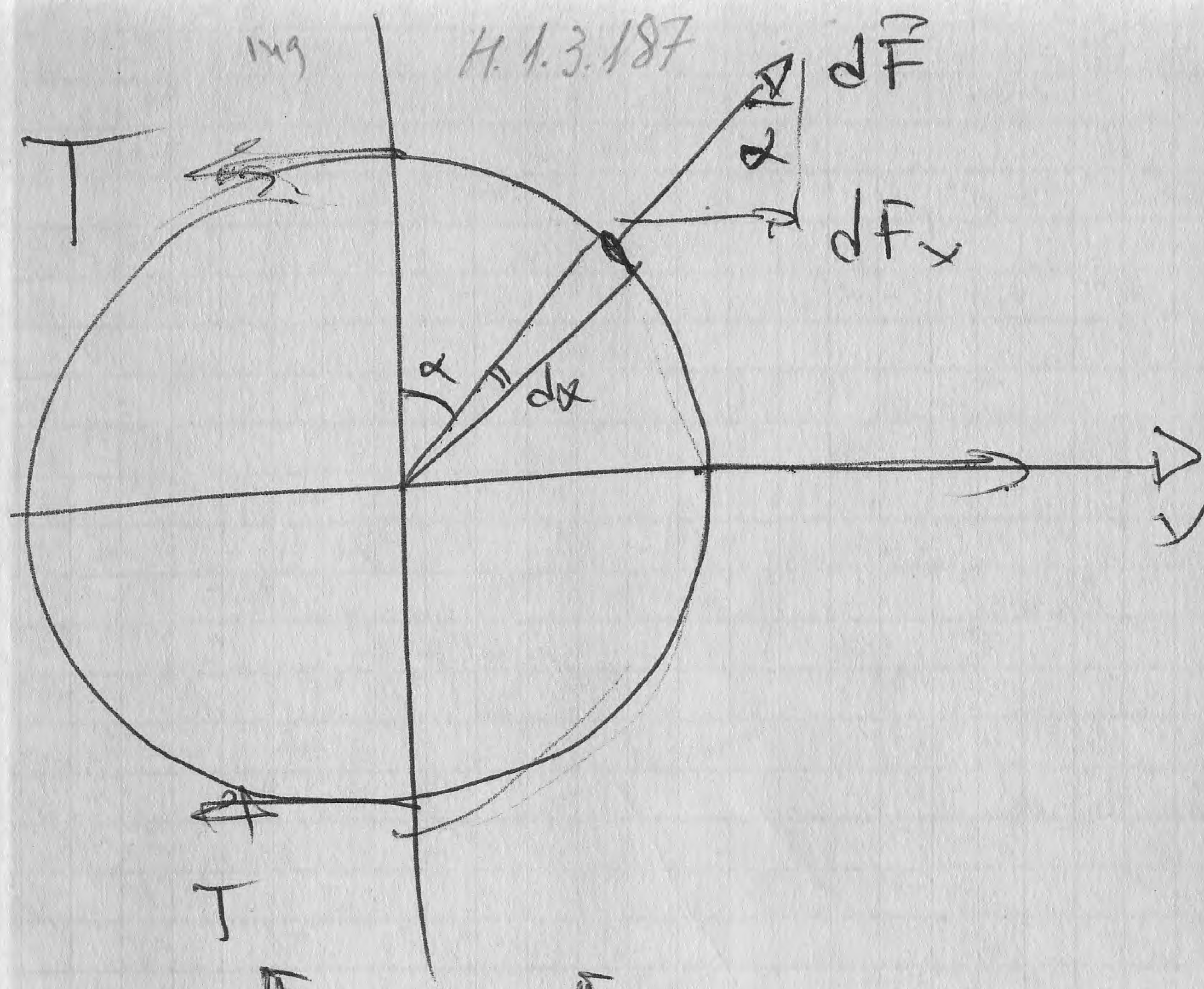


$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{F}{2n T_n}$

$$T_n = \frac{F}{2n \sin\frac{\pi}{n}}$$

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{F}{2\pi}$$

H.1.3.187



$$F_x = \int_0^\pi dF_x = \int_0^\pi dF \sin\alpha =$$

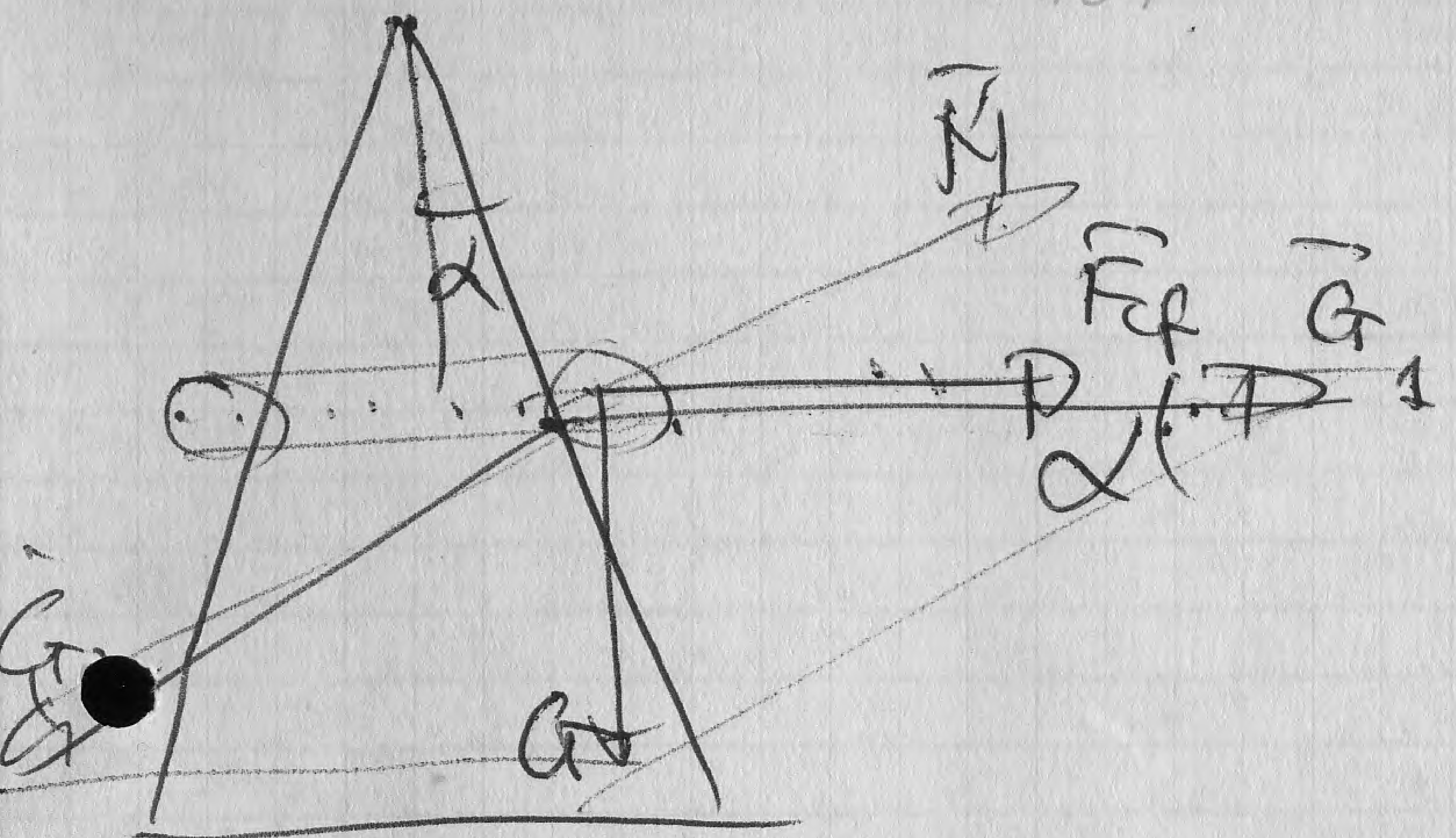
$$= \int_0^\pi \sin\alpha \, \frac{d\alpha}{2\pi} F = \frac{F}{2\pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha}_{2}$$

$$F_x = 2T$$

$$\boxed{T = \frac{F}{2\pi}}$$

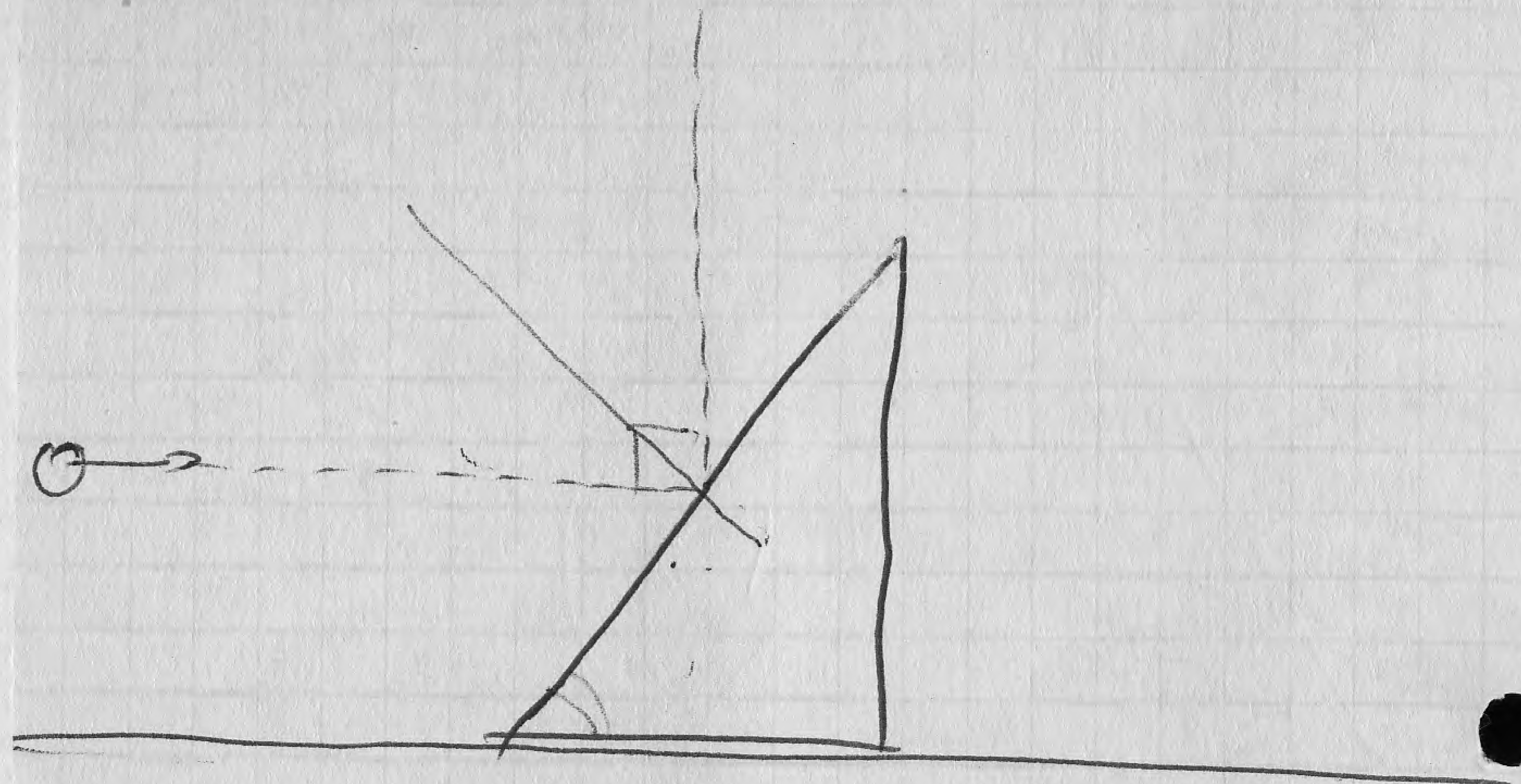
150

H-1.3.187

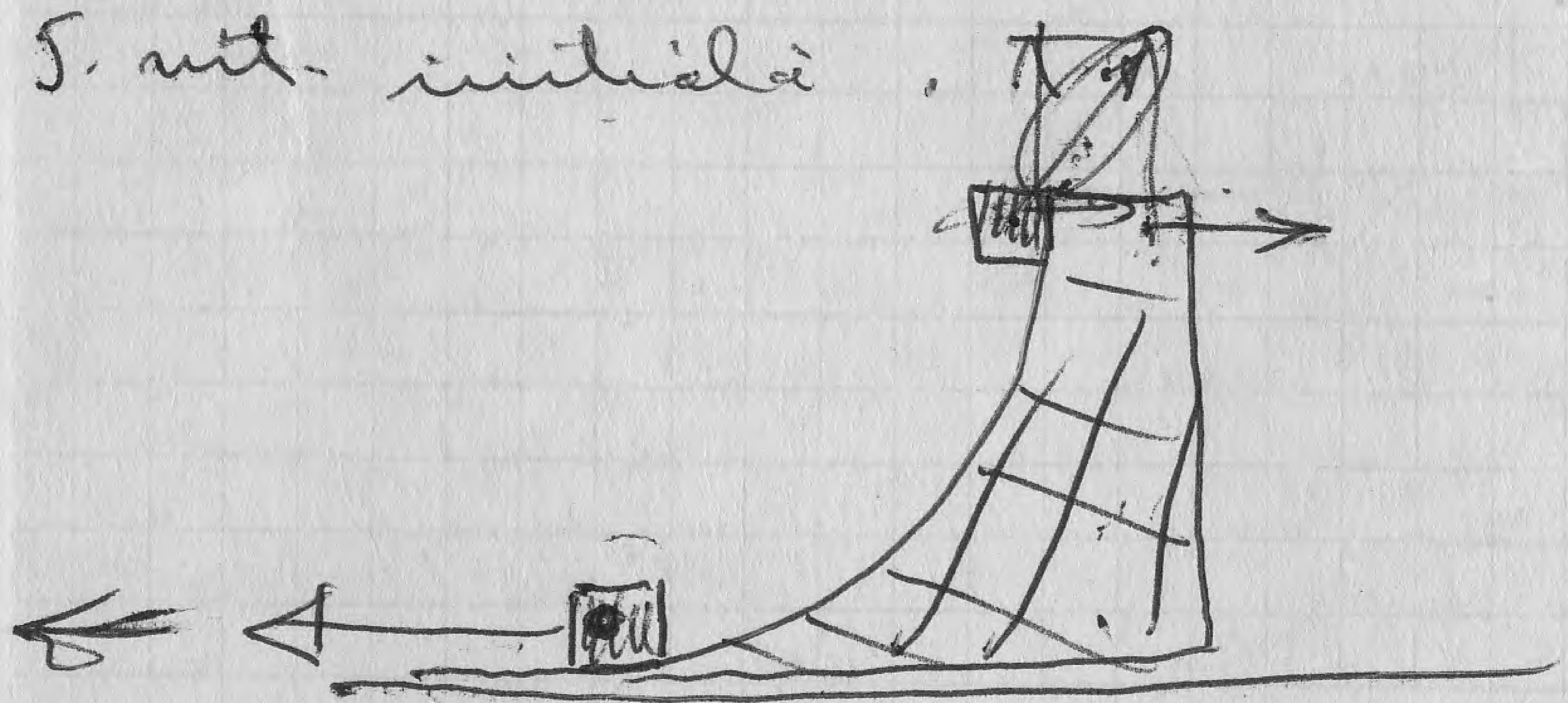


$$F = F_{cf} + \frac{G}{tg\,\alpha}$$

$$T = \frac{F}{2\pi} = \frac{F_{cf} + \frac{G}{tg\,\alpha}}{2\pi}$$



1. prismă echilateră. ?
2. ciocn. perf.-elastică
3. m, M
4. ~~unghi~~ verticală după ciocn.
5. vit. inițială.



152

29 – 1.3.190 Hristev 1983

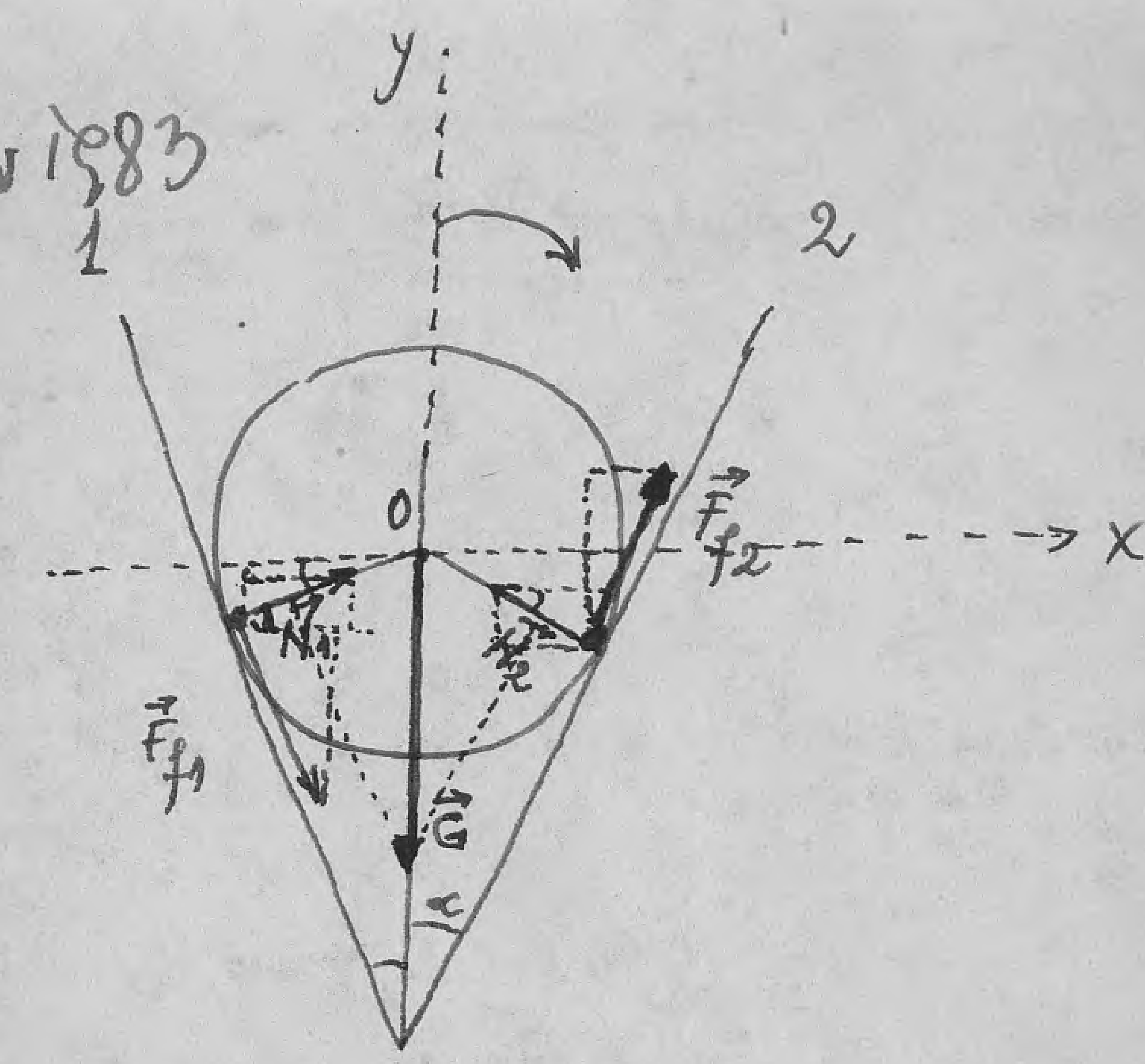
$m = 100\,g$

$2\alpha = 60^\circ$

$\varphi = 15^\circ$

$F_{f_1} = ?$

$F_{f_2} = ?$



Asupra cilindrului acționează forțele: $\vec{G}$; $\vec{N}_1$; $\vec{N}_2$; $\vec{F}_{f_1}$; $\vec{F}_{f_2}$.

Scriem condiția de echilibru:

$$\vec{G} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f_1} + \vec{F}_{f_2} = 0$$

Proiectînd-o pe axele Ox și Oy avem:

$$\begin{cases} 0 + N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + F_{f_1} \sin\alpha + F_{f_2} \sin\alpha = 0 \\ -mg + N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - F_{f_1} \cos\alpha + F_{f_2} \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

acum: $F_{f_1} = \mu N_1$; $F_{f_2} = \mu N_2$ de unde, înlocuind: $N_1 = \dfrac{F_{f_1}}{\mu}$; $N_2 = \dfrac{F_{f_2}}{\mu}$ în ecuațiile de mai sus.

$$\begin{cases} \dfrac{F_{f_1}}{\mu} \cos\alpha - \dfrac{F_{f_2}}{\mu} \cos\alpha + F_{f_1} \sin\alpha + F_{f_2} \sin\alpha = 0 \\ -mg + \dfrac{F_{f_1}}{\mu} \sin\alpha + \dfrac{F_{f_2}}{\mu} \sin\alpha - F_{f_1} \cos\alpha + F_{f_2} \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_{f_1} (\cos\alpha + \mu \sin\alpha) - F_{f_2} (\cos\alpha - \mu \sin\alpha) = 0 \\ F_{f_1} (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) + F_{f_2} (\sin\alpha + \mu \cos\alpha) = mg\mu \end{cases}$$

$$\boxed{F_{f2} = \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} F_{f1}}$$

$$F_{f1}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} F_{f1}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg\mu$$

$$F_{f1}\left[(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) + (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\right] =$$

$$= \mu mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$$

$$F_{f1}[\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\mu\sin^2\alpha} - \cancel{\mu\cos^2\alpha} + \mu^2\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cancel{\mu\cos^2\alpha} + \cancel{\mu\sin^2\alpha}$$
$$+ \mu^2\sin\alpha\cos\alpha] = \mu mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$$

$$F_{f1}[2\sin\alpha\cos\alpha + 2\mu^2\sin\alpha\cos\alpha] = \mu mg(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$$

Dar $\mu = tg\varphi$

$$F_{f1} = \frac{tg\varphi \cdot mg(\cos\alpha - tg\varphi\sin\alpha)}{\sin 2\alpha + tg^2\varphi\sin 2\alpha} = mg\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\cos\alpha - \frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\sin 2\alpha\left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)}$$

$$F_{f1} = mg\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\frac{\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi}}$$

$$F_{f1} = mg\frac{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}}\frac{\cancel{\cos\varphi}\cdot\cos(\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha}\ ;\quad F_{f1} = \frac{mg\sin\varphi}{\sin 2\alpha}\cos(\alpha+\varphi)$$

$$\boxed{F_{f1} = \mu N_1 = mg\frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha}\cos(\alpha+\varphi)}$$ Analog găsim:

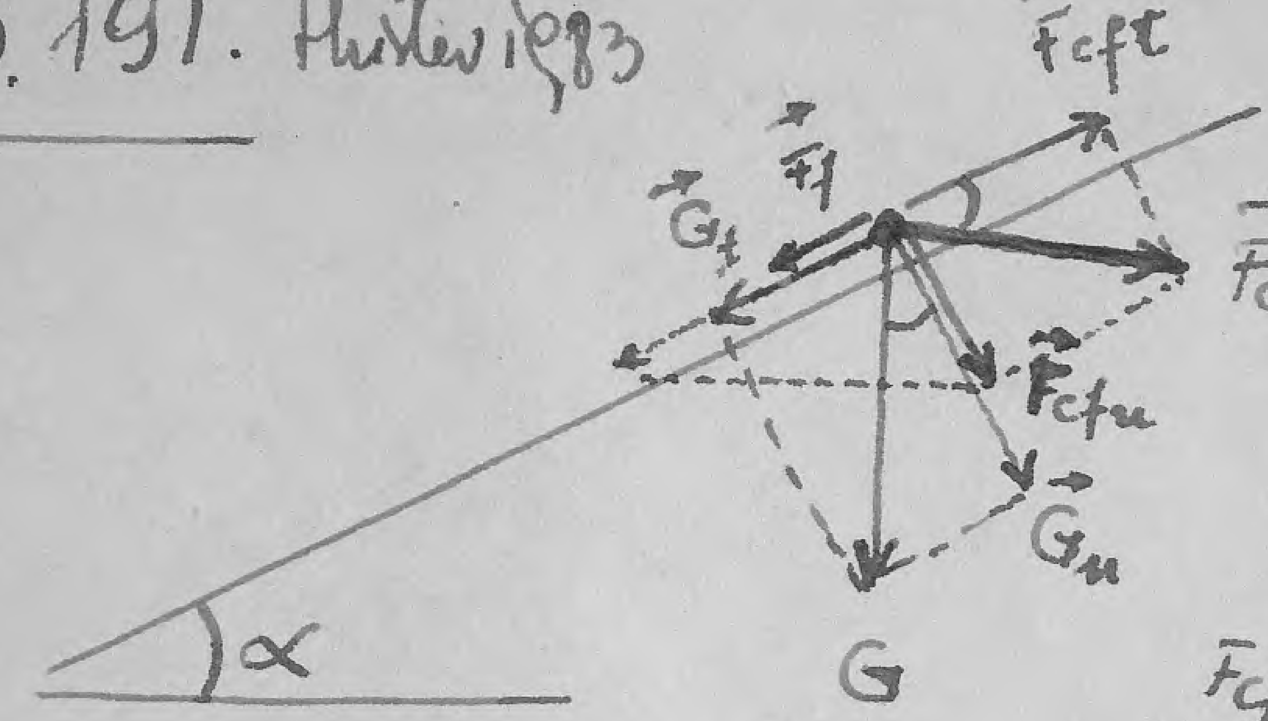
$$\boxed{F_{f2} = \mu N_2 = mg\frac{\sin\varphi}{\sin 2\alpha}\cos(\alpha-\varphi)}$$

29 - 1.3.191. Hristev 1983

$\alpha = 10^\circ$

$\varphi = 20^\circ$

$\frac{v_{M\alpha}}{v_{M0}} = ?$



$$F_{cf} = \frac{m v_{M\alpha}^2}{R}$$

$$F_{cft} = F_{cf}\cdot\cos\alpha$$

$$F_{cfn} = F_{cf}\cdot\sin\alpha$$

Viteza maximă pentru un unghi α de suprafață, $v_{M\alpha}$, nu poate depăși valoarea care asigură o forță centrifugă a cărei componentă paralelă la plan „echilibrează" componenta G_t a forței de greutate și forța de frecare F_f (peste acest $v_{M\alpha}$ corpul „derapează" în sus)

$$F_{cft} = G_t + F_f \quad \text{unde } F_f = (G_n + F_{cfn})$$

$$\frac{m v_{M\alpha}^2}{R}\cos\alpha = \mu\left(\frac{m v_{M\alpha}^2}{R}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right) + mg\sin\alpha$$

$$\frac{m v_{M\alpha}^2}{R}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$v_{M\alpha}^2 = Rg\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

$$v_{M\alpha} = \sqrt{Rg\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

Împărțind și numărătorul și numitorul prin cos α:

$$v_{M\alpha} = \sqrt{Rg\,\frac{\mu + tg\,\alpha}{1-\mu\, tg\,\alpha}}$$

Se știe că φ fiind unghiul de frecare, avem:

$$\mu = tg\,\varphi$$

Deci

$$\boxed{v_{M\alpha} = \sqrt{Rg\,\frac{tg\,\varphi + tg\,\alpha}{1 - tg\,\varphi\, tg\,\alpha}}}$$

În trigonometrie se demonstrează:

$$tg(\alpha \pm \varphi) = \frac{tg\,\alpha \pm tg\,\varphi}{1 \mp tg\,\alpha\, tg\,\varphi}$$

Așadar:

$$\boxed{v_{M\alpha} = \sqrt{Rg\, tg(\alpha+\varphi)}}$$

Fără supraînălțare α = 0 și avem.

$$v_{M0} = \sqrt{Rg\, tg\,\varphi}$$

Deci

$$\frac{v_{M\alpha}}{v_{M0}} = \sqrt{\frac{Rg\, tg(\alpha+\varphi)}{Rg\, tg\,\varphi}} \qquad \boxed{\frac{v_{M\alpha}}{v_{M0}} = \sqrt{\frac{tg(\alpha+\varphi)}{tg\,\varphi}}}$$

sau, nefolosind formula trigonometrică

$$\frac{v_{M\alpha}}{v_{M0}} = \sqrt{\frac{tg\,\alpha + tg\,\varphi}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\varphi}\cdot\frac{1}{tg\,\varphi}}$$

154

23 – 1.3.192 Hristev 1983

$v_0 = 9{,}8$ m/s

$R_0 = 40$ m

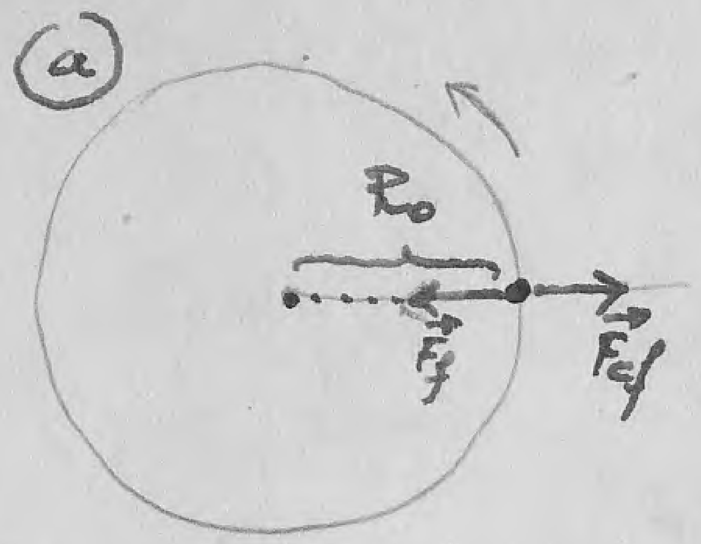
$R = 10$ m

a) $v = ?$

$v' = 22$ m/s

b) $\alpha = ?$

(a)

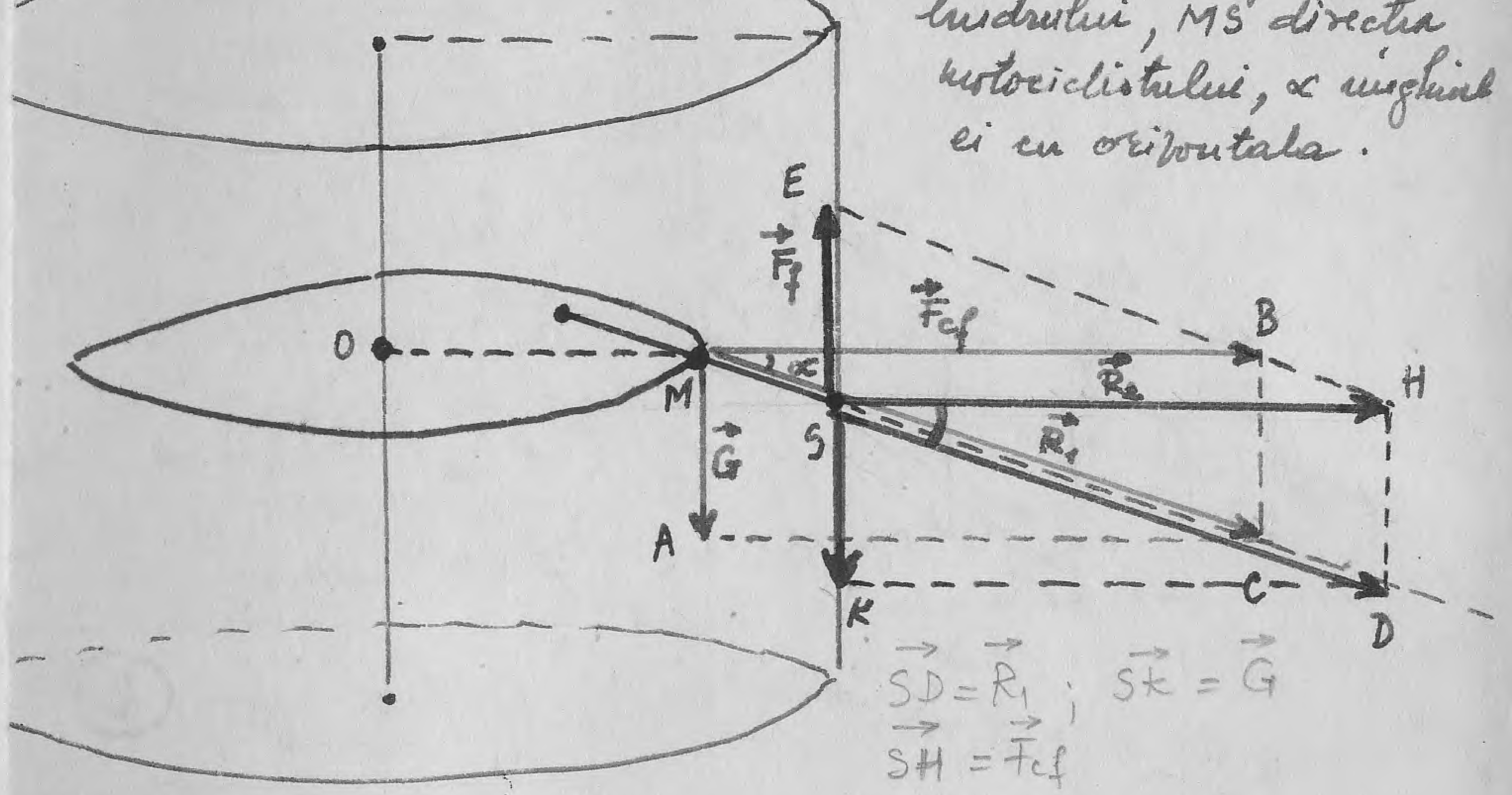


$F_f = F_{cf}$

$\mu m g = \frac{m v_0^2}{R_0}$

$$\boxed{\mu = \frac{v_0^2}{R_0 g}}$$

Fie M centrul de masă a motociclistului, S punctul de contact cu peretele cilindrului, MS direcția motociclistului, α unghiul ei cu orizontala.



$\vec{SD} = \vec{R_1}$; $\vec{SK} = \vec{G}$; $\vec{SH} = \vec{F_{cf}}$

OM = R.

În centrul de masă M acționează forțele de greutate $\vec{G}$ și centrifugă $\vec{F_{cf}}$. Ele pot fi înlocuite cu rezultanta $\vec{R_1}$

$$\vec{R_1} = \vec{G} + \vec{F_{cf}}$$

Pentru ca rezultanta $\vec{R_1}$ să nu producă rotirea motociclistului în jurul lui S trebuie să aibă direcția MS a motociclistului

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{MB} = G/F_{cf} = mg \Big/ \frac{mv^2}{R} = \frac{Rg}{v^2}$$

În această situație $\vec{R}_1$ ar putea determina doar translația motociclistului pe direcția MS. Dar efectul de translație al unei forțe asupra unui corp nu depinde de alegerea punctului de aplicație pe suportul forței. Așadar, putem considera că $\vec{R}_1$ are punctul de aplicație în S.

Componenta F_{cf} perpendiculară pe peretele cilindrului este anulată de rezistența acestuia și contribuie doar la crearea forței de frecare.

$$F_f = \mu F_{cf} = \mu \frac{mv^2}{R}$$

Componenta $\vec{G}$ paralelă la perete, în absența frecării, ar determina o translație de coborâre a motociclistului, păstrându-se unghiul α. Pentru a anula acest efect trebuie ca valoarea forței de frecare F_f să coincidă cu G.

$$\mu \frac{mv^2}{R} = mg \; ; \quad \boxed{v^2 = \frac{Rg}{\mu}} \quad (2)$$

Cum $\mu = \frac{v_0^2}{R_0 g}$ avem $v^2 = \frac{Rg \, R_0 g}{v_0^2}$

$$\boxed{v = \frac{g}{v_0}\sqrt{R R_0}} \quad (3)$$

Observații

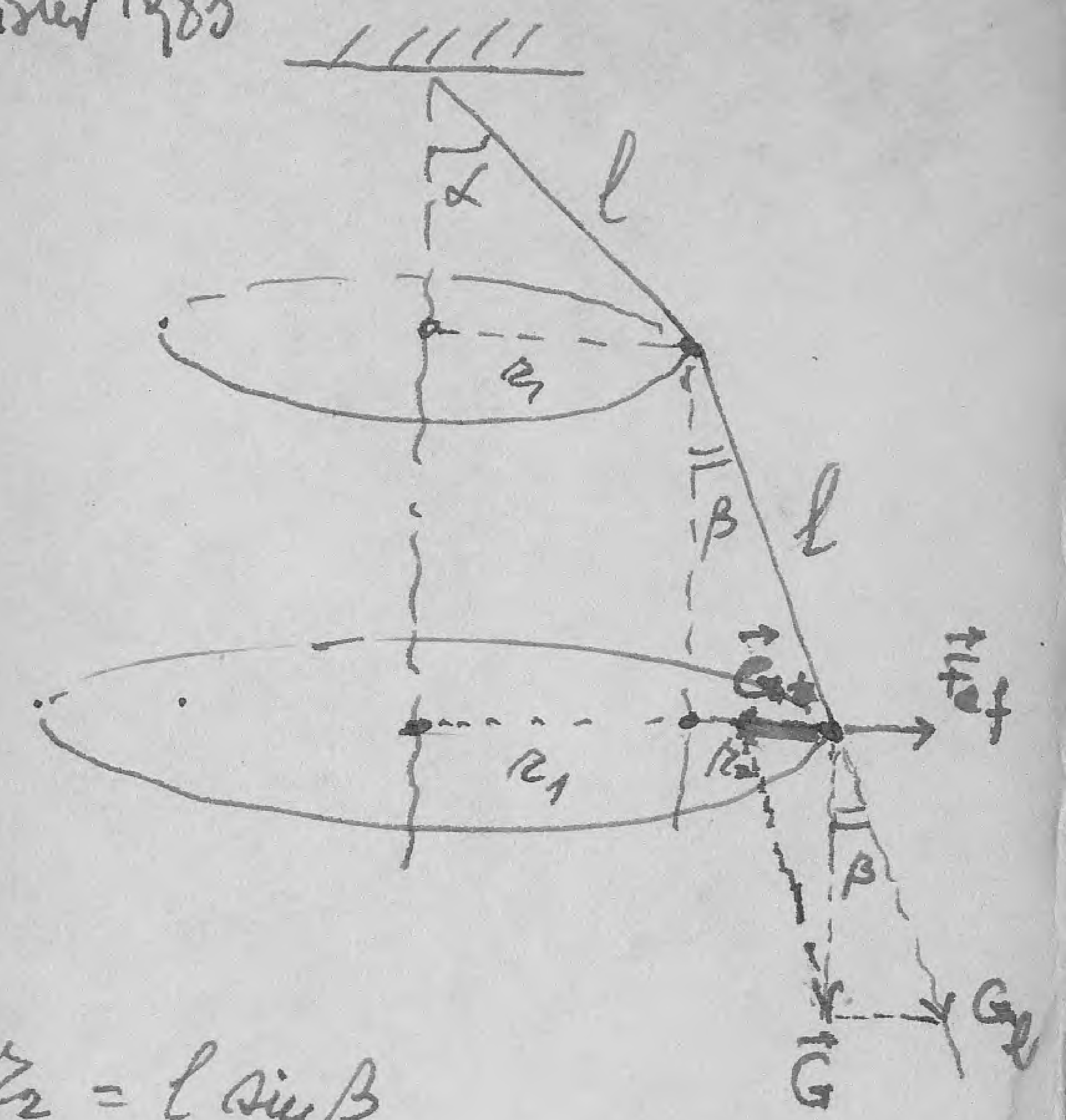
Pentru mișcarea cerută a motociclistului trebuie îndeplinite și (1) și (2). Se vede:

- Înclinația motociclistului astfel încât α să rămână constant depinde doar de rază și viteza liniară: $tg\alpha = \frac{Rg}{v^2}$
- Condiția α = const fiind îndeplinită, motociclistul nu alunecă prin translație în jos dacă $\mu = tg\alpha$.

$(tg\alpha = \frac{Rg}{v^2} = Rg / \frac{Rg}{\mu} = \mu)$

- motociclistul poate merge perpendicular pe perete, $\alpha = 90°$ pt. că $v = \infty$ ($tg 90° = \infty$; ...) Deci este imposibil.

29 _ 1.3.193 Hristev 1983



$l = 0,4$ m

$\alpha = 60°$

$\beta = 45°$

$\omega = ?$

$R = r_1 + r_2$

$r_1 = l \sin\alpha \; ; \quad r_2 = l \sin\beta$

$R = l(\sin\alpha + \sin\beta)$

$F_{cf} = G_t$

$F_{cf} = m\omega^2 R \; ; \quad G_t = mg\, tg\beta$

$m\omega^2 R = mg\, tg\beta$

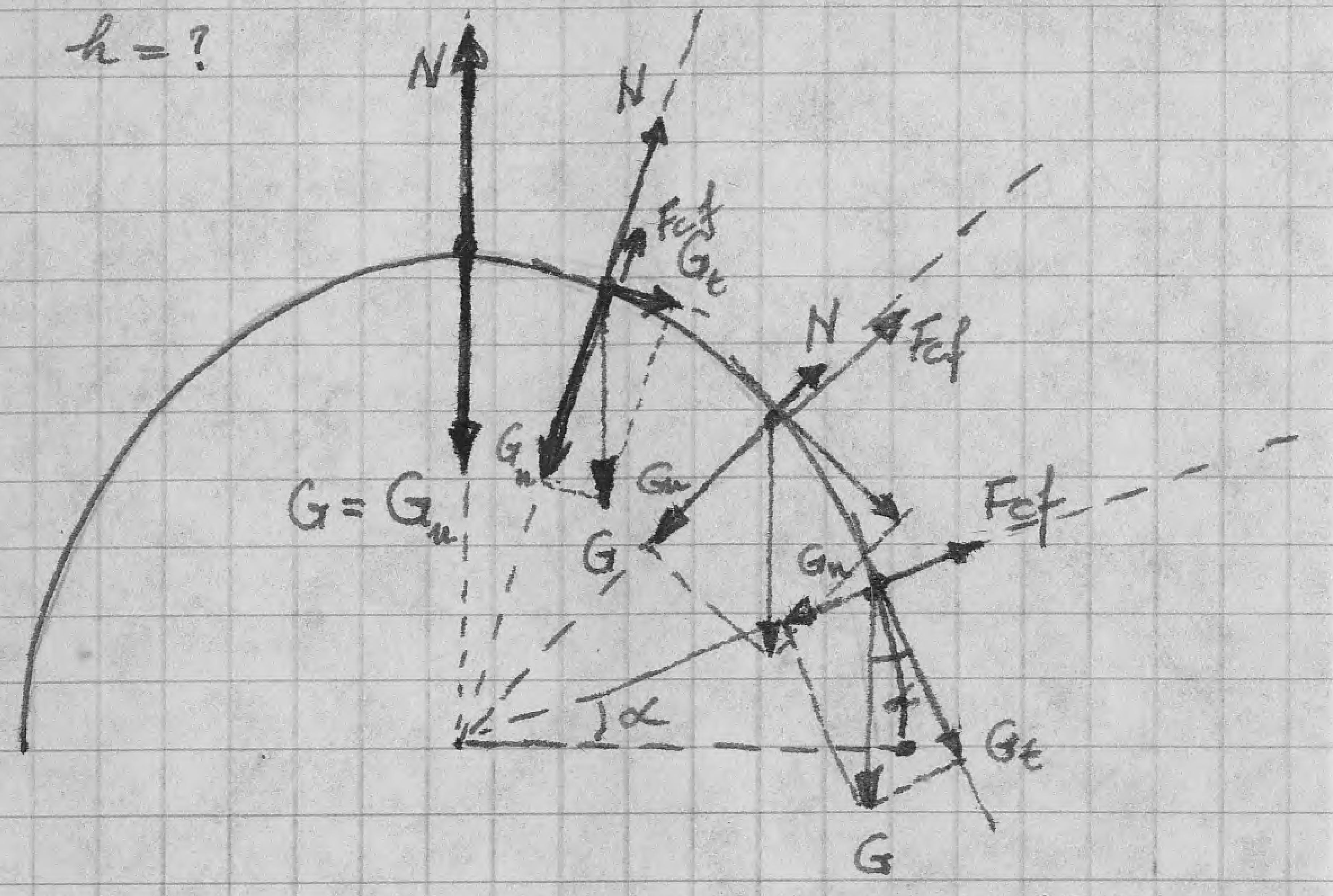
$$\omega^2 = \frac{g\, tg\beta}{R} = \frac{g\, tg\beta}{l(\sin\alpha + \sin\beta)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g\, tg\beta}{l(\sin\alpha + \sin\beta)}}}$$

H.1.3.194

R = 3m

h = ?



În timpul „coborîrii" pe sferă avem $\vec{G} = ct$, dar G_n scade și F_{cf} crește, iar

$$N = G_n - F_{cf}$$

în fiecare moment. Se vede că N scade. Desprinderea se va produce cînd N = 0. Atunci:

$G_n = F_{cf}$; $mg\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}$; $v^2 = Rg\sin\alpha$

Cum $\sin\alpha = \frac{h}{R}$ avem $\boxed{v^2 = gh}$ (1)

unde h este înălțimea la care are loc desprinderea.

Din legea conservării energiei:

$mg(R-h) = \frac{mv^2}{2}$; $\boxed{v^2 = 2g(R-h)}$ (2)

Din (1) și (2) $\boxed{h = \frac{2R}{3}}$

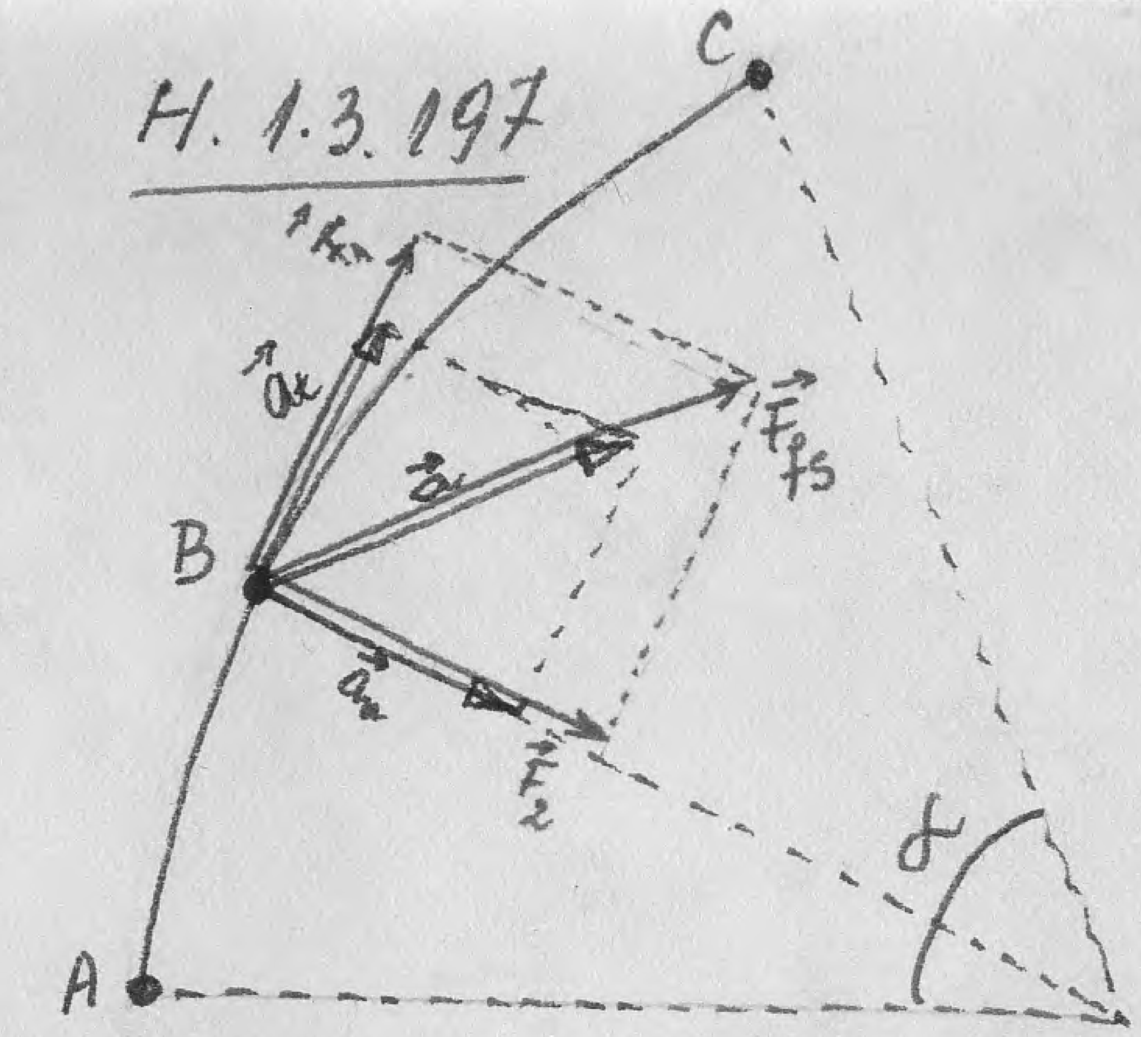
H.1.3.197

R = 100m

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0,3$

$v_M = ?$



Forța $\vec{F}_a = m\vec{a}$ care produce accelerația $\vec{a}$ manifestîndu-se prin intermediul frecării statice dintre anvelope și sol (dacă nu patinează, acestea se rostogolesc fără să „alunece" pe sol), are ca valoare maximă forța de frecare dinamică $F_f = \mu mg$. Dacă motorul generează o forță de tracțiune mai mare ca F_f, efectul va fi patinarea roților și nu o accelerație superioară celei create de forța de frecare dinamică. Deci:

$F_a \le F_f$; $ma \le \mu mg$; $a \le \mu g$

și $\boxed{a_M = \mu g}$ (1)

Într-un punct oarecare B al arcului AC:

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$; $a_n = \frac{v^2}{R^2}$; $\boxed{a_t^2 = a^2 - \frac{v^4}{R^2}}$ (2)

AC fiind parcurs uniform accelerat, viteza crește după legea $v = a_t \cdot \Delta t$, fiind, evident, cu cea mai mare valoare în punctul C. Folosind ecuația lui Galilei:

$v_c^2 = 2a_t \cdot \widehat{AC}$ sau, cum $\widehat{AC} = \alpha R$ $v_c^2 = 2\alpha R a_t$

$\boxed{v_c^4 = 4\alpha^2 R^2 a_t^2}$ (3)

Scriind (2) pentru punctul C și ducînd a_t în (3)

$a_t^2 = a_c^2 - \frac{v_c^4}{R^2}$; $v_c^4 = 4\alpha^2R^2\left(a_c^2 - \frac{v_c^4}{R^2}\right)$; $v_c^4(1+4\alpha^2) = 4\alpha^2R^2a_c^2$

$v_c^4 = \frac{4\alpha^2R^2}{1+4\alpha^2}a_c^2$; $v_c^4 = \frac{R^2}{1+\frac{1}{4\alpha^2}}a_c^2$; $\boxed{v_c^2 = \frac{R}{\sqrt{1+\frac{1}{4\alpha^2}}}a_c}$ (4)

In timpul parcurgerii lui AC cea mai mare viteză se realizează în C, ea depinzând de a_C (accelerația totală în C), după legea (4). Evident, vom avea v_C maximă, când a_C va fi maximă:

$$v_M^2 = \frac{R}{\sqrt{1+\frac{1}{4\alpha^2}}}\, a_M$$

Dar, în baza lui (1), avem $a_M = \mu g$. Așadar:

$$\boxed{v_M^2 = \frac{\mu R g}{\sqrt{1+\frac{1}{4\alpha^2}}}}$$

care, pentru $\alpha = \frac{\pi}{6}$, devine

$$\boxed{v_M^2 = \frac{\mu R g}{\sqrt{1+\frac{9}{\pi^2}}}}$$

rezultat dat în Culegere. Particularizarea doar a lui α nu este însă justificată, restrângând generalitatea soluției găsite.

158

H.1.3.197 8.11.987

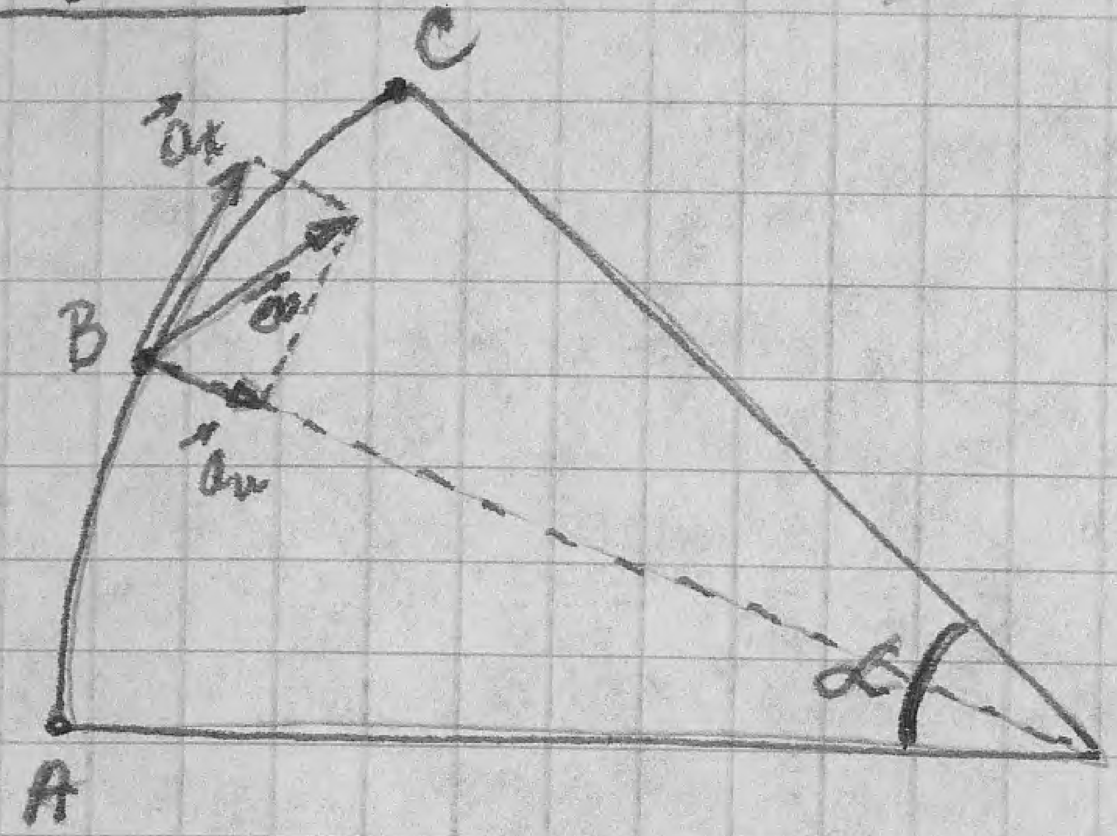
$a_t = ct$ pe $\widehat{AC}$

$R = 100\,m$

$\alpha = 30^\circ$

$\mu = 0,3$

$v_M = ?$



Pe $\widehat{AC}$ mișcarea este uniform variată:

$$v_C^2 = 2a_t\, l_{\widehat{AC}} = 2a_t \alpha R \; ; \quad \boxed{v_C^2 = 2\alpha R a_t} \quad (1)$$

a_t este constant pe $\widehat{AC}$, dar nu are valoarea precizată. Ca urmare o vom alege astfel încât să obținem în C viteza v_C maximă.

Din (1) se vede că v_C va fi maximă pentru a_t maximă. Așadar:

$$\boxed{v_M^2 = 2\alpha R a_{tM}} \quad (1^*)$$

Într-un punct oarecare B:

$$a_t^2 = a_B^2 - a_{nB}^2 = a_B^2 - \frac{v_B^4}{R^2} \qquad \boxed{a_t^2 = a_B^2 - \frac{v_B^4}{R^2}} \quad (2)$$

Pentru punctul C:

$$\boxed{a_t^2 = a_C^2 - \frac{v_C^4}{R^2}} \quad (2^*)$$

Cum $a_t = ct$, urmează că creșterea lui a_B atrage creșterea lui v_B.

Din (2^*) se vede că a_t crește cu a_C, deci a_t va fi maxim odată cu a_C:

$$\boxed{a_{tM}^2 = a_M^2 - \frac{v_M^4}{R^2}} \quad (2^{**})$$

unde am folosit și (1^*)

Accelerația pe $\hat{AB}$ este determinată de forța de frecare statică, deci:

$$F_a \le F_f = \mu m g \quad ; \quad ma \le \mu m g ; \quad \boxed{a \le \mu g} \quad (3)$$

Evident $\boxed{a_M = \mu g}$ (3*)

Asadar (2**) devine

$$a_{tM}^2 = \mu^2 g^2 - \frac{v_M^4}{R^2}$$ înlocuind în (1*) pe a_t:

$$v_M^4 = 4\alpha^2 R^2 \left(\mu^2 g^2 - \frac{v_M^4}{R^2}\right)$$

$$v_M^4 = 4\alpha^2 \mu^2 g^2 R^2 - 4\alpha^2 v_M^4$$

$$v_M^4 (1 + 4\alpha^2) = 4\alpha^2 \mu^2 g^2 R^2$$

$$v_M^4 = \frac{4\alpha^2 \mu^2 g^2 R^2}{1 + 4\alpha^2} = \frac{\mu^2 g^2 R^2}{1 + \frac{1}{4\alpha^2}}$$

$$\boxed{v_M^2 = \frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\alpha^2}}}}$$ Făcând $\alpha = \frac{\pi}{6}$ avem

$$v_M^2 = \frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \frac{9}{\pi^2}}}$$ ca în Culegere. Înlocuirea respectivă nu este motivată.

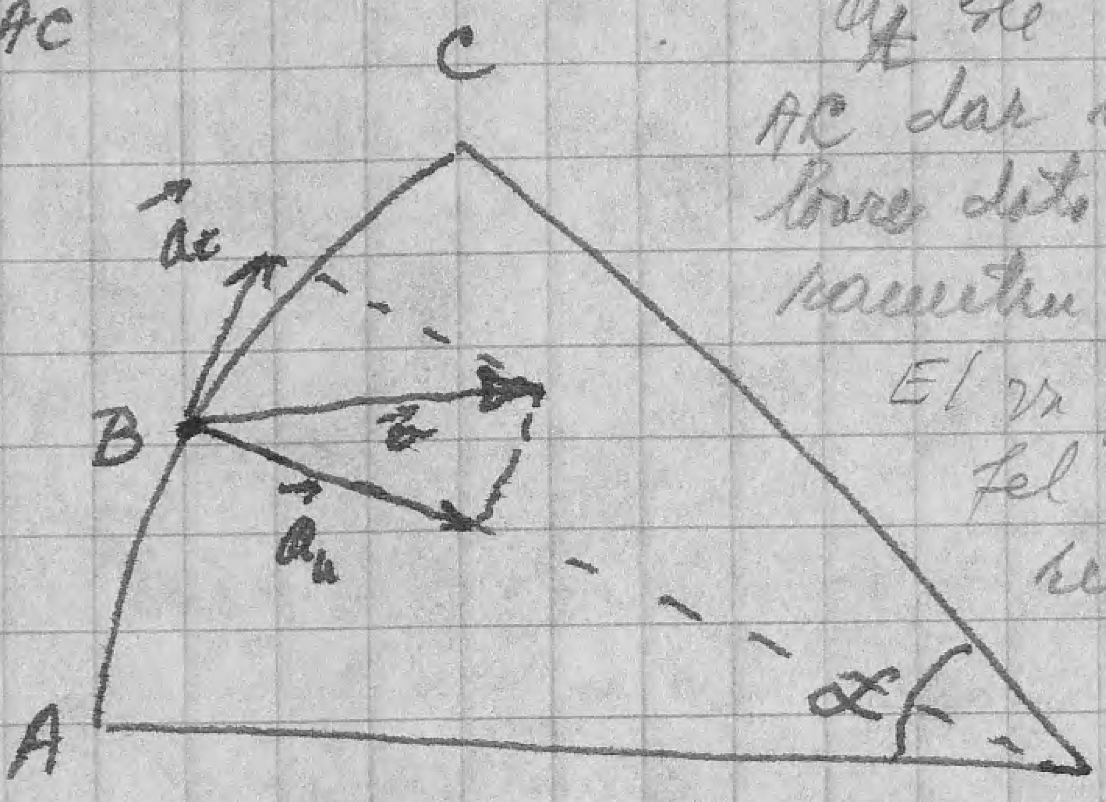
8.11.1987

159

1.3.197

$a_t = ct$ pe $\hat{AC}$
$R = 100\,m$
$\alpha = 30^\circ$
$\mu = 0{,}3$

$v_M = ?$



a_t este constant pe $\hat{AC}$ dar nu are valoare dată, ci este parametru variabil. El va fi ales astfel încât să se realizeze pe v_C maxim.

Accelerația este produsă de forța de frecare statică, deci $F_a \le F_f = \mu m g$ și $ma \le \mu m g$

$$\boxed{a \le \mu g}$$

Evident, $\boxed{a_M = \mu g}$ (1)

a_t și v_C fiind maxime, rezultă și pe a_c să fie maxim

$$v_c^2 = 2a_t \cdot \hat{AC} = 2a_t \alpha R$$, adică

$$\boxed{v_C^2 = 2\alpha R a_t} \quad (2)$$ se vede că v_C este maxim când a_t este maxim.

Într-un punct B: $a_t^2 = a_B^2 - a_{nB}^2 = a_B^2 - \frac{v_B^4}{R^2}$

În punctul C: $\boxed{a_t^2 = a_c^2 - \frac{v_c^4}{R^2}}$ (3)

Pe parcursul lui AB avem, din enunț, $a_t = ct$. Desigur, $v_c = a_t \cdot \Delta t$ va fi cu atât mai mare cu cât a_t va fi mai mare. Din (3) decurge că a_t (crește odată cu a_c, deci a_t) este maxim când a_c este maxim, adică pentru $a_c = a_M = \mu g$. Asadar, luăm în (3):

$$\boxed{a_{tM}^2 = \mu^2 g^2 - \frac{v_M^4}{R^2}} \quad (4)$$

~~Ridicăm (4) și (3)~~ ~~$\mu^2 g^2 + \frac{v_M^4}{R^2} =$~~

Scriem pe (2) sub forma:

$$v_M^2 = 2\alpha R a_{t_M}$$

și înlocuim a_{t_M} din (4):

$$v_M^4 = 4\alpha^2 R^2 \left(\mu^2 g^2 - \frac{v_M^4}{R^2}\right)$$

$$v_M^4 = 4\alpha^2 R^2 \mu^2 g^2 - 4\alpha^2 v_M^4$$

$$v_M^4 (1 + 4\alpha^2) = 4\alpha^2 R^2 \mu^2 g^2$$

$$v_M^4 = \frac{4\alpha^2 R^2 \mu^2 g^2}{1 + 4\alpha^2} \qquad v_M^2 = \frac{2\alpha R \mu g}{\sqrt{1 + 4\alpha^2}}$$

$$\boxed{v_M^2 = \frac{\mu R g}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\alpha^2}}}}$$

Dacă facem $\alpha = \frac{\pi}{6}$

$$v_M^2 = \frac{\mu R g}{\sqrt{1 + \frac{9}{\pi^2}}}$$ răspuns din Culegere.

Tabelarea datelor pentru o singură literă nu are însă nici un rost!

160

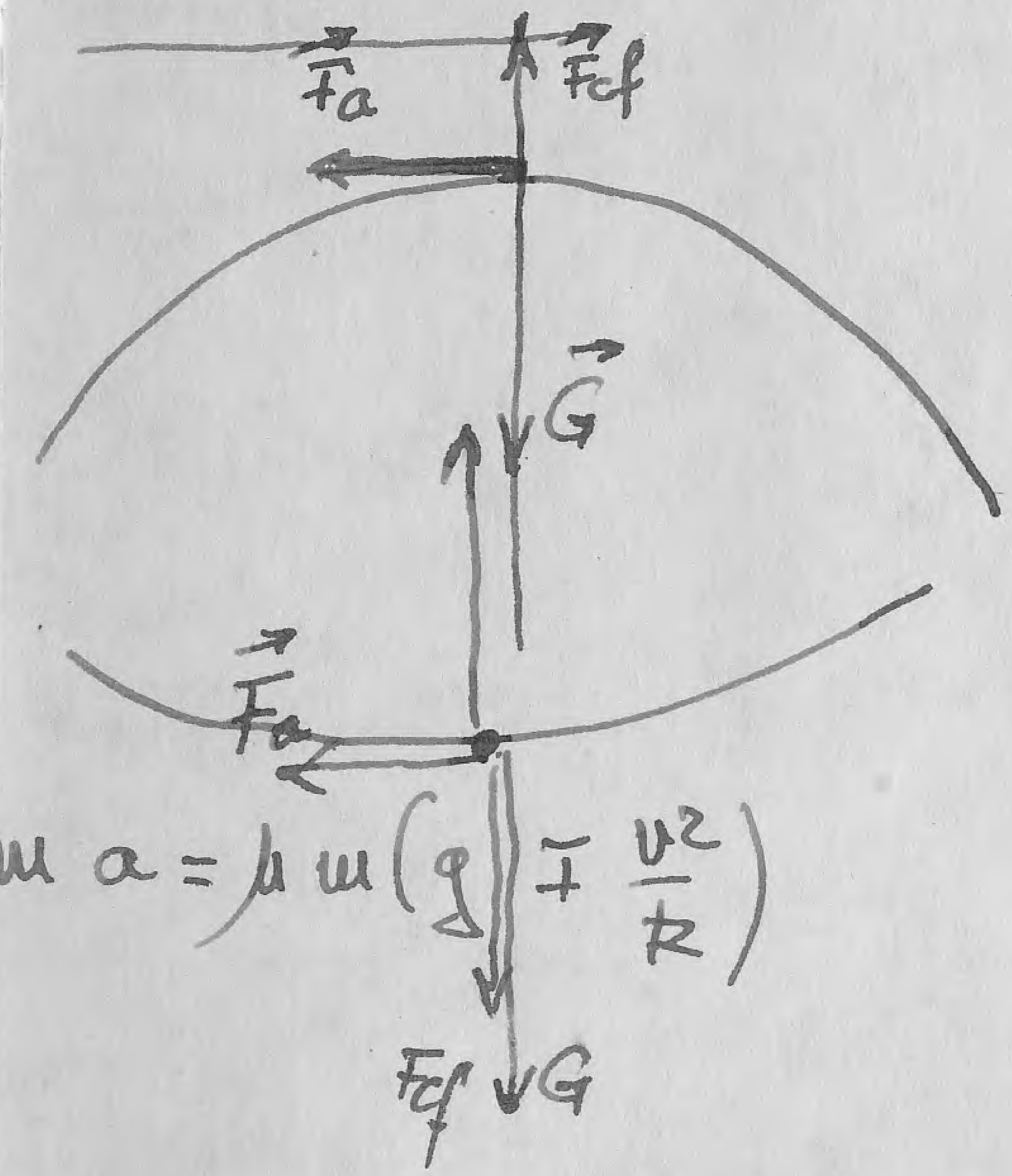
30_ 1.3.198 Hristev ie83

$R = 50\,m$

$v = 54\,km/h = \frac{54000\,m}{3600\,s} = \frac{540}{36}\,m/s = \frac{60}{4}\,m/s = 15\,m/s$

$a_M = ?$

$\mu = 0{,}3$



$F_a = F_f$

$F_f = \mu N$

$N = G \mp F_{cf}$

$N = mg \mp \frac{mv^2}{R}$

$F = ma$

$$m a = \mu m \left(g \mp \frac{v^2}{R}\right)$$

$$\boxed{a = \mu \left(g \mp \frac{v^2}{R}\right)}$$

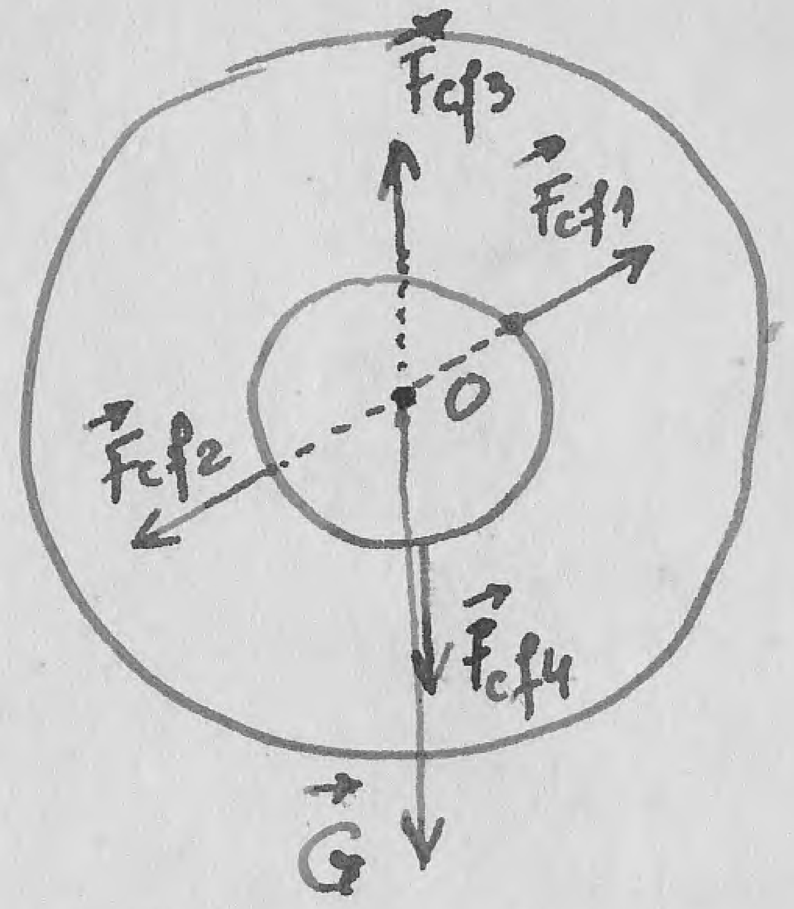
30 – 1.3.199 Hristev 1983

$m = 1\,kg$

$x = 0{,}2\,mm$

$n = 1200\ rot/min$

$R = ?$

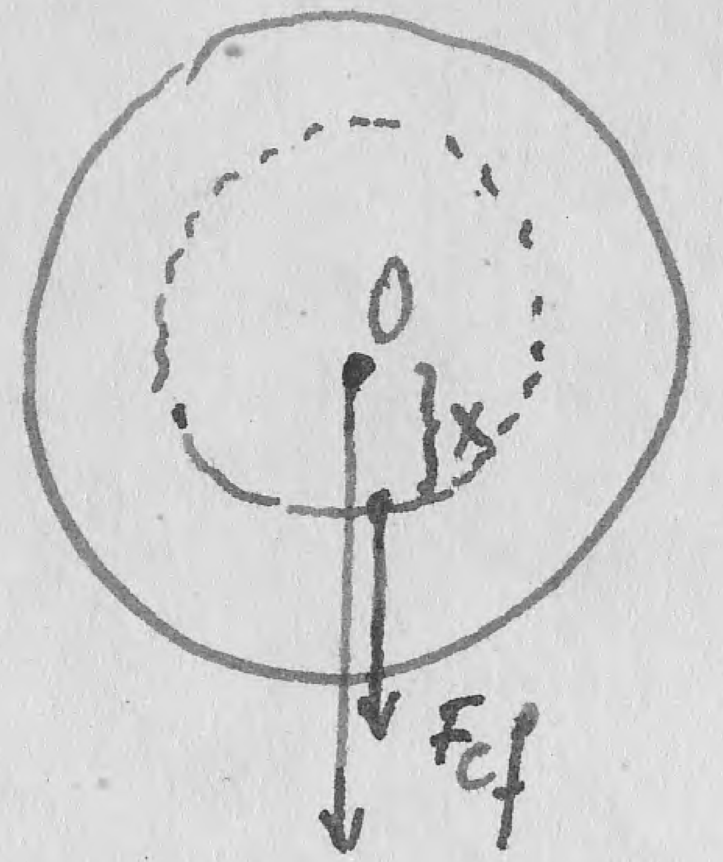


Asupra lagărelor fixate pe axul O acționează greutatea $\vec{G}$ a discului, în mod normal. Din cauza simetriei centrale față de O, cît discul este neuzat, forțele centrifuge care acționează asupra diverselor particule ale discului sînt dispuse în perechi de forțe opuse, care se anulează reciproc.

Cînd discul este uzat și centrul de greutate deplasat din O la distanța x, atunci cînd centrul de greutate este pe verticala din O, sub O, asupra axului O acționează atît greutatea $\vec{G}$ cît și forță centrifugă $\vec{F}_{cf}$ creată de masa m a discului plasată în centrul de greutate, adică solicitarea R a lagărelor este maximă.

$$F_{cf} = m\omega^2 x$$

unde x este raza cercului pe care se rotește masa m.



$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{F}_{cf}$$

$$R = mg + m\omega^2 x$$

$$\boxed{R = mg + 4\pi^2 n^2 m x}$$

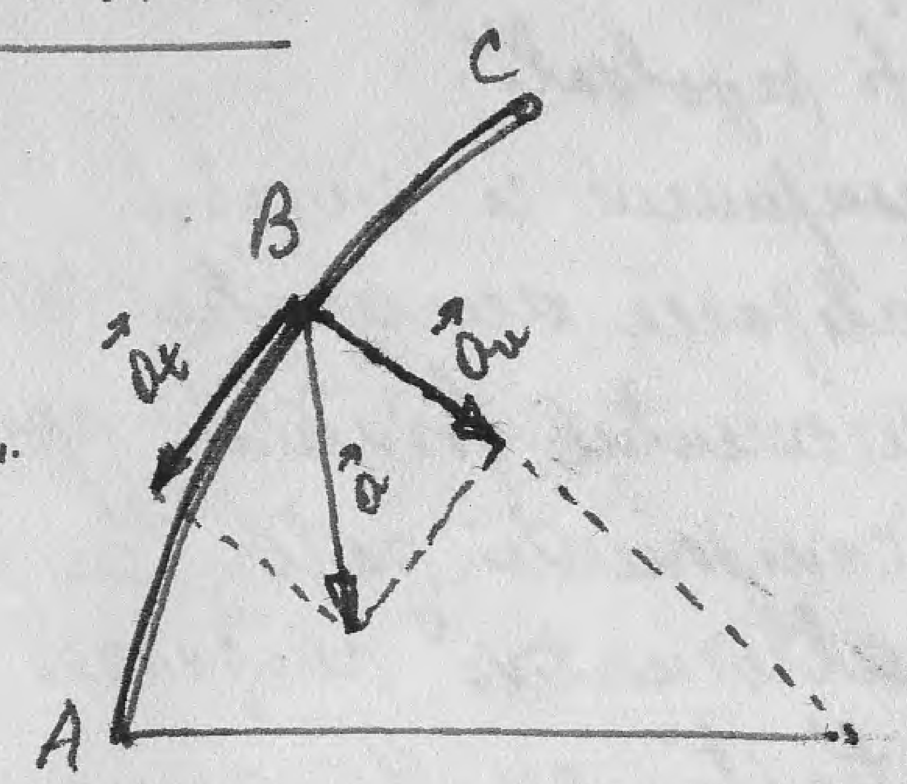
În situația în care șoferul frânează astfel încât în fiecare moment să aibă accelerația de frânare maximă [illegible] îmi există [illegible], are loc relația (1) în fiecare moment. Ca mașina să se oprească, viteza trebuie să scadă, deci a_t să nu fie constant. (1) implică v = ct dacă a_t = ct.

162

H. 1.3.200

R = 100 m
v_0 = 10 m/s
a = ct și maxim.
μ = 0,2

d = ?



Fie C punctul în care mobilul se oprește.

Într-un punct oarecare B pe arcul AC avem:

$a^2 = a_t^2 + a_n^2$. Cum $a_n = \frac{v^2}{R}$, $\boxed{a^2 = a_t^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

Dar $a_M = \mu g$ (vezi problema 1.3.197):

$$\boxed{a_t^2 = \mu^2 g^2 - \frac{v^4}{R^2}} \quad (1)$$

În A avem $v_A = v_0$, în C avem $v_C = 0$. Așadar, v scade de la v_0 la 0. Din (1) rezultă că a_t crește de la

$$a_{t_A} = \sqrt{\mu^2 g^2 - \frac{v_0^4}{R^2}}, \text{ la } a_{t_C} = \mu g$$

Cum $a_t \neq$ ct pe AC, mișcarea încetinită nu este uniform încetinită, și nu cunoaștem legea ei. Oricum, nu este aplicabilă legea spațiului în mișcarea uniform încetinită și nu știm cum poate fi calculat acest spațiu.

Observație

Pentru ca în fiecare moment accelerația totală a să aibă valoarea maximă posibilă (ca roțile să nu patineze) trebuie ca forța de frânare dezvoltată de apăsarea pe frână să fie egală cu forța de frecare dinamică dintre roți și sol:

$F_a = F_f$; $F_a = \mu m g = ct$; $F_a = ma = m\sqrt{a_t^2 + \frac{v^4}{R^2}}$

În această ipoteză am văzut că $a_t \neq ct$ și problema nu poate fi rezolvată.

Să presupunem că enunțul problemei are în vedere realizarea accelerației totale „a" maxime doar în momentul frânării, apoi păstrarea constantă a componentei sale tangențiale a_t. În această alternativă mișcarea pe AC este uniform încetinită, cu a_t având valoarea constantă egală cu cea maximă posibilă în momentul frânării în A. Folosind ecuația Galilei:

$$AC = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_t} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\sqrt{\mu^2 g^2 - \frac{v_0^4}{R^2}}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{\sqrt{\frac{\mu^2 g^2 R^2 - v_0^4}{R^2}}}$$

$$\boxed{AC = \frac{v_0^2 R}{2\sqrt{(\mu R g)^2 - v_0^4}}}$$

Coincidența rezultatului cu al din Culegere, duce la concluzia că tocmai această alternativă a fost avută în vedere de autor.

Pentru ca ea să fie explicită, în enunț ar trebui specificat: „... frânează cu accelerația tangențiară maximă pentru ca roțile să nu patineze în momentul frânării, apoi astfel încât deplasarea până la oprire să fie o mișcare uniform variată..."

De observat că în această alternativă, într-un punct oarecare B avem

$a^2 = a_t^2 + \frac{v^4}{R^2}$. Cum $a_t = a_{tA} = ct$, $v < v_A$, trebuie ca și $a < a_A = \mu g$, deci accelerația totală scade de la A spre C, având:

$a_A = \mu g$; $a_C = \sqrt{\mu^2 g^2 - \frac{v_0^4}{R^2}} = a_t$

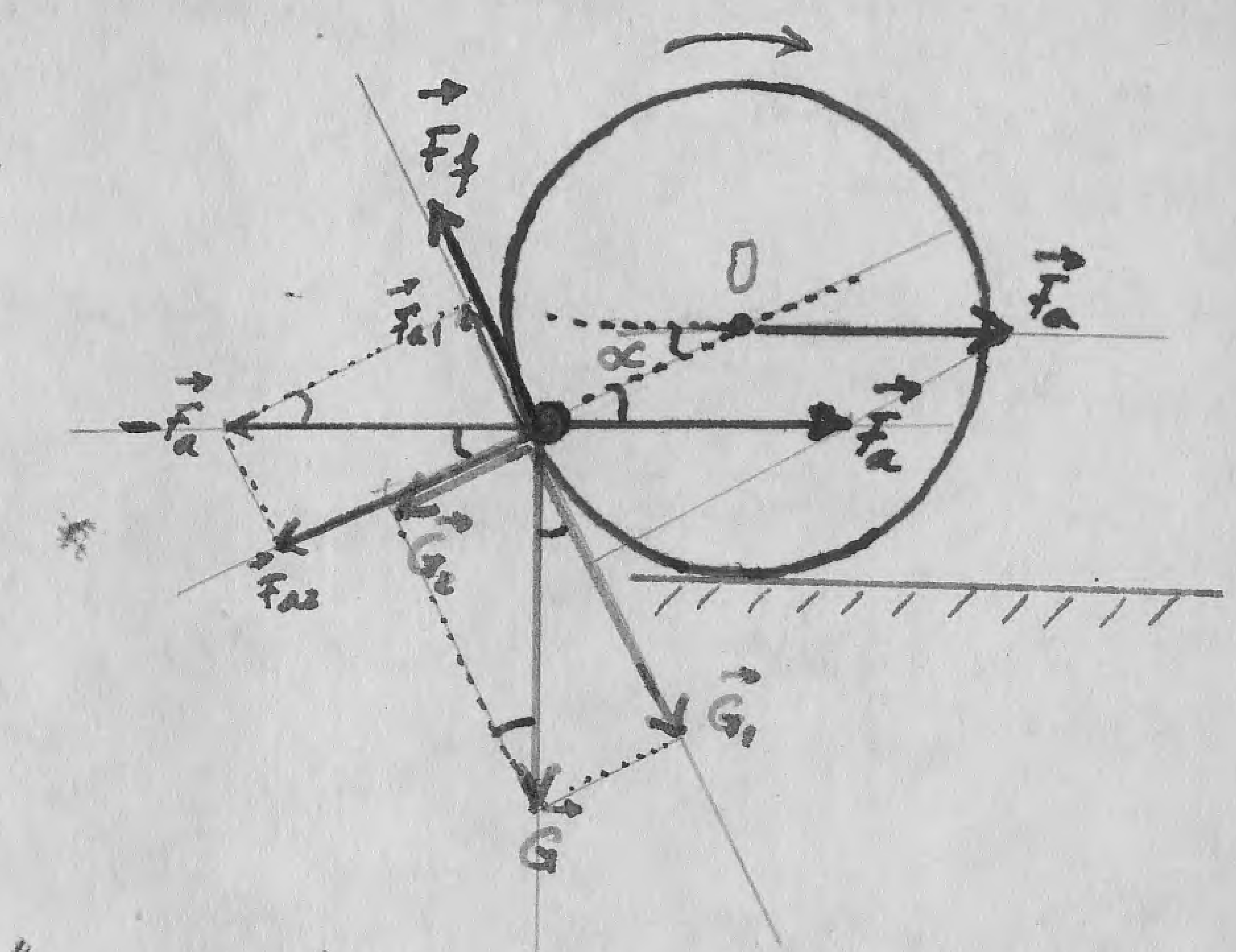
30- 1.3.201 Hristev 1983

$a = 4{,}9\ m/s^2$

$\mu = 0{,}33$

$\alpha = const.$

$\alpha = ?$



Accelerația „a" a cilindrului este imprimată de o forță $\vec F_a$ aplicată axului său în O. Când corpul din interior rămâne în echilibru formând unghiul α cu orizontala, el are aceeași accelerație ca și cilindrul, determinată de forța ma aplicată corpului de masă m din partea cilindrului. În baza legii a III-a a dinamicii corpul va acționa asupra cilindrului cu forța $-\vec F_a$ de valoare ma, care poate fi descompusă în componentele $\vec F_{a1}$ și $\vec F_{a2}$

$F_{a1} = F_a \sin\alpha$; $F_{a2} = F_a \cos\alpha$

$F_{a1} = ma \sin\alpha$; $F_{a2} = ma \cos\alpha$

Se vede că forța de apăsare normală a corpului pe cilindru

$N = G_2 + F_{a2} = mg \sin\alpha + ma \cos\alpha$

și $F_f = \mu N = \mu m (g \sin\alpha + a \cos\alpha)$

$F_f = \mu m (g \sin\alpha + a \cos\alpha)$ (1)

Pe de altă parte, pentru ca corpul să nu urce sau coboare pe cilindru trebuie să avem:

$$F_f = G_1 - F_{a1} = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha = m[g\cos\alpha - a\sin\alpha]$$

$$F_f = m[g\cos\alpha - a\sin\alpha] \qquad (2)$$

Din (1) și (2) avem:

$$\mu m[g\sin\alpha + a\cos\alpha] = m[g\cos\alpha - a\sin\alpha]$$

$$\mu g\sin\alpha + a\sin\alpha = g\cos\alpha - \mu a\cos\alpha$$

$$(\mu g + a)\sin\alpha = (g - \mu a)\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{g - \mu a}{a + \mu g}$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \frac{g - \mu a}{a + \mu g}}$$

Observație

Corpul de masă m, în momentul când forța de frecare F_f este echilibrată de $G_1 - F_{a1}$, ~~...~~ execută numai translație, nu și rotație cu cilindrul, așa că nu acționează forța centrifugă asupra lui.

164

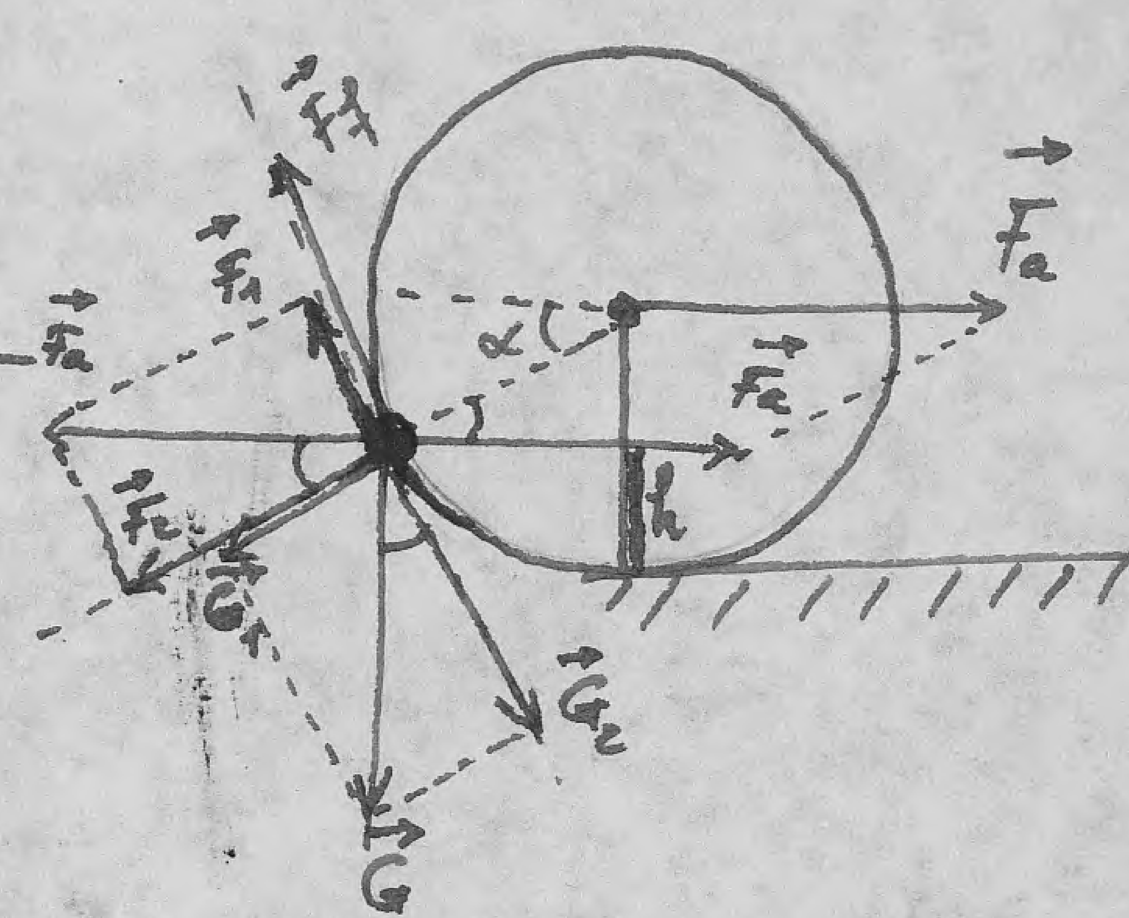
30 – 1.3.202 Hristev 1983

$R = 1\,m$

$a = 4,9\,m/s^2$

$\mu = 0,5$

$h = ?$



Corpul din interior de masă m după ridicarea la înălțimea h nu mai se rotește cu cilindrul, deci forța centrifugă nu acționează. În acel moment forța de frecare F_f echilibrează pe ~~G~~ $G_2 - F_1$. Avem

$$F_f = G_2 - F_1 = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha$$

$$F_f = \mu N = \mu(G_1 + F_2) = \mu mg\sin\alpha + ma\cos\alpha$$

și

$$\mu mg\sin\alpha + \mu ma\cos\alpha = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha$$

$$\sin\alpha\cdot(\mu g + a) = \cos\alpha\cdot(g - \mu a)$$

$$tg\,\alpha = \frac{g - \mu a}{a + \mu g} \qquad (1)$$

Observ că $h = R - R\sin\alpha$ (din figură)

$$h = R(1 - \sin\alpha) = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + ctg^2\alpha}}\right)$$

$$\cancel{h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{g - \mu a}{g + \mu g}\right)^2}}\right) \quad (2)}$$

Să arăt că

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$$

Se știe că

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Big| : \sin^2\alpha$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{1}{1+ctg^2\alpha} = \sin^2\alpha \quad \text{de unde}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{tg^2\alpha}}}}$$

Așadar:

$$\boxed{h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a+\mu g}{g-\mu a}\right)^2}}\right)}$$

195

30_1.3.203 Hristev 1983

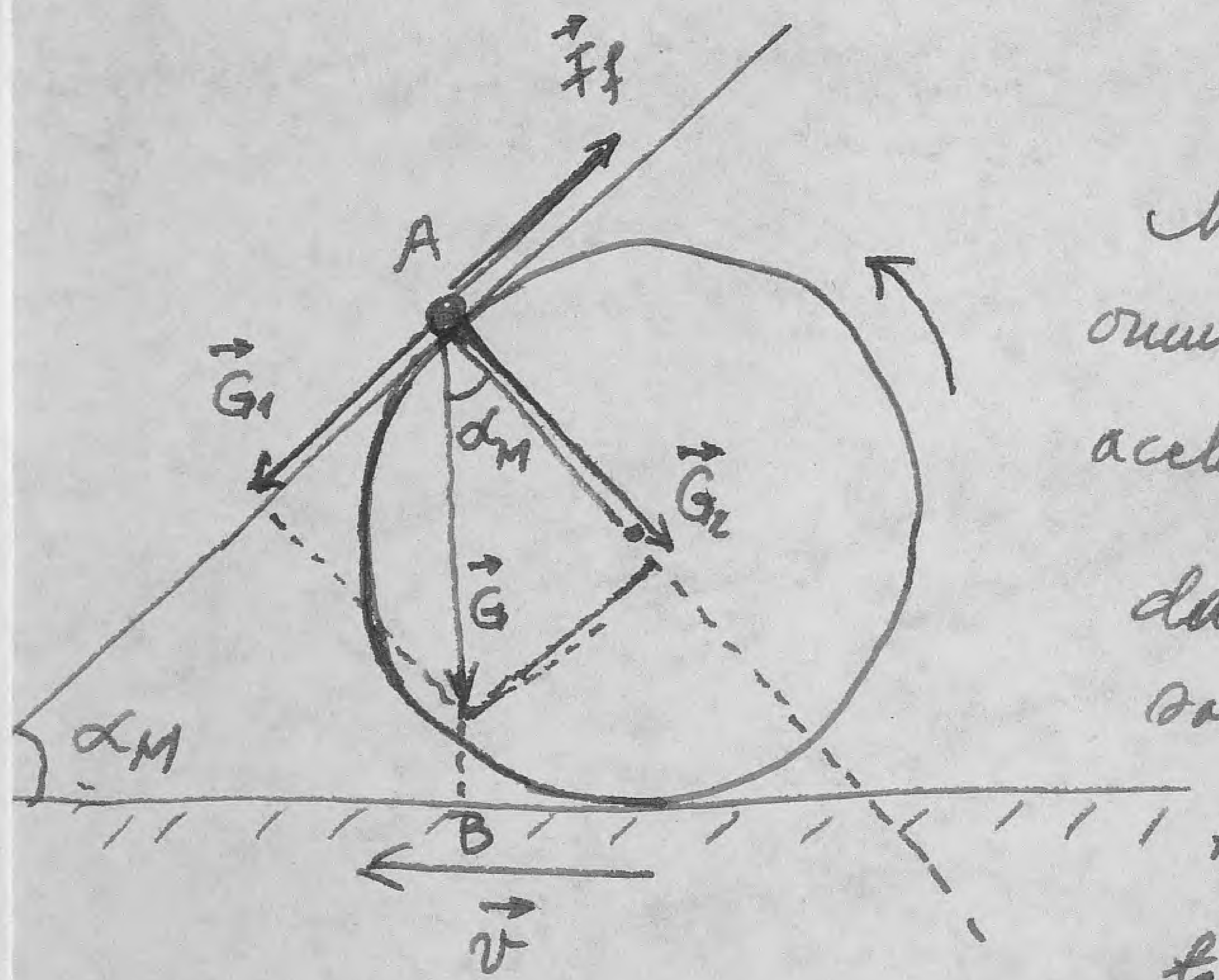
$m = 60\ kg$

$v = const\ (a=0)$

$\varphi = 30^\circ$

$\alpha_M = ?$

$F_f = ?$



Cilindrul are viteza $\vec{v}$ din figură. Cum $v = const$, nu avem forță de accelerare a cilindrului, deci nici a omului din A.

Greutatea $\vec{G}$ a omului o descompunem:

$$\vec{G} = \vec{G_1} + \vec{G_2}$$

Mergând pe cilindru, omul va rămâne cu același unghi α_M dacă frecarea tălpilor sale de cilindru $\vec{F_f}$ va fi echilibrată de $\vec{G_1}$.

$F_f = G_1$. Dar $F_f = \mu N$;

$\boxed{F_f = mg\sin\alpha_M}$ $\quad F_f = \mu G_2$; $\boxed{F_f = \mu mg\cos\alpha_M}$

Deci

$$mg\sin\alpha_M = \mu mg\cos\alpha_M \quad \boxed{tg\,\alpha_M = \mu}$$

Dar aceasta înseamnă că α_M este unghiul de frecare φ: $\boxed{\alpha_M = \varphi}$

$$F_f = mg\sin\alpha_M \quad \boxed{F_f = mg\sin\varphi}$$

106

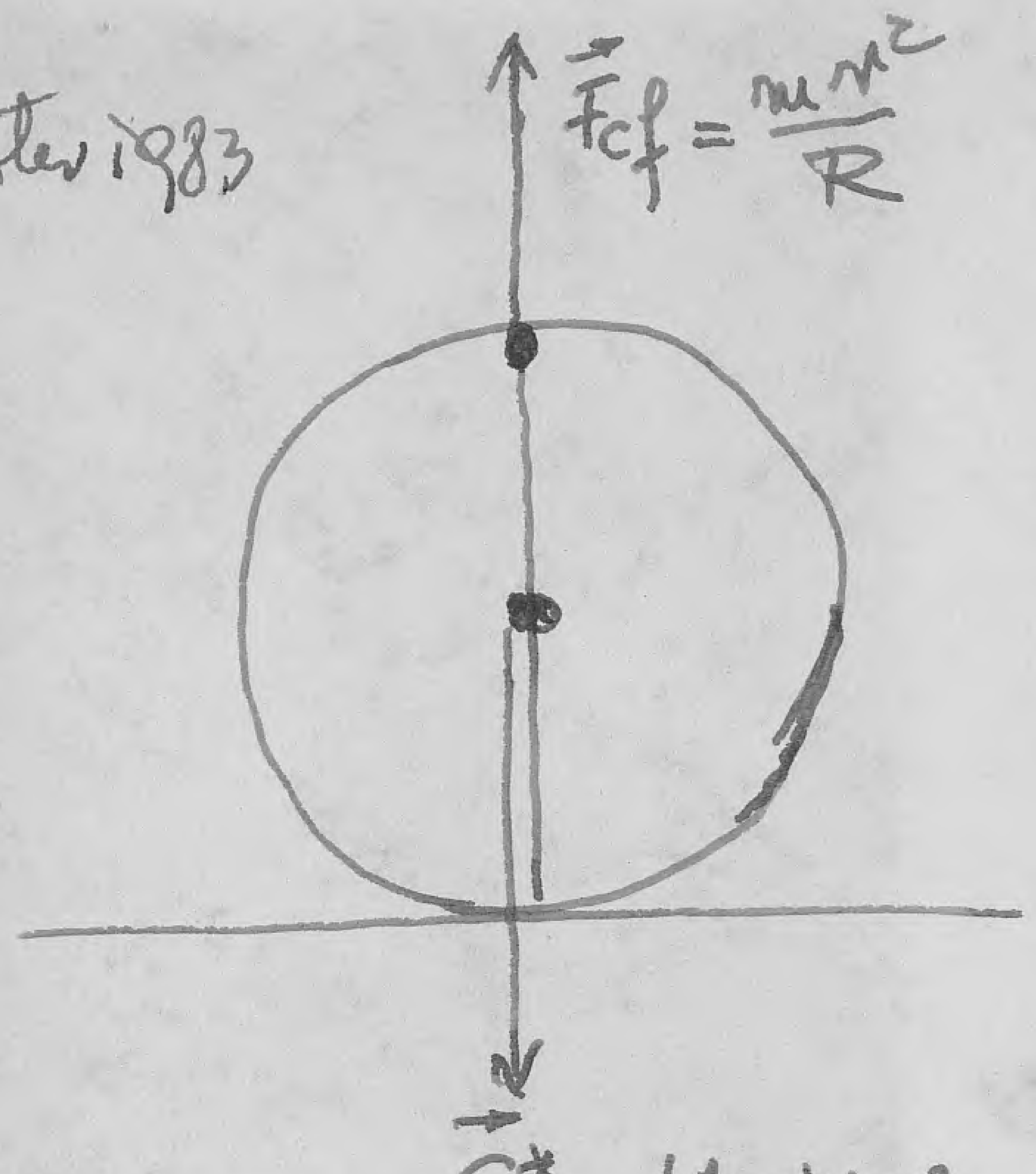
30 – 1.3.204 Hristev 1983

$R = 0{,}5\,m$

$M = 10\,kg$

$m = 100\,g$

$v = ?$



$\vec{G}^* = Mg + mg$

Condiția de a se desprinde este

$$F_{cf} > G^*$$

$$\frac{mv^2}{R} > Mg + mg$$

$$v^2 > Rg\,\frac{M+m}{m} \qquad \boxed{v > \sqrt{Rg\left(\frac{M}{m}+1\right)}}$$

Obs. În manual

$$v \geq \sqrt{Rg\left(\frac{M}{m}+1\right)}$$

În cazul egalității corpul nu este acționat pe verticală de nici o forță (rezultanta este nulă) și nu poate dobândi accelerație pe această direcție. Cum discul avea pe verticală $v=0$ în momentul din figură, aceasta nu se va modifica

107

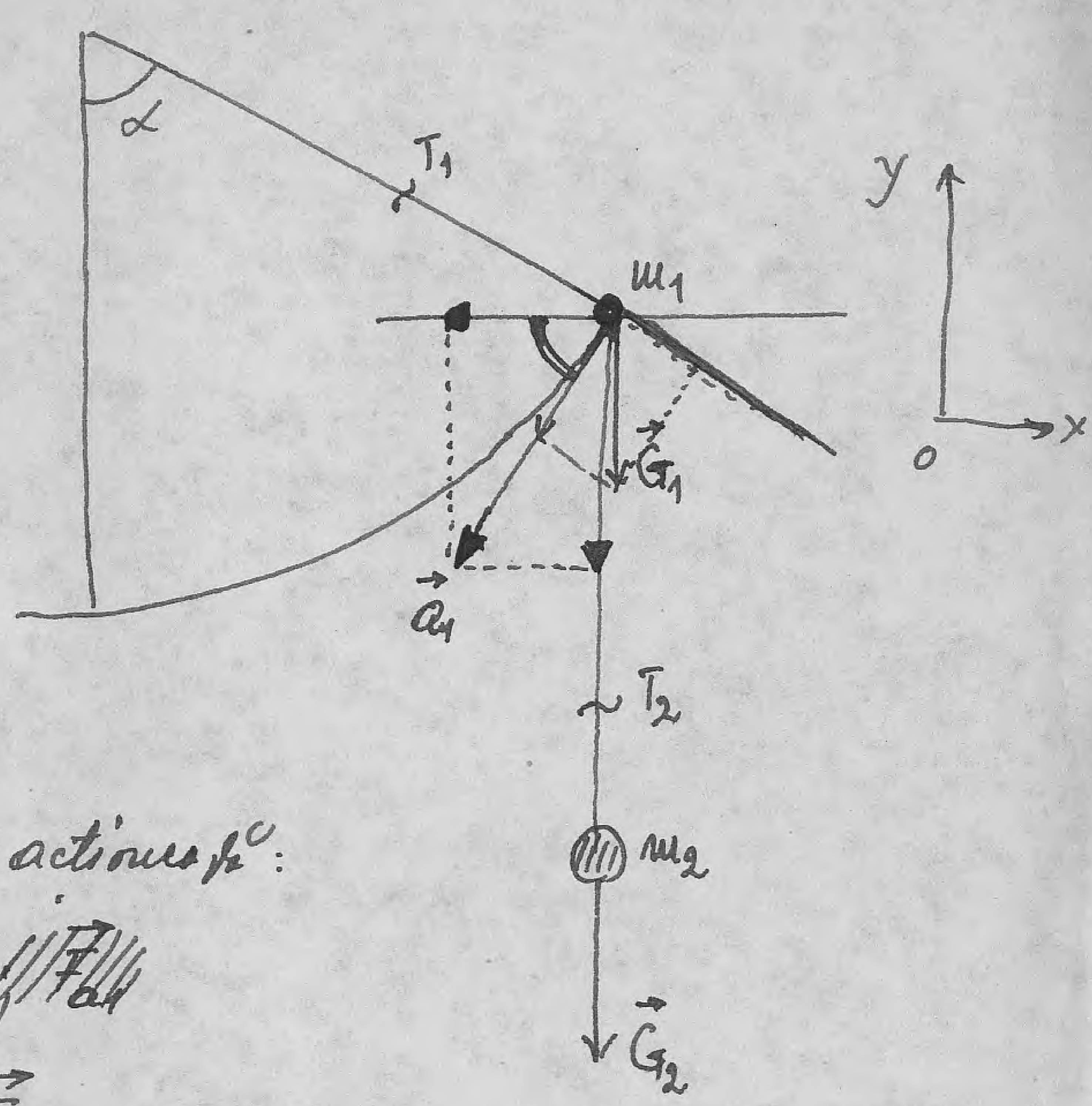
30 – 1.3.205 Hristev 1983

$m_1 = 10\,g$

$\alpha = 60°$

$m_2 = 20\,g$

$a_2 = ?$



Asupra corpului 1 acționează:

$\vec{T}_1$; $\vec{G}_1$; $\vec{T}_2$

$$\vec{G}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{F}_{a1} \qquad (1)$$

Asupra corpului 2 acționează $\vec{G}_2$ și $\vec{T}_2$

$$\vec{G}_2 + \vec{T}_2 = \vec{F}_{a2} \qquad (2)$$

Observ că $\vec{a}_2$ este pe verticală, adică cu componenta verticală a lui $\vec{a}_1$:

$$a_2 = a_1 \sin\alpha \quad (3) \quad \text{sau} \quad a_1 = \frac{a_2}{\sin\alpha} \quad (3^*)$$

Proiectând relațiile (1) și (2) pe axe:

(1) pe ox: $0 - T_1 \sin\alpha + 0 = -m_1 a_1 \cos\alpha$

$$T_1 = \frac{m_1 a_1 \cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

pe oy: $-m_1 g + T_1 \cos\alpha - T_2 = -m_1 a_1 \sin\alpha$

$T_1\cos\alpha - T_2 = m_1 g - m_1 a_1 \sin\alpha \qquad (5)$

(2) pe Oy: $-m_2 g + T_2 = -m_2 a_2 \qquad (6)$

Înc 4 în 5

$$\frac{m_1 a_1 \cos\alpha}{\sin\alpha}\cos\alpha - T_2 = m_1 g - m_1 a_1 \sin\alpha$$

$$T_2 = \frac{m_1\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{a_2}{\sin\alpha} - m_1 g + m_1\sin\alpha\,\frac{a_2}{\sin\alpha}$$

$$T_2 = m_1 a_2 \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - m_1 g + m_1 a_2$$ duc în (6):

$$-m_2 g + m_1 a_2 \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - m_1 g + m_1 a_2 = -m_2 a_2$$

$$m_1 \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} a_2 + m_1 a_2 + m_2 a_2 = m_1 g + m_2 g$$

$$a_2\left[m_1\cos^2\alpha + m_1\sin^2\alpha + m_2\sin^2\alpha\right] = (m_1+m_2) g \sin^2\alpha$$

$$a_2\left[m_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + m_2\sin^2\alpha\right] = (m_1+m_2) g \sin^2\alpha$$

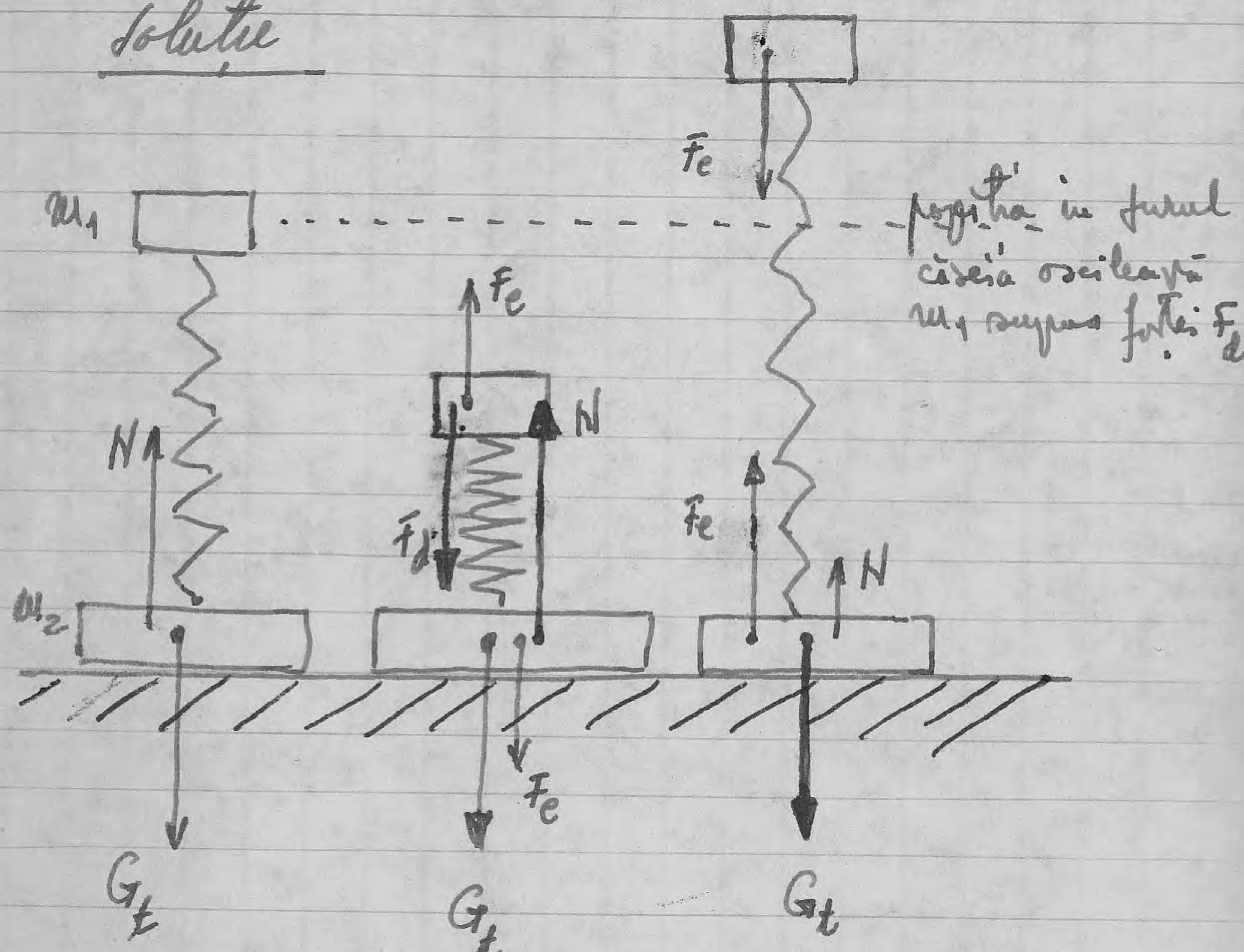
$$a_2\left[m_1 + m_2\sin^2\alpha\right] = (m_1+m_2) g \sin^2\alpha$$

$$\boxed{a_2 = g\sin^2\alpha\,\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2\sin^2\alpha}}$$

1.3.212 Roșca I

Două plăci de mase $m_1 = 0,1$ kg și $m_2 = 0,2$ kg sînt legate printr-un resort ca în figură. Ce forță trebuie să apăsăm pe corpul m_1 pentru ca apoi lăsînd liber sistemul, corpul m_2 să se desprindă de masă?

Soluție



$N = G_t$ $\qquad N = G_t + F_e$ $\qquad N = G_t - F_e$

cu $F_d = F_{e\,max}$ $\qquad$ cu $F_d = F_{e\,max}$

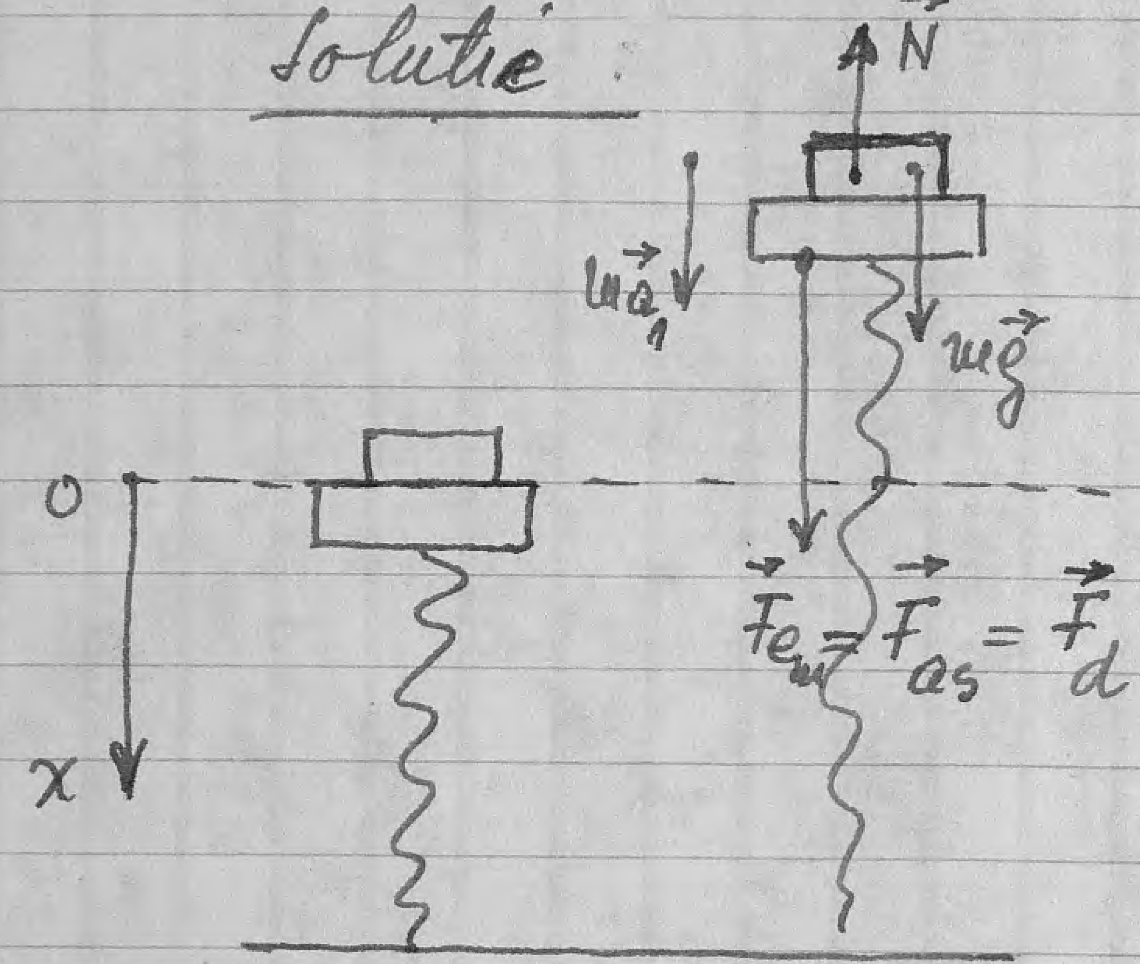
Pentru ca m_2 să se poată desprinde de masă, trebuie ca $N = 0$, adică $F_e = F_{e\,max}$ și $N = G_t - F_{e\,max} = 0$, deci $F_{e\,max} = G_t$. Condiția de desprindece este ~~[illegible]~~ $F_d = F_{e\,max} > G_t$

adică $\boxed{F_d > (m_1 + m_2) g}$

169

1.2.213 D. Rosca

Soluție:



Desprinderea lui m de M nu poate avea loc decât în timpul „alungirii" resortului față de lungimea sa inițială, imediat acțiunii lui F_d.

Pentru corpul de masă m: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_1$

sau $mg - N = m a_1$ $\boxed{N = m(g - a_1)}$ (1)

Desprinderea lui „m" poate avea loc numai la alungirea maximă, când, notând F_d forța deformatoare, avem $\boxed{\vec{F}_{e\,max} = \vec{F}_d = \vec{F}_{as}}$ (2)

desprindere care poate avea loc numai dacă, în plus, $\vec{N} = 0$, sau $\boxed{N = 0}$ (3)

Ducând (3) în (1) avem, pentru alungirea maximă: $\boxed{a_1 = g}$ (4)

Din (2) rezultă

$$F_d = F_{as} = (m + M) a_s \quad \text{sau}$$

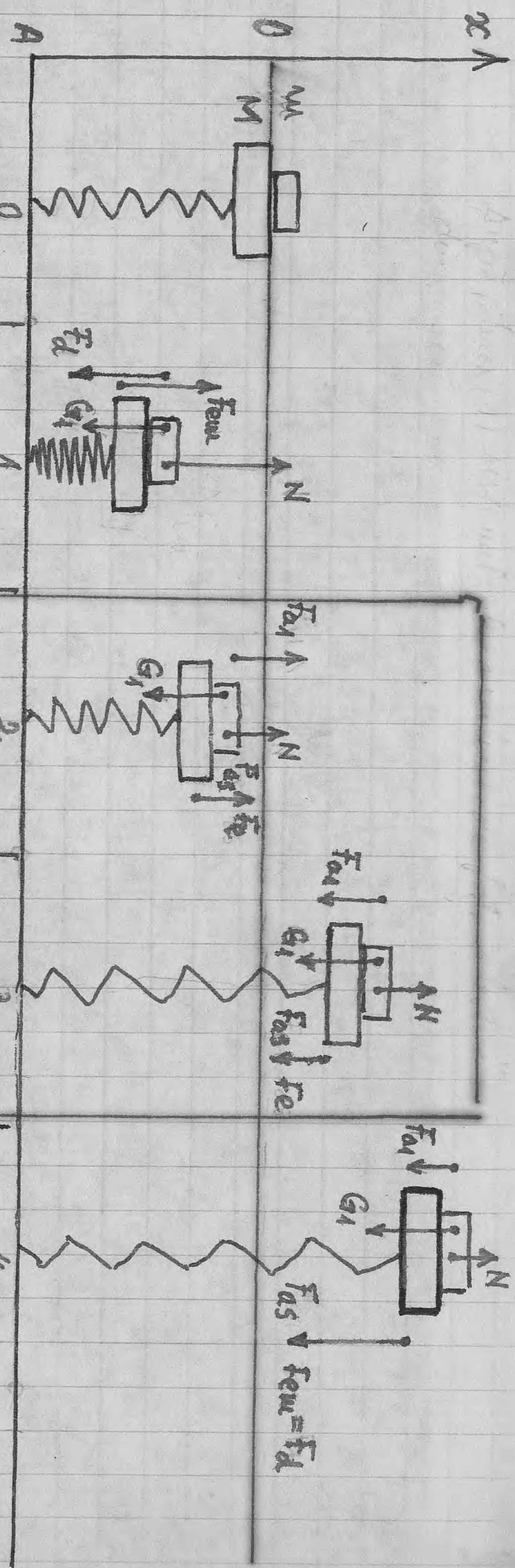
$$F_d = (m + M) a_s$$

Pentru momentul desprinderii $\overbrace{a_s = a_1 = g}^{\text{mai avem încă } a_s = a_1 \text{ și } a_1 = g \text{ deci}}$. ~~Așadar~~:

170

1.3.213 D. Rosca.

Soluția prezentată pe etape de desfășurare a fenomenului



NOTAȚII: F_d - forța deformatoare; F_e - forța elastică; F_{em} - forța elastică maximă; G_1 - greutatea lui m.; N - reacțiunea talerului asupra lui m.; F_{as} - forța ce accelerează sistemul (m, M); F_{a1} - forța ce accelerează m; a_s - accelerația sistemului; a_1 - accelerația lui m.	0
La comprimarea maximă: $F_d = F_{em}$; $N = G_1 + F_d$; $N = G_1 + F_{em}$	1
La destindere: Viteza sistemului crește, deci $a_s = a_1 > 0$; $\vec{F}_{a1} = \vec{G}_1 + \vec{N}$; $N = G_1 + F_{a1}$; $F_e = F_{as}$ deoarece sistemul (m, M) este accelerat de forța elastică.	2
La alungire: Viteza sistemului scade, deci $a_s = a_1 < 0$; $\vec{F}_{a1} = \vec{G}_1 + \vec{N}$; $N = G_1 - F_{a1}$; $F_e = F_{as}$	3
Analiza acestor două stări poate lipsi din rezolvare.	
La alungirea maximă: $F_{as} = F_{em} = F_d$; $\vec{a}_s = \vec{a}_1 < 0$; $\vec{F}_{a1} = \vec{G}_1 + \vec{N}$; $N = G_1 - F_{a1}$. Condiția desprinderii lui m de M: N=0, deci $mg = ma_1$, adică $a_1 = g$. Atunci $a_s = g$. Dar $F_d = F_{as} = (m+M)a_s$ de unde (cum $a_s = g$): $\boxed{F_d = (m+M)g}$	4

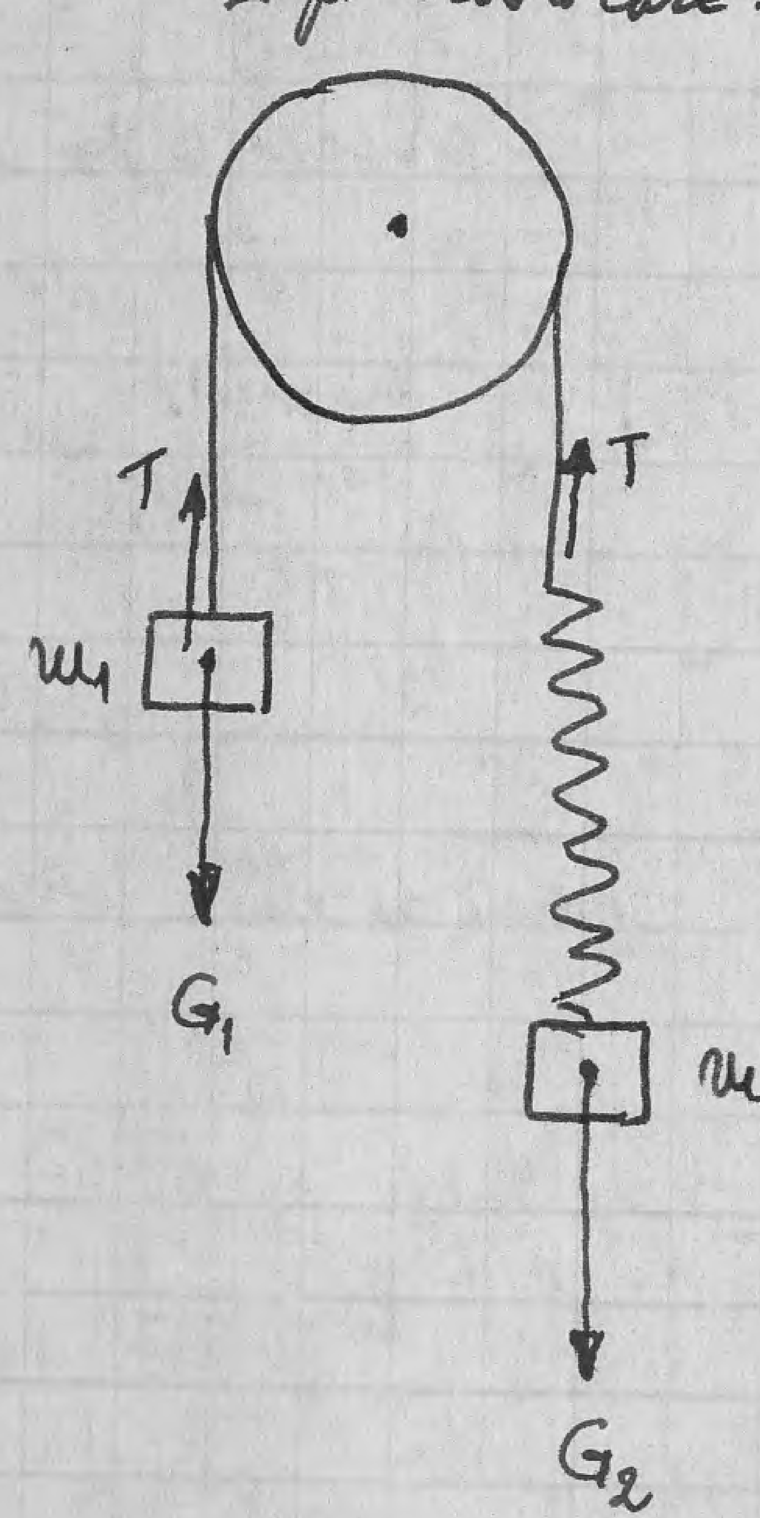
171 3.04.988

H. 1.3.214

$m_1 = 100\ g;\ m_2 = 400\ g;\ K = 60\ N/m$

$\Delta x = ?$

După deblocare:



$$a_s = \frac{G_2 - G_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

$$m_1 a_s = T - m_1 g$$

$$T = m_1 (a_s + g)$$

$$T = m_1 g \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + 1 \right)$$

$$\boxed{T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Asupra resortului acționează forța $G_2 - T$, echilibrată de forța elastică F_e apărută în urma alungirii resortului cu Δx:

$$G_2 - T = -F_e \ ; \ G_2 - T = +K \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{1}{K} \left(m_2 g - \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \right) = \frac{m_2 g}{K} \left(1 - \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{m_2 g}{K} \cdot \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}$$ alungirea resortului în timpul mișcării accelerate a sistemului.

Observație Această alungire este mai mică decît aceea din timpul cît sistenul este blocat. In adevăr, în perioada blocării: $F_d = G_2$; $F_d = -F_e$

$$G_2 = k\Delta x_0 \;;\; \Delta x_0 = \frac{G_2}{k} \;;\; \boxed{\Delta x_0 = \frac{m_2 g}{k}}$$

Cum $\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} < 1$, urmează că

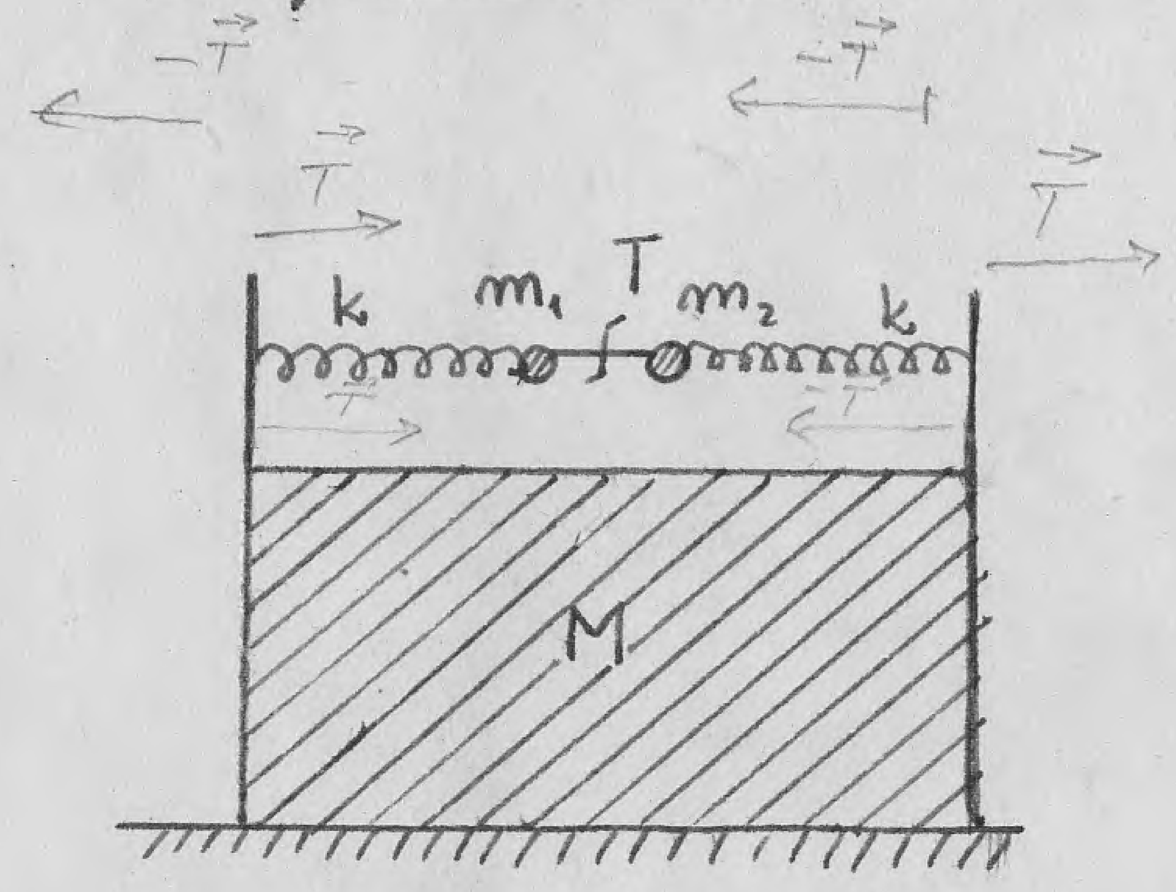
$$\Delta x = \frac{m_2 g}{k}\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = \Delta x_0\,\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} < \Delta x_0$$

adică $\boxed{\Delta x < \Delta x_0}$

Astfel, în urma deblocării, resortul se contractă.

—

1.3.217. Soluție



momente de solicitare maximă

momente de solicitare minimă

După ce se arde firul, bilele încep să oscileze cu perioadele: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$$

perioade diferite.

$$F_{f\,max} = \mu\, G_{tot}$$

$$F_{f\,max} = \mu g(m_1 + m_2 + M) \quad (1)$$

Întrucît perioadele de oscilație sînt diferite, există un moment în care reacțiunile în capetele barei au suma maximă:

$$R_t = F_{e_1} + F_{e_2} = 2T \quad (2)$$

Punînd condiția de echilibru la translație:

$$F_f \geq 2T \qquad (3)\;.$$

Înlocuind relația (1) în (3), rezultă:

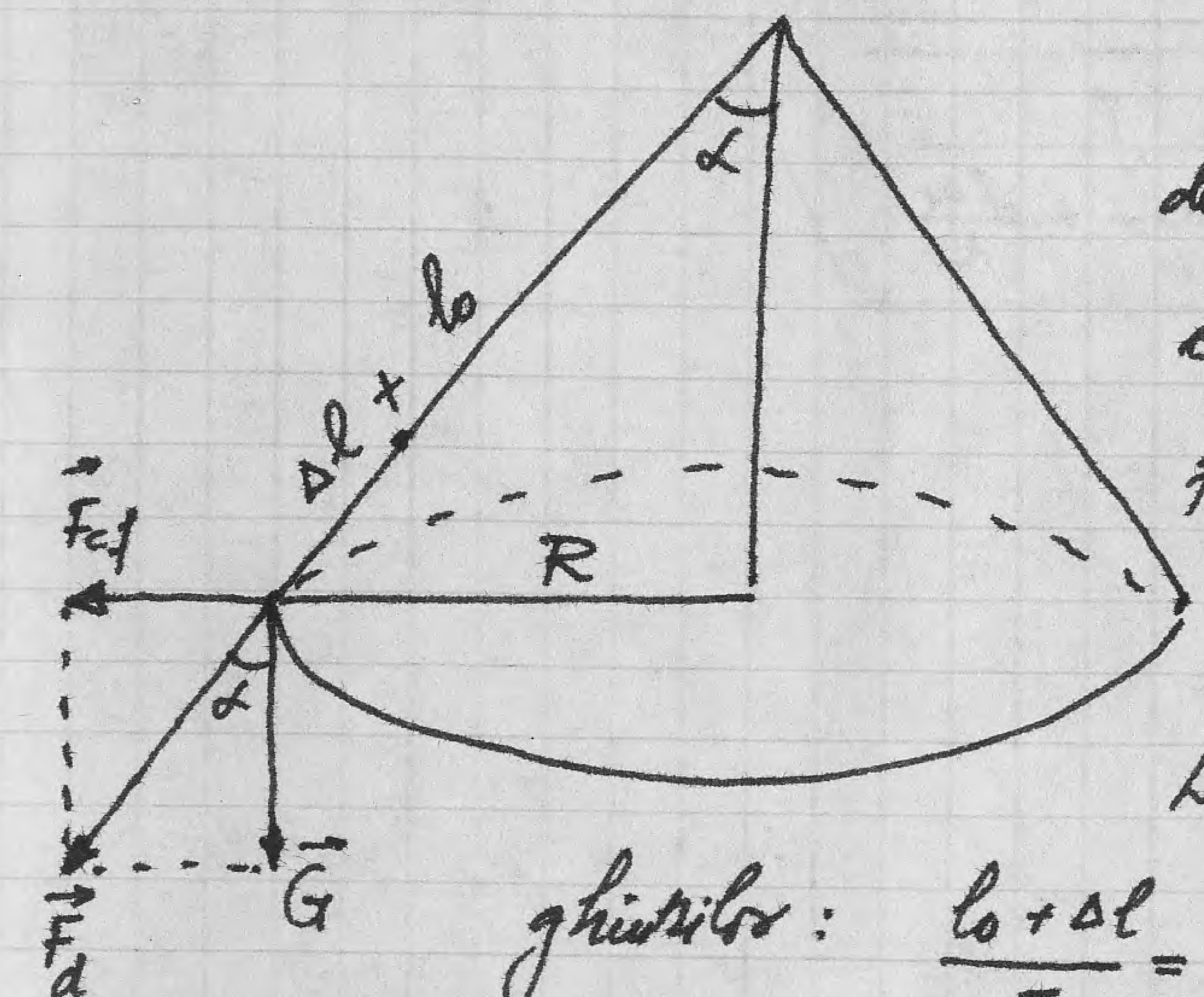
$$\mu \geq \frac{2T}{g(M+m_1+m_2)}$$

4.04.1988

H.1.3.219

$l_0 = 60\,cm$ $\quad k = 10\,N/m$ $\quad m = 0{,}2\,kg$

$\alpha = 60^\circ$ $\quad \omega = ?$



Firul s-a alungit de la l_0 la $l_0+\Delta l$, ca efect al acțiunii forței deformatoare F_d.

$$F_d = k\cdot\Delta l.$$

Din asemănarea triunghiurilor: $\frac{l_0+\Delta l}{F_d} = \frac{R}{F_{cf}}$; $\frac{l_0+\Delta l}{k\Delta l} = \frac{R}{m\omega^2 R}$

$$\frac{l_0+\Delta l}{k\Delta l} = \frac{1}{m\omega^2}\ ; \quad \Delta l(m\omega^2 - k) = -l_0 m\omega^2$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{l_0 m\omega^2}{k-m\omega^2}}$$

Acum: $R = (l_0+\Delta l)\sin\alpha$

$$R = \left(l_0 + \frac{l_0 m\omega^2}{k-m\omega^2}\right)\sin\alpha$$

$$\boxed{R = l_0 \sin\alpha\,\frac{k}{k-m\omega^2}}$$

În fine:

$$tg\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G}\ ; \quad tg\,\alpha = \frac{m\omega^2 R}{mg}\ ; \quad tg\,\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}$$

$$\omega^2 = \frac{g\,tg\,\alpha}{R}\ ; \quad \cancel{\omega = \sqrt{g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{k-m\omega^2}{l_0 k\sin\alpha}}}$$

$$\omega^2 = g\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{k-m\omega^2}{l_0 k\sin\alpha}\ ; \quad \omega^2 = \frac{g(k-m\omega^2)}{l_0 k\cos\alpha}$$

$$b_0 k\omega^2\cos\alpha = gk - gm\omega^2$$

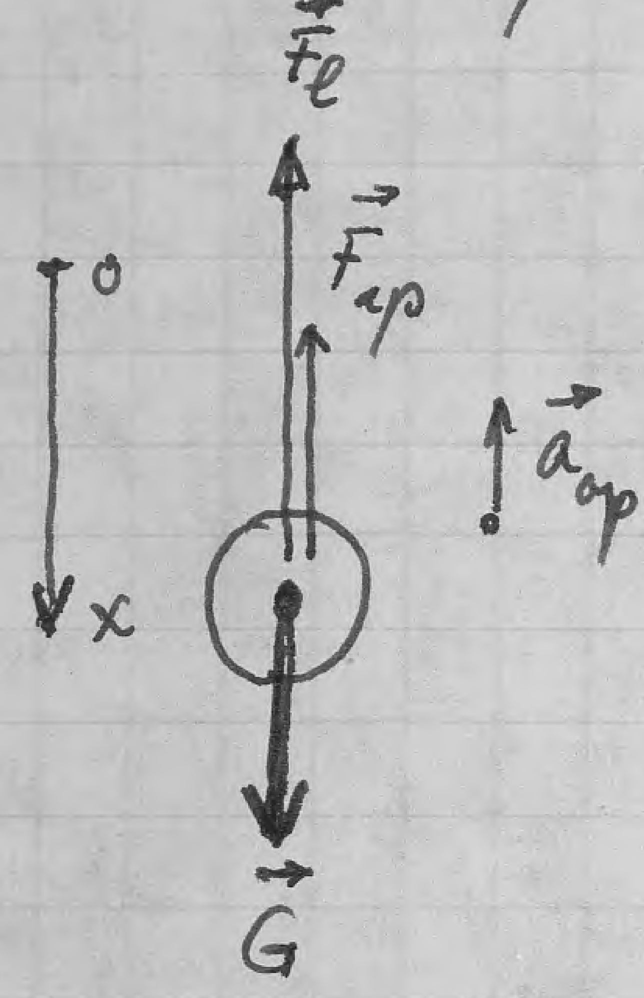
$$\omega^2(b_0 k\cos\alpha + gm) = gk$$

$$\omega = \sqrt{\frac{gk}{b_0 k\cos\alpha + gm}}$$ sau

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{b_0\cos\alpha + \frac{gm}{k}}}}$$

H. 1.3.23b

$a_{ap} = 5g$; $m_{ap} = ?$



$\vec F_l$ forța de lansare necesară.

$\vec F_{ap}$ forța aparentă de ridicare

$\vec G$ greutatea navei

$$\vec F_{ap} = \vec F_l + \vec G \qquad (1)$$

$\vec G_{ap}$ forța cu care nava se împotrivește accelerației la ridicare. Ea este reacțiunea la $\vec F_{ap}$:

$$\vec F_{ap} = m\vec a_{ap} \ (2); \quad \vec G_{ap} = -\vec F_{ap} \qquad (2^*)$$

și se aplică din partea navei, corpului ce ridică nava, ca și cum acesta ar avea de „ridicat" nava de greutate aparentă

$$\vec G_{ap} = m_{ap}\cdot\vec g \qquad (3)$$

Aici m_{ap} este masa aparentă a navei, care ar da navei greutatea $\vec G_{ap}$.

Duc (2) și (3) în (2^*):

$$m_{ap}\vec g = -m\vec a_{ap}$$

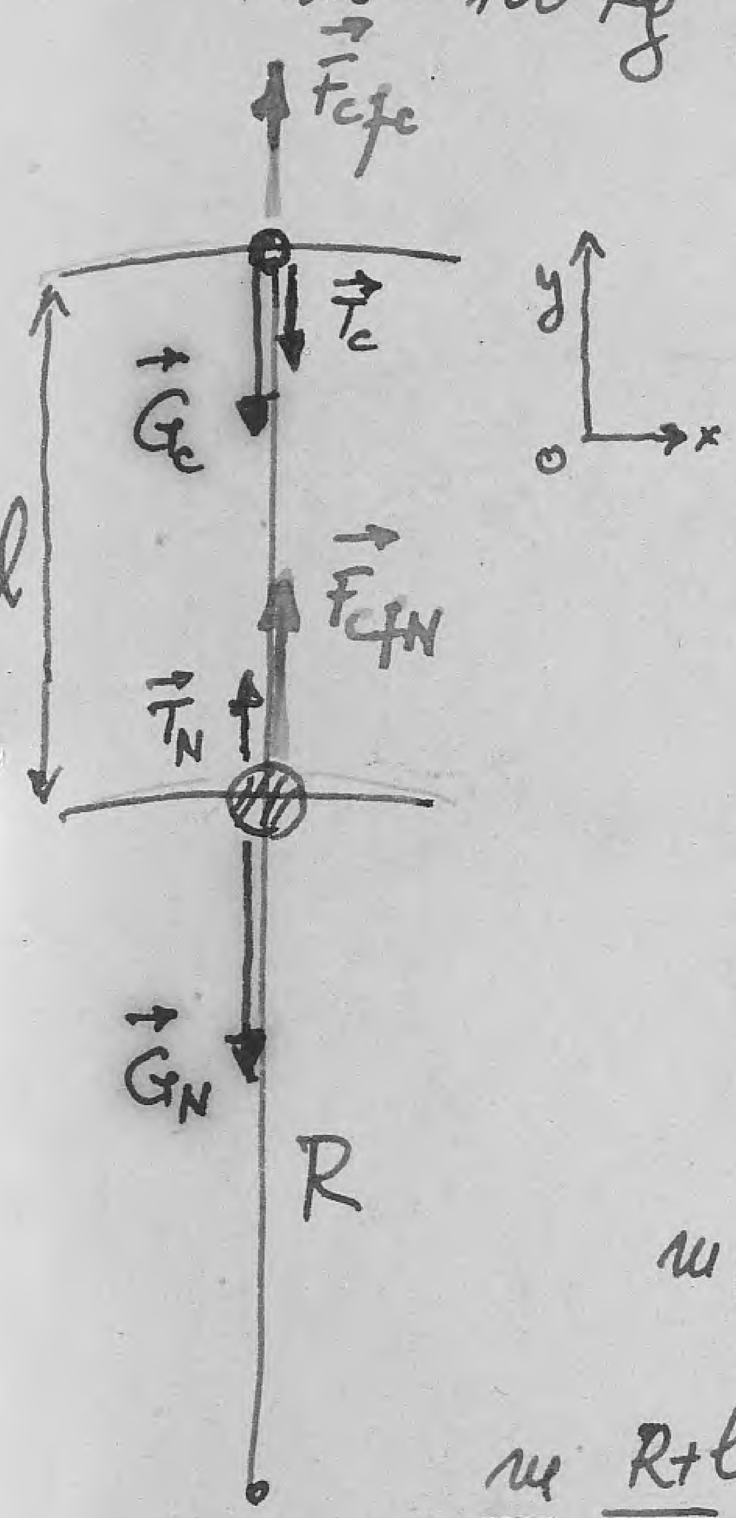
Ox: $m_{ap} g = -m(-a_{ap})$ $\boxed{m_{ap} = \frac{m a_{ap}}{g}}$

$$m_{ap} = \frac{m \cdot 5g}{g} \qquad \boxed{m_{ap} = 5m}$$

175

Hristev - 35- 1.3.258

$m = 100\ kg$; $M = 5\ t$; $l = 64\ m$; $R = 6400\ Km$; $T = ?$



$$\begin{cases} F_{cfc} - G_c - T_c = 0 \\ F_{cfN} + T_N - G_N = 0 \\ T_N = T_c = T \end{cases}$$

Se știe

$$g(r) = g\left(\frac{R}{R+l}\right)^2$$

$$\begin{cases} m\omega^2(R+l) - mg\left(\frac{R}{R+l}\right)^2 - T = 0 \\ M\omega^2 R + T - Mg = 0 \iff \omega^2 = \frac{Mg - T}{MR} \end{cases}$$

$$m(R+l)\frac{Mg-T}{MR} - mg\frac{R^2}{(R+l)^2} - T = 0$$

$$\frac{m}{M}\frac{R+l}{R}Mg - \frac{m}{M}\frac{R+l}{R}T - T - mg\frac{R^2}{(R+l)^2} = 0$$

$$T\left(\frac{m}{M}\frac{R+l}{R} + 1\right) = mg\frac{R+l}{R} - mg\frac{R^2}{(R+l)^2}$$

$$T\,\frac{m(R+l)+MR}{MR} = mg\,\frac{(R+l)^3 - R^3}{R(R+l)^2}$$

$$T = mg\,\frac{R^3+3R^2l+3Rl^2+l^3-R^3}{R(R+l)^2}\,\frac{MR}{mR+ml+MR}$$

$$T = mMg\,\frac{3Rl(R+l)+l^3}{(R+l)^2[R(m+M)+ml]}$$

$$T = mMg\,\frac{3Rl + \frac{l^3}{R+l}}{R(R+l)\left[(m+M) + \frac{ml}{R}\right]}$$

Cum $R >>> l$, avem:

$R+l \simeq R$; $\frac{l^3}{R+l} \simeq 0$; $\frac{ml}{R} \simeq 0$ și :

$$T \simeq mMg \frac{3Rl}{R^2(m+M)} = \frac{3l}{R} \frac{mMg}{m+M}$$

$$\boxed{T \simeq \frac{3l}{R} \frac{mMg}{m+M}}$$

$$T \simeq \frac{3 \cdot 64}{64 \cdot 10^2 \cdot 10^3} \frac{10^2 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 10}{51 \cdot 10^2} = \frac{3 \cdot 10^6}{10^8} = 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}03$$

$$\boxed{T \simeq 0{,}03\,N}$$