Didactica și educația

Referate și comunicări prezentate la sesiunea națională „Cercetarea științifică în sprijinul perfecționării învățămîntului și educației în școala de cultură generală".

Craiova, 4-5 aprilie 1969.

Prof. Rosca Dumitru
Liceul „Calistrat Hogaş" Piatra Neamţ

DIDACTICA ŞI EDUCAŢIA

Referate şi comunicări
prezentate
la sesiunea naţională
„Cercetarea ştiinţifică
în sprijinul perfecţionării
învăţămîntului şi educaţiei
în şcoala
de cultură generală"

Craiova, 4—5 aprilie 1969

CERCETĂRI TEORETICE ŞI EXPERIMENTALE ÎN LEGĂTURĂ CU PREDAREA MATEMATICII

Prof. **DUMITRU ROŞCA**
Liceul nr. 2 — Piatra-Neamţ

1. *Mulţimi, simboluri, scheme, corespondenţe.* Se dau exemple de mulţimi ; obiectele mulţimii se numesc elemente ; se indică notarea mulţimii cu litere mari ale alfabetului, iar elementele cu litere mici. Semnele folosite pentru aceste notaţii sînt numite simboluri. Se alege mulţimea a trei elevi dintre cei prezenţi, i se acordă simbolul A, iar elevii se notează cu a, b, c :

$$A = \{a, b, c\}$$

Se alege o nouă mulţime de patru elevi, astfel încît din ea face parte elevul notat cu a în prima mulţime A. Noua mulţime este notată cu B, iar elementele ei cu m, n, p, r, simbolul p fiind acordat elevului notat cu a, ca element al lui A. Se scrie :

$$B = \{m, n, p, r\}$$

Elevii remarcă faptul că simbolurile a şi p reprezintă acelaşi element (acelaşi elev) şi numesc simbolurile a şi p egale, notînd :

$$a = p$$

Se scoate în evidenţă faptul că nu are rost repetarea unui simbol în scrierea mulţimii, prin această repetare mulţimea reprezentată rămînînd aceeaşi. De exemplu :

$$\{a, a, b, c, c, c\} = \{a, b, c\}$$

De asemenea, dacă d=g avem :

$$\{ d, e, g, h \} = \{ e, g, h \} = \{ d, e, h \}$$

Se mai remarcă faptul că, schimbînd ordinea scrierii simbolurilor în notarea mulţimii, mulţimea reprezentată rămîne aceeaşi, adică :

$$\{ a, b, c \} = \{ b, a, c \} = \{ b, c, a \} = \cdots$$

Revenind la mulţimea A de mai sus, se arată cum poate fi ea reprezentată printr-o schemă (fig. 1).

Se menţionează că matematica lucrează nu cu mulţimile înseşi, ci cu reprezentări simbolice ale acestora, natura elementelor reprezentate de simboluri neavînd importanţă. De aceea, în cele ce urmează se va lucra doar cu mulţimi de simboluri.

Se ilustrează că două mulţimi arbitrare pot fi una faţă de alta în una dintre situaţiile : disjuncte ; cu unele elemente comune ; una inclusă în cealaltă ; egale.

Luînd două mulţimi disjuncte

$$A = \{ a, b \} ; B = \{ c, d, e \},$$

ele pot fi reprezentate prin scheme grafice, ca în fig. 2.

Dacă, printr-o regulă oarecare, pornind de la $b \in A$ se ajunge la $c \in B$, se zice că regula respectivă stabileşte o corespondenţă de la b la c, care poate fi reprezentată grafic printr-o săgeată, ca în fig. 3. Această corespondenţă de la un element la un ~~alt~~ element determină o mulţime formată din elementul de plecare şi cel de sosire în corespondenţa respectivă, mulţime în care se cunoaşte care este elementul de plecare şi care este cel de sosire. Se notează această mulţime prin (b, c) şi o numim pereche ordonată sau cuplu.

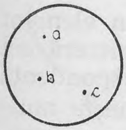


Fig. 1

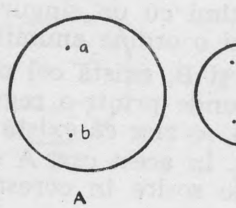


Fig. 2

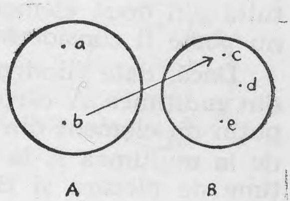


Fig. 3

Referitor la perechea ordonată, se scoate în evidenţă că $(b, c) \neq (c, b)$, deoarece la (b, c) elementul b este de plecare şi c este de sosire, iar la (c, b), invers. Totodată, se arată că notaţia (b, c) diferă de $\{ b, c \}$, deoarece — în baza observaţiilor anterioare — $\{ b, c \} = \{ c, b \}$ şi deci prin această notaţie nu s-ar mai putea şti care este elementul de plecare şi care cel de sosire, în corespondenţa arbitrară ce există între aceste elemente.

Se iau două mulţimi cu unele elemente comune :

$$C = \{ f, g, h \}; \; D = \{ g, h, i, j \}$$

ce sînt reprezentate prin schema din fig. 4. Se propune o regulă prin care $h \in C$ se pune în corespondenţă cu $h \in D$. Se reprezintă această corespondenţă printr-o săgeată, ca în fig. 5. Perechea ordonată determinată de această corespondenţă se notează (h, h).

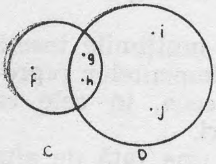


Fig. 4

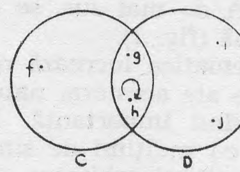


Fig. 5

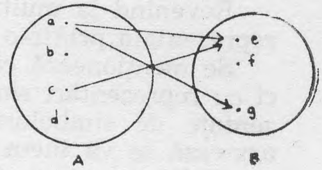


Fig. 6

În acest caz, se remarcă, pe de o parte, că se poate renunţa la sensul săgeţii, deoarece el nu mai poartă nici o informaţie, putîndu-se desena o simplă buclă, pe de altă parte, că perechea ordonată (h, h) este, în fond, o mulţime cu un singur element, h, deoarece — dacă în (h, h) nu ne interesează decît elementele ei — o putem scrie $\{ h, h \}$ şi, în baza unor observaţii anterioare, avem $\{ h, h \} = \{ h \}$. Totuşi nu renunţăm la notaţia (h, h), care sugerează existenţa unei corespondenţe arbitrare de la h la h şi integrează aceste perechi ordonate particulare, numite perechi ordonate identice, în categoria generală de pereche ordonată. Existenţa perechilor ordonate identice arată că numele de pereche ordonată dat noţiunii respective, în care ideea de corespondenţă de la un element la un element este esenţială, nu este potrivit din moment ce există perechile ordonate identice, care nu sînt, în fond, mulţimi pereche (mulţimea pereche se defineşte ca fiind mulţimea alcătuită din două elemente), ci mulţimi cu un singur element şi deci nu poate fi considerată în ele nici o ordine anumită a elementelor.

Dacă, date fiind mulţimile A şi B, există cel puţin un element din mulţimea A căruia îi corespunde printr-o regulă arbitrară cel puţin un element din mulţimea B, se zice că există o corespondenţă de la mulţimea A la mulţimea B. În acest caz, A se numeşte mulţime de plecare şi B mulţime de sosire în corespondenţa respectivă.

Se ia ca exemplu corespondenţa de la mulţimea A la mulţimea B, dată prin schema din fig. 6. Această corespondenţă poate fi dată şi fără ajutorul schemei grafice şi al săgeţilor, dacă se dă mulţimea de perechi ordonate pe care o determină :

$$C = \{ (a, e), \; (a, g), \; (c, e) \}$$

Dacă, în corespondenţa de la o mulţime la o mulţime, orice element din mulţimea de plecare are un corespondent şi numai unul în cea de sosire, corespondenţa respectivă se numeşte univocă, aplicaţie a mulţimii de plecare în cea de sosire sau funcţie definită pe mulţimea de plecare, cu valori în mulţimea de sosire.

Un astfel de exemplu avem în fig. 7. Dacă corespondenţa de la o mulţime la o mulţime este dată prin schemă, atunci se recunoaşte uşor dacă e univocă, prin aceea că din orice punct al graficului mulţimii de plecare pleacă o săgeată şi numai una.

Evident că, în exemplul de mai sus, de la E la F pot fi stabilite şi alte corespondenţe univoce. O corespondenţă univocă arbitrară de la E la F se notează prin **f : E → F**,

Se cercetează dacă corespondenţele dintre mulţimi date prin schemele din fig. 8, 9, 10 sînt univoce. Se constată că univoca este numai cea dată prin schema din fig. 9.

2. *Operaţia internă binară*. Se iau mulţimile

$$A=\{a, b\} \text{ şi } B=\{b, c, d\}$$

Se formează mulţimea tuturor perechilor ordonate ce pot fi scrise cu primul element din A şi al doilea din B :

$$A\times B=\{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d)\}$$

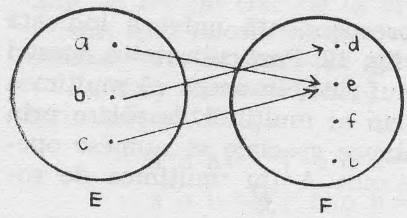


Fig. 7

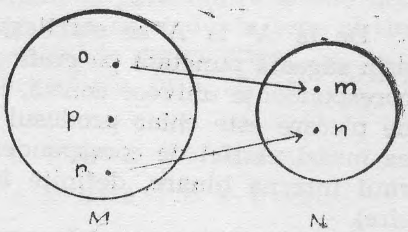


Fig. 8

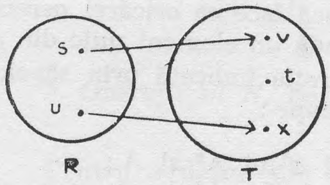


Fig. 9

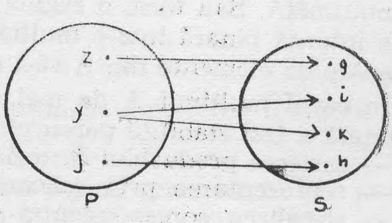


Fig. 10

Această mulţime se numeşte produsul cartezian al mulţimii A prin B. In general, pentru E şi F, două mulţimi oarecare, se scrie :

$$E\times F=\{(x, y) \mid x\in E \text{ şi } y\in F\}.$$

În cazul cînd mulţimile au elemente comune, în produsul cartezian se remarcă existenţa unor perechi identice, cum este (b, b), din $A \times B$ formată mai sus. În particular, dacă $A=B$, atunci produsul cartezian $A \times B$ se notează $A \times A$ sau A^2 și se numește produsul cartezian al unei mulțimi prin ea însăși. De exemplu :

$$A=\{a, b\}; \quad A \times A = A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

Mulțimile A și A^2 se reprezintă grafic ca în fig. 11.

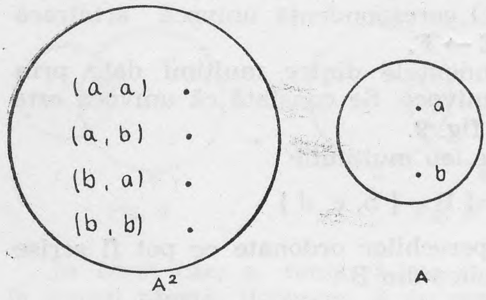


Fig. 11

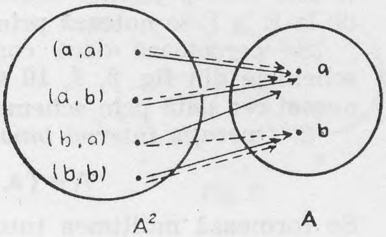


Fig.12

De la A^2 la A se stabilește o corespondență univocă indicată prin săgeată punctată pe graficul din fig. 12. Particularitatea acestei corespondențe univoce constă, în primul rînd, în aceea că mulțimea de plecare este chiar produsul cartezian al mulțimii de sosire prin ea însăși. Astfel de corespondențe univoce speciale se numesc operații interne binare, definite în mulțimea A (în mulțimea de sosire).

Mai precis, se numește operație internă binară definită într-o mulțime A o corespondență univocă de la produsul cartezian A^2 la mulțimea A. Sau încă, o regulă de corespondență definește o operație internă binară într-o mulțime A, dacă face ca oricărei perechi ordonate de elemente din A să-i corespundă un element unic din A.

În cazul mulțimii A de mai sus, operația indicată prin săgeată punctată a fost stabilită parcurgînd trei etape :

— scrierea produsului cartezian A^2 ;

— reprezentarea prin schemă grafică a lui A^2 și A ;

— stabilirea corespondenței univoce de la A^2 la A, prin săgeți punctate.

Pentru a defini încă o operație internă binară în A este suficient a mai parcurge doar ultima etapă de mai sus, dacă se folosește tot schema din fig. 12, adoptînd pentru noua operație, de exemplu, săgeți pline (pentru ușurarea vorbirii, în continuare în loc de „operație binară internă" vom spune „operație").

În afara acestor două operații în A, mai pot fi definite, evident, și altele.

Adesea, scrierea operației cu ajutorul graficului nu este avantajoasă. Există și alte moduri de scriere. Astfel, operațiile în A date în fig. 12 prin săgeți punctate, respectiv pline, pot fi scrise și :

(a, a) $\dashrightarrow$ a ; (b, a) $\dashrightarrow$ b ; de asemenea (a, a) $\rightarrow$ a ; (b, a) $\rightarrow$ a
(a, b) $\dashrightarrow$ a ; (b, b) $\dashrightarrow$ b ; (a, b) $\rightarrow$ a ; (b, b) $\rightarrow$ b

Se citește : „perechea (a, a) prin săgeată punctată corespunde cu a" etc.

În acest mod de scriere a operației, felul săgeții poartă informația privind operația în A despre care este vorba. Dar folosirea săgeților de acest fel este incomodă. Informația purtată de felul săgeții poate fi indicată prin introducerea unui simbol special pentru fiecare operație. Astfel, notînd operația dată prin săgeată plină cu „o", iar cea dată prin săgeată punctată cu „$\ast$", în loc de (a, a) $\rightarrow$ a vom scrie a o a $\rightarrow$ a etc..., aceste noi notații citindu-le exact ca și pe acelea pe care le înlocuiesc.

La scrierea operațiilor, în matematică s-a extins folosirea semnului = în locul lui $\rightarrow$, avînd, evident, înțelesul acestuia din urmă, adică : „corespunde cu". Este remarcat faptul că semnul = a mai fost utilizat cu înțelesul : „reprezintă același element cu". Dublul înțeles pe care-l poate astfel avea semnul = face ca, într-o situație dată, să nu fie clar de la prima vedere în care dintre aceste două sensuri este folosit. Se poate arăta că prin acest dublu sens al simbolului = nu se introduc greșeli în calculele matematice.

Așadar, în matematică operațiile notate prin „o" și „$\ast$" se scriu obișnuit :

a o a=a	b o a=a și	a $\ast$ a=a	b $\ast$ a=b
a o b=a	b o b=b	a $\ast$ b=a	b $\ast$ b=b

Se menționează că operațiile se scriu prin tabele astfel :

„o"	a	b
a	a	a
b	a	b

„$\ast$"	a	b
a	a	a
b	b	b

3. *Operații în N.* Se scrie mulțimea numerelor naturale :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

Pentru a defini în ea o operație, se remarcă că nu poate fi folosită metoda din cazul mulțimii A de mai sus, pentru motivul că, N avînd nesfîrșit de multe elemente, N^2 nu poate fi scris în întregime. Chiar dacă numărul elementelor mulțimii ar fi sfîrșit, dar ar fi multe elemente, metoda de mai sus pentru definirea operației devine foarte greoaie.

În astfel de cazuri, operația se definește printr-o regulă care să facă ca oricărei perechi ordonate de elemente din mulțime să-i corespundă un element unic din mulțime. Este suficient să se asigure că regula de corespondență dată satisface aceste condiții, fără a fi nevoie să fie stabilite efectiv aceste corespondențe.

Astfel, pentru a, b $\in$ N, regula :

$$(a, b) \rightarrow a$$

defineşte o operaţie în N, după cum se constată uşor. La fel :

$$(a, b) \rightarrow b$$

Dar $(a, b) \rightarrow \max\{a, b\}$,

(adică se pune perechea (a, b) în corespondenţă cu cel mai mare dintre a şi b), ~~ceea ce~~ nu defineşte o operaţie în N, deoarece cu ea nu se găseşte corespondent unor perechi ca (3, 3), adică acelea la care $a=b$, deci perechilor ordonate identice.

Dacă, de exemplu, se completează cu $(a, b) \rightarrow 3$, cînd $a=b$, atunci ea devine :

$$(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) \text{ pentru } a \neq b \\ 3 \text{ pentru } a=b \end{cases}$$

şi, evident, defineşte o ~~pereche~~ operaţie în N.

Apelînd la unele cunoştinţe dobîndite asupra mulţimilor, se cercetează dacă următoarea regulă de corespondenţă, pentru a şi b din N, defineşte o operaţie în N :

$$(a, b) \rightarrow c,$$

unde c se găseşte astfel :

a. se ia o mulţime oarecare A, care să aibă a elemente, ceea ce notăm : $\overline{\overline{A}}=a$;

b. analog, luăm o mulţime B, cu $\overline{\overline{B}}=b$ şi $A \cap B=\emptyset$;

c. se face reuniunea $A \cup B$ a mulţimilor A şi B de mai sus ;

d. se numără cîte elemente sînt în reuniune ; găsim, de exemplu, $\overline{\overline{A \cup B}}=c$.

Perechea (a, b) o punem în corespondenţă cu c astfel găsit. Evident, $c \in N$. Se găseşte uşor că această regulă defineşte o operaţie în N.

În loc de $(a, b) \rightarrow c$, se scrie $a+b=c$. Operaţia astfel definită se numeşte adunarea numerelor naturale.

Ca exerciţiu, se găseşte corespondentul perechii (5, 3) după această regulă. Din fig. 13 rezultă :

$$\overline{\overline{A}}=5 \, ; \, \overline{\overline{B}}=3 \, ; \, A \cap B = \emptyset.$$

Numărînd, rezultă $\overline{\overline{A \cup B}}=8$. Se scrie :

$$(5, 3) \rightarrow 8 \quad \text{sau} \quad 5+3=8.$$

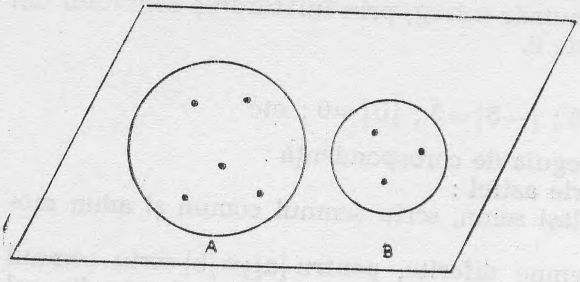
S-a regăsit astfel cunoscuta operaţie de adunare în N.

Se anunţă analog o regulă de corespondenţă în N, care să coincidă cu scăderea obişnuită în N.

Fie a, b $\in$ N. Perechea (a, b) se pune în corespondență cu c, pe care îl găsim astfel :

a. se ia o mulțime A cu $\overline{\overline{A}}=a$;

b. analog, luăm mulțimea B cu $\overline{\overline{B}}=b$, astfel încît $B \subset A$;



A ∪ B

Fig. 13

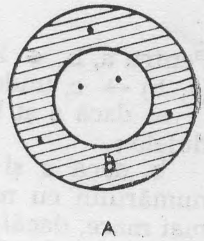


Fig. 14

c. se formează A—B ;

d. prin numărare, găsim $\overline{\overline{A-B}}=c$. Scriem :

$$(a, b) \rightarrow c \quad \text{sau} \quad a-b=c$$

Ca exercițiu se caută corespondentul lui (5, 2) după această regulă. În fig. 14 avem :

$$\overline{\overline{A}}=5 \text{ ; } \overline{\overline{B}}=2 \text{ ; } B \subset A \text{ ; } \overline{\overline{A-B}}=3.$$

Se scrie (5, 2) $\rightarrow$ 3 sau 5—2=3.

S-a găsit astfel cunoscuta regulă de scădere în N.

Deoarece există perechi ordonate ca (3, 7), cărora nu li se poate găsi corespondent după această regulă, se spune că scăderea nu este peste tot definită sau că nu este totdeauna posibilă în N.

4. *Numere întregi.* Folosind mulțimea

$$N=\{0, 1, 2, 3 \ldots\ldots\},$$

se formează o nouă mulțime notată cu Z, în care se pune pe 0 din N și toate simbolurile ce se obțin din elementele lui N−{0} prin adăugarea în fața fiecăruia o dată a semnului +, apoi a celui —. Se obține mulțimea :

$$Z=\{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\ldots\},$$

pe care o numim mulțimea numerelor întregi. Ca în notarea oricărei mulțimi, ordinea scrierii simbolurilor nu are importanță. De exemplu :

$$Z=\{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\ldots\}$$

În Z se disting trei submulţimi importante :

$\{o\}$ formată din singurul element o ;

$\{+1, +2, +3, \ldots\}$ numită mulţimea numerelor întregi pozitive ;

$\{-1, -2, -3, \ldots\}$ numită mulţimea numerelor întregi negative.

Reunirea acestor trei mulţimi formează, evident, mulţimea Z.

Se defineşte modulul unui număr întreg ca fiind numărul natural ce se obţine din acel număr întreg, prin înlăturarea semnului din faţă, iar modulul lui 0 este 0.

Notaţii :

$$|+8|=8 ;\ |-5|=5 ;\ |0|=0 ;\ \text{etc.}$$

Pentru a, b, $\in$ Z se dă regula de corespondenţă :

(a, b) $\rightarrow$ c, unde c se scrie astfel :

a. dacă a şi b au acelaşi semn, scriu semnul comun şi adun modulele ;

b. dacă a şi b au semne diferite, pentru $|a| \neq |b|$ scriu semnul numărului cu modulul mai mare şi scad modulul mai mic din cel mai mare, dacă $|a|=|b|$ scriu 0.

Observaţie. Adunarea şi scăderea modulelor se fac după regulile de adunare şi scădere a numerelor naturale introduse anterior ;

c. dacă unul dintre numere este 0, îl scriu pe celălalt ;

d. dacă ambele numere sînt 0, scriu 0.

Se stabilesc cu regula de mai sus corespondenţele :

$$\begin{array}{llll} (+4, +6) \rightarrow +10 & & (0, -7) & \rightarrow -7 \\ (-3, -9) \rightarrow -12 & & (+2, 0) & \rightarrow +2 \\ (+4, -3) \quad +1 & & (0, 0) & \rightarrow 0 \\ (-8, +5) \quad -3 & & (+7, -7) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Se observă că numărul c găsit prin regula de mai sus aparţine lui Z şi că această regulă defineşte o operaţie în Z.

Se numeşte această operaţie adunarea numerelor întregi. Se indică notaţiile :

$$(+4)+(+6)=+10$$
$$(-3)+(-9)=-12$$