IV Partea teoretică

Notă : inițial aceasta aș fi vrut să fie capitolul de bază al lucrării. Doream să prezint aici o grupare masivă de rezultate privind obținerea ecuațiilor de regim staționar și nestaționar, urmată de un lot de teoreme de calitate, care să permită înarmarea cu o vastă metodologie, capabilă să rezolve situațiile ce pot apare în analiza circuitelor neliniare, în general și a celor cu tranzistori, în special.

Sunt însă silit să mă restrîng (detalii, împreună cu demonstrațiile neardate ale teoremelor - în [O])

De aceea în continuare voi urmări un singur filon : acela al obținerii și discuției ecuațiilor „statice" ale circuitelor cu tranzistoare. În acest sens vor fi date și aplicații în finalul lucrării

Totuși ar fi păcat să nu menționez legătura extrem de strînsă care există între aspectele tratate în continuare și analiza regimului nestaționar (v și Aplicația B) cum ar fi : obținerea ecuațiilor regimului tranzitoriu al circuitelor cu tranzistori, răspunsul la semnal treaptă, analiza algoritmilor de calcul. Practic, dacă materialul prezentat aici va fi parcurs, trecerea la noile probleme pe care le-am semrealat se face în mod firesc și adesea foarte simplu fiind nevoie de teoremele acestui capitol.

Iată de exemplu, pentru calculul răspunsului la semnal treaptă (mai general: pentru analiza regimului nestaționar) câteva din punctele în care ne sprijinim de aspecte tratate în acest capitol:

- pentru a obține forma normală a ec. generale diferențiale ce caracterizează circuitul în regimul variabil, trebuie să rezolvăm unele ecuații implicite, pentru a obține toate variabilele laturilor în funcție de variabilele de stare. Deci ecuații de tipul $F(x) = \xi$ $\Rightarrow x = F^{-1}(\xi)$. (inversiunea dorită)

- o dată obținută forma normală, trebuie să găsim condițiile inițiale. Pentru aceasta trebuie să rezolvăm din nou o ecuație algebrică neliniară în R^n

- în sfârșit, metodele de calcul iterativ al soluției ecuației diferențiale, sînt bazate adesea pe algoritmi de integrare numerică implicită (formule închise) care implică la fiecare pas rezolvarea unei ec. algebrice neliniare în R^n.

Vom profita de faptul că, în capitolul anterior au fost evidențiate, pe exemplul tratat, toate aspectele teoretice care urmează.

(A) Obținerea ecuațiilor statice a circ. cu tranzistori

1. Generalități

Am văzut că, în general, un circuit electric oferă" două tipuri de restricții variabilelor laturilor:

I Restricții de topologie (cerința de a respecta legile lui Kirchhoff de tensiune și curent) (K restr. pentru K laturi)

II Restricții „de latură" (introducere de elemente). În general un n port (2n variabile) introduce n asemenea restricții.

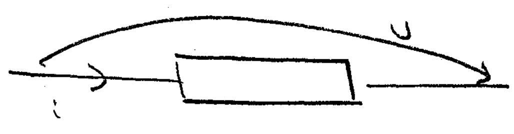
In cele ce urmează ne vom referi la circuitele obținute făcînd cond. goluri și bobinele scurtcircuit. (circuit de punct static – vezi descrierea de la începutul aplicațiilor A, B)

Dispunem deci, pentru cele 2l variabile a tuturor laturilor de:

- l relații date de topologie (independente)

- $l = K_1 + K_2 + \dots + K_p$ relații „de latură", unde p este numărul multiporților iar $2K_p$ numărul de variabile a unui K_p-port.

Deasemenea s-a subliniat că, dacă elementele liniare rezistive admit o reprezentare dipol:



– fig 1 –

Sensul adaptat pentru variabilele laturii.

dispozitivele neliniare cu tranzistorul, leagă cele 4 variabile printr-o relaţie:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{bmatrix} \quad (1)$$

sau $i = T F(v)$ (2), unde notaţia vectorială nu mai e doar o prescurtare, caracteristica „dispozitivului fiind o funcţie $f: R^2 \to R^2$ (3), mai general: $f: R^k \to R^k$ (4), pentru un k porţi la care, putem avea cazuri particulare cum ar fi cel „matricea hibridă":

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_{k+1}) \\ \vdots \\ f_k(x_{2k}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

H - „matrice hibridă generalizată" a 2k porţilor

$x_1, \dots x_k, x_{k+1}, \dots x_{2k}$ sunt variabilele laturilor, luate aşa (o nouă particularizare)

$$\begin{cases} x_j = u_j \text{ sau } x_j = i_j \\ x_{k+j} = i_j \text{ sau } x_{k+j} = u_j \end{cases} \quad (5')$$

Deşi deja aceste cazuri dau bătăi de cap (vezi de exemplu modul obişnuit cum (1) se „dotează" în mulţimi de curbe — „caracteristici (i_1, v_1) la $v_2 = ct$ etc) aceasta este o particularizare puternică a unui caz mult mai general:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1 \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_{2k}) = 0 \\ f_2(x_1 \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_{2k}) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1 \ldots x_k, x_{k+1} \ldots x_{2k}) = 0 \end{array}\right. \qquad (6)$$

sau $\quad$ (7) $\quad F(x) = \theta$ unde $F: R^n \to R^n$ și
θ este elementul nul în R^n.

Pentru interconectări ale diverșilor 2K porți, relațiile de mai sus vor oferi câte K relații, urmând a se rezulta pentru ~~2~~n - 2K porți, n relații.

Astfel, urmate cu cele n relații date de legile lui Kirchhoff, variabilele de laturi (2n) se vor găsi a rezolvi într-un sistem de n+n = 2n ecuații. Principial deci acest sistem ar putea fi rezolvat.

În practică însă, acest lucru poate fi foarte dificil. Nu voi adânci acest aspect, ci voi remarca doar că, o simplificare puternică se va produce dacă putem lua ca toate caracteristicile elementelor să aibă o ~~reat~~ exprimare de tipul (5) adică

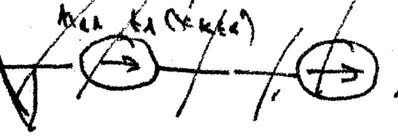
$$(8)\left\{\begin{array}{l} x_1 = h_{11} f_1(x_{k+1}) \ldots + h_{1k} f_k(x_{2k}) \\ \vdots \\ x_k = h_{k1} f_1(x_{k+1}) \ldots + h_{kk} f_k(x_{2k}) \end{array}\right. \qquad (8)$$

~~Desigur~~ Această variantă mai simplă este obținută pentru ~~dispozitiv~~ modelele dispozitivelor de interes practic (mai modelul Ebers - Moll - 1) și permite o interpretare în lumina căreia se poate considera pe jumătate realizată „complicația de multipol". Într-adevăr, am putea considera relația 8, ca definind o variabilă de latură, ca ~~funcție~~ după combinație liniară funcție de alte variabile. ~~Deci,~~

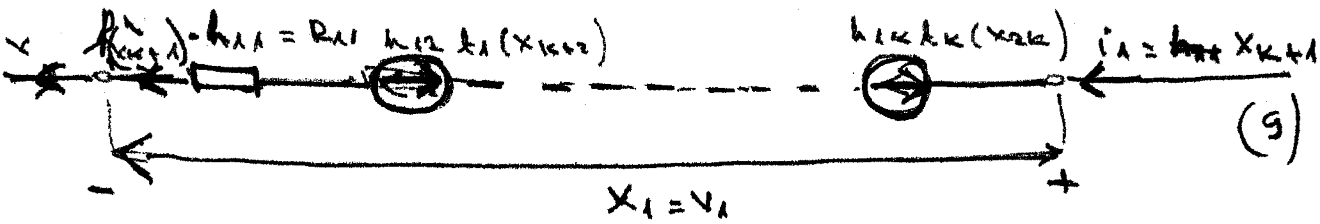
~~de exemplu pentru~~

~~$x_1 = h_{11} k_1(x_{k+1}) + \dots + h_{1k} k_k(x_{2k})$ (9) avem:~~

~~(luminare)~~



Să presupunem de exemplu că x_1, x_{k+1} sunt luminarea, resp curentul pe latura 1, iar $x_{k+2}, \dots x_{2k}$ sunt luminări în celelalte laturi. Atunci:



(9)

și procedând la fel, am putea înlocui multipolul cu o serie de dipoli, acceptând însă surse comandate

(Desigur că acest procedeu va fi comun dacă în relația 8, în partea dreaptă nu se află variabilele unei aceleiași laturi).

Iată deci că, multiporții care admit o caracterizare „hibridă liniară" sunt deja un caz particular.

Un alt caz particular îl reprezintă multiporții liniari, în ce mai mult „complicația de multipol (k etc)" și pot fi adevăr în forma:

$$(10)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & H & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{2k} \end{bmatrix} + C \qquad \text{cu} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \dots x_k \ \underline{\text{sînt ai}} \\ x_j = i_j \text{ sau } u_j \\ x_{k+j} = u_j \text{ sau } i_j \end{array} \right.$$

unde H e o matrice reală cu coeficienți constanți, „matrice hibridă”, iar C este zero, pentru că, dacă se admite prezența surselor independente, multipolul s-ar putea să nu aibă o caracterizare hibridă de forma:

$$(11)\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{2k} \end{bmatrix} \qquad H - \text{matrice hibridă}$$

De asemenea, punînd $x_1 \dots, x_k, x_{k+1}, \dots x_{2k}$ toți nuli, este posibil ca sursele independente să nu poată satisface relațiile (conectări defectoare - bucle de surse etc).

Totuși se arată:

$\boxed{\text{Teorema 1}}$: Orice multipol liniar fără surse indep. ~~...~~ are o caracterizare hibridă de forma (11)

$\boxed{\text{Teorema 2}}$: Orice multipol rezistiv (cu rez. pozitive și surse indep. de tensiune și curent) are o caract. de tipul 10.

unde $x_1 \dots x_k, x_{k+1} \dots x_{2k}$ sunt definiți

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = u_j \text{ sau } x_j = i_j \\ x_{k+j} = i_j \text{ sau } x_{k+j} = u_j \end{array} \right.$$

(deci de partea stîngă se află cîte o variabilă - tensiune sau curent - pentru fiecare latură -

iar C, ține cont de prezența surselor de curent.

Deoarece însă, în practică, suntem interesați ca să putem caracteriza un multipol liniar rezistiv în forma:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \end{pmatrix} = (G)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \quad (12) \qquad \text{sau} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = (R)\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_k \end{pmatrix} \quad (13)$$

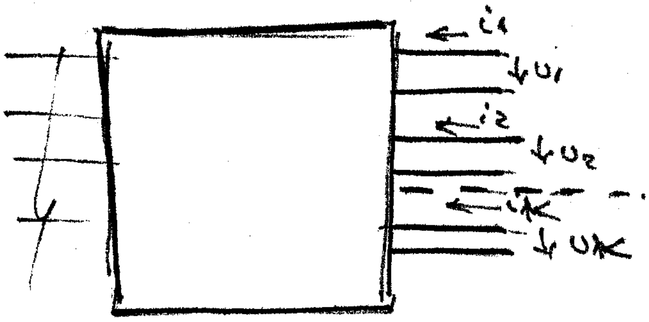
~~Notaţie~~ (adică mărimile $x_1 \ldots x_k$ din rel (11) să poată fi alese toate tensiuni, sau curenţii)

Dacă acest lucru va fi posibil, vom numi

G - matricea admitanţelor de scurtcircuit | ale multipor-

R - matricea impedanţelor de gol ale ~~mu~~ | tului..

Dacă reprezentăm multiportul liniar în figură:



- fig 2: multiport (2K porţi)

interpretările matricilor H, G, R şi dimensiunile lor sunt evidente. Să luăm de exemplu, din sistemul (12) scris:

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \ldots + G_{1n}v_n \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \ldots + G_{2n}v_n \\ \ldots \\ i_n = G_{n1}v_1 + G_{n2}v_2 \ldots + G_{nn}v_n \end{cases} \quad (12)$$

rezultă imediat interpretarea

$$\boxed{G_{jk} = \frac{i_j}{v_k}\bigg|_{v_1=0,\ \ldots v_{k-1}=0,\ v_{k+1}=0 \ldots v_n=0}} \quad (14)$$

adică pentru det. lui G_{jk}, lăsăm scurtcircuitate toate ~~porţile, ... alimentate de poarta k, astfel~~

porțile în afară de poarta k, aplică tensiunea v_k la a-ceastă poartă și măsor i_j, care trece prin scurtcircuitul de la poarta j. (sau pentru G_{kk}, măsor i_k)

~~Adaos~~ Pentru exemple de calcul, vezi ~~pag 20~~ cap III

O interpretare analogă se poate da celorlalte matrici, și ~~se~~ metode analoage pentru calculul elementelor lor.

V~~(Îm ele se compară vom intra în unele detalii)~~ ~~mai pierdem acum despre acest aspect~~

Vezi

Am prezentat deci unii multiporți („generali, trata-beli prin ~~serii~~ matrice hibridă neliniară etc). ~~Deci deoarece~~

Folosind toate caracterizările multiporților, va fi în general ușor să scriem ecuațiile circuitului,

~~(dat Astfel, dacă multiporții acceptă nu doar o reprezentare de tipul:~~

~~$x_1 = f_1(x_{k+1} \ldots x_k)$~~

Teoretic acest lucru este cum nu se poate mai simplu iată cum procedăm:

(L)
$$
\left|\begin{array}{l}
- \; F_1(x_1, \ldots x_{2k}) = 0 \quad \text{(pentru primul multiport)} \\
- \; F_2(y_1, \ldots y_{2p}) = 0 \quad \text{(al 2-lea mult)} \\
\vdots \\
- \; F_\alpha(z_1, \ldots z_{2\alpha}) = 0 \quad \text{(al } \alpha\text{-lea mult p.)}
\end{array}\right. \qquad (L) \qquad (15)
$$

(T)
$$
\left|\begin{array}{l}
- \text{ legea lui Kh de curent} \\
\qquad \Sigma' i_{nod} = 0
\end{array}\right. \qquad (T) \qquad (16)
$$

- legea lui Kh de tensiune

$$\Sigma' v_{buclă} = 0.$$

(independente)

întreg acest amalgam de relații va putea fi scris ca

$$\left.\begin{array}{l} f_1(i_1, i_2, \ldots i_n, v_1 \ldots v_n) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, \ldots i_n, v_1 \ldots v_n) = 0 \\ f_k(i_1 \ldots i_n, v_1 \ldots v_n) = 0 \end{array}\right| \rightarrow \text{primul multiport}$$

(chiar dacă multe variabile nu intervin de fapt)

$$\left.\begin{array}{l} f_{k+1}(\ldots) = 0 \\ f_{k+2}(\ldots) = 0 \\ \vdots \\ f_{k+p}(\ldots) = 0 \end{array}\right| \rightarrow \text{pt al 2-lea multip}$$

$$\vdots$$

$$f_m(\ldots) = 0$$

↑ rel. de laturi

$$\left.\begin{array}{l} f_{m+1}(i_1 \ldots i_n, v_1 \ldots v_n) = 0 \\ \vdots \\ f_{2n}(i_1 \ldots i_n, v_1 \ldots v_n) = 0 \end{array}\right| \text{n relații independente topologice.}$$

sau pe scurt

(17) $$\boxed{F(X) = 0} \quad \text{unde} \quad X = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad F(X) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{2n} \end{pmatrix}$$

și $F(X) : R^{2n} \rightarrow R^{2n}$.

Aceasta este forma de ecuații sa Varianta 1 (Grabovski pag/82).

În celelalte variante s-a încercat să se simplifice ordinul acestor ecuații. S-au obținut, ca urmare a diferitelor particularități o reducere oarecare a ordinului ecuației 17.

Varianta 2 de exemplu a exploatat faptul că multiporții au forma particulară:

(18) $$\left|\begin{array}{l} x_1 = h_1(x_{k+1}, \ldots x_{2k}) \\ \vdots \\ x_k = h_k(x_{k+1}, \ldots x_{2k}) \end{array}\right.$$ de unde, prin

nedeterminării adecvate s-a ajuns la o înjumătățire a ordinului.

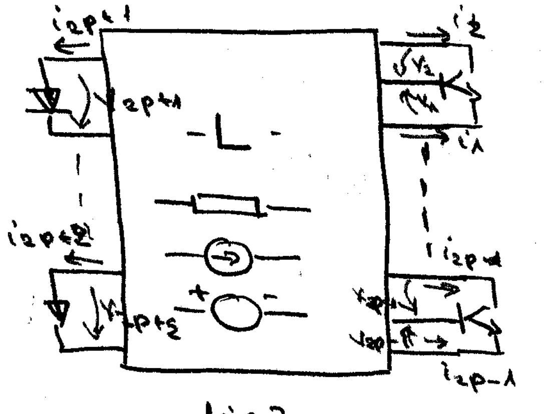
În cele ce urmează vom adopta însă <u>varianta tăieturii</u> (v pag 105) pe care se va baza întreaga discuție din acest capitol.

Ne vom referi la circuite cu: tranzistori, diode, (rezistențe neliniare în general), rezistențe liniare, surse de tensiune și curent și condensatoare și bobine oarecari (ele nu influențează discuția circuitului rezistiv). Să notăm totuși că discuția se poate extinde și la alte tipuri de circuite

② Metoda tăieturii - prezentare

Principiul metodei „tăieturii", care să separe „partea liniară" de „partea neliniară" poate fi înțeles din pag 106 - fig 24 - 25.

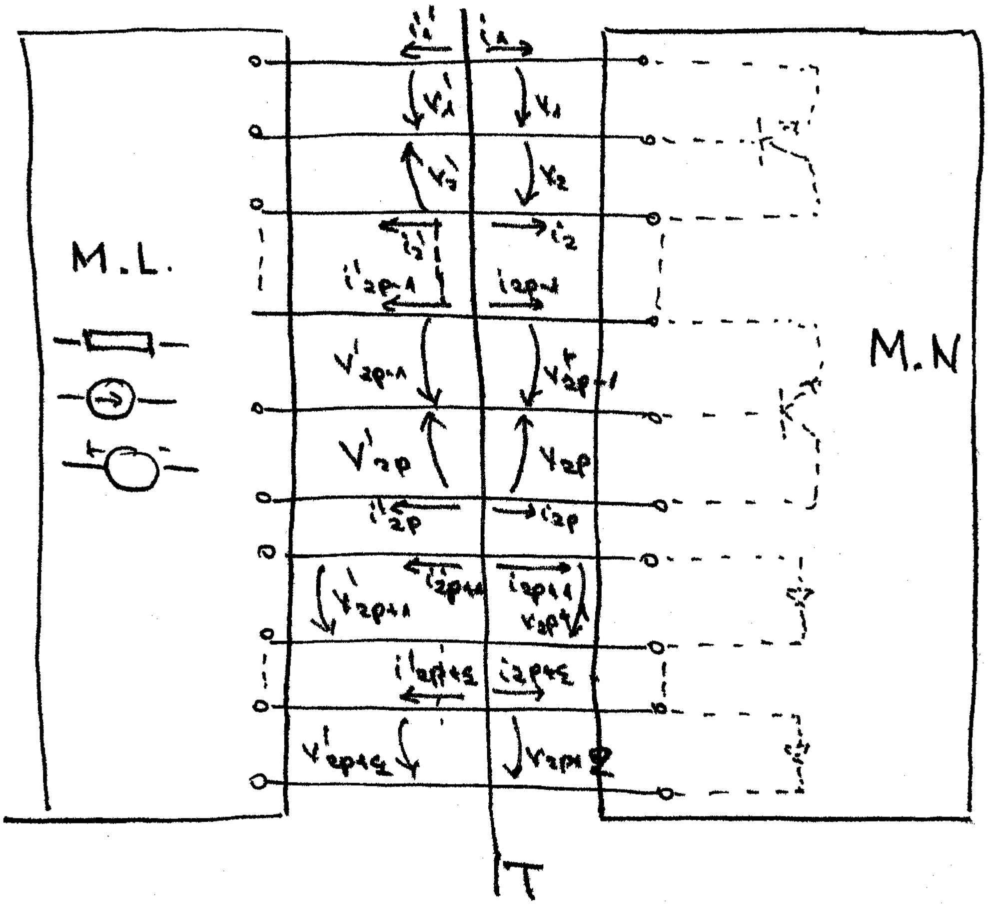
Cazul general este surprins în figura:



unde vei reaminti că simbolurile pot reprezenta, la fel de bine diode np sau pn, sau tranzistori npn sau pnp

- fig 3 -

Mai putem vedea aceeași situație și astfel:



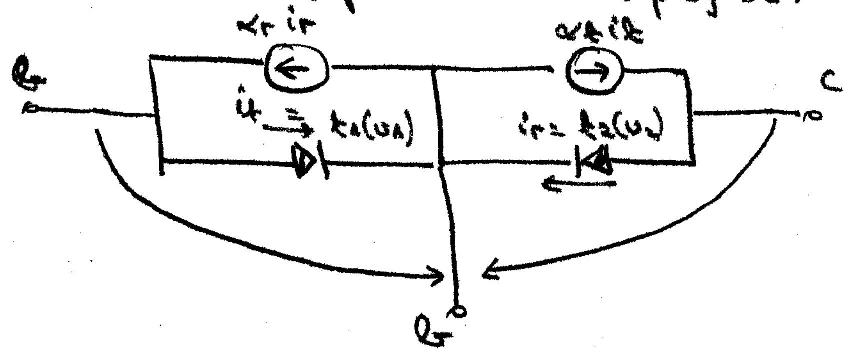
- fig4 -

③ Multiportul neliniar

(vezi și discuția despre modele - cap III B)

a) modelul standard al tranzistorului

Se vede figura 15 de la pag 66.



- fig5 -

cu convenția de notare universală (fig 16 pag 67): 

- fig 6 -

Relațiile sînt

$$(19)\quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} \quad \text{cu} \quad (20)\ \boxed{\alpha_r,\ \alpha_f \in 0,1}$$

$$\text{și} \quad (21) \begin{cases} f_1(v_1) = m_1\left[\exp[n_1 v_1] - 1\right] \\ f_2(v_2) = m_2\left[\exp[n_2 v_2] - 1\right] \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{matrix} m_1 n_1 > 0 \\ m_2 n_2 > 0 \end{matrix} \quad (22)$$

Şi pentru $\left.\begin{array}{l} m_1, m_2, n_1, n_2 > 0 \rightarrow \text{tr. pnp} \\ m_1, m_2, n_1, n_2 < 0 \rightarrow \text{tr. npn} \end{array}\right|$ (23)

şi se notează $T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix}$ (24)

(Să remarcăm că $\det T = 1 - \alpha_r \alpha_f > 0$, deci T este nesingulară şi $T^{-1} = \frac{1}{1-\alpha_r\alpha_f}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_r \\ \alpha_f & 1 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 & \alpha_r \\ \alpha_f & 1 \end{pmatrix}$ (25)

<u>Totuşi</u>, în multe din teoremele care urmează, nu vom avea nevoie de ecuaţia (21) standard pentru f_1 şi f_2, care este redată şi în figura 9a, b, ci vom permite funcţiilor f_1, f_2 libertăţi mai mari (dispozitive generale - detalii la ptul. diode).

Cu toate acestea, vom folosi întotdeauna în modelul din figura 5, un simbol unic:

— fig 7 —

care va reprezenta o rezistenţă neliniară cu diverse proprietăţi, care vor fi specificate de fiecare dată.

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} = T \cdot F(v) \qquad (26)$$

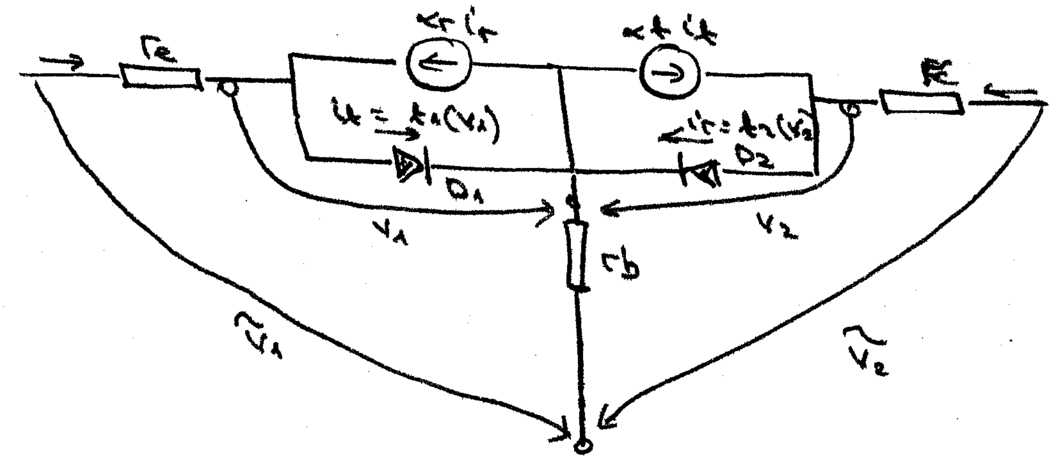
Marea de libertate de alegere pe care o vor lăsa multe din teoremele acestui capitol este extrem de valoroasă, căci dacă o teoremă nu va cere caracteristi-

clar să aibă forma exponențială, ci va cere elemen-
telor neliniare din model (le voi numi de acum tot „diode", deosebindu-le de dioda standard) să respecte doar niște condiții calitative (i.c.c) atunci ea va rămâne valabilă pentru o plajă largă de variație a caracteristicilor reale.

Asupra diverselor ipoteze de calitate voi reveni la „modelele diodelor".

b) <u>Modelul standard 2 al tranzistorului</u> (lărgit)

Acest model ia în considerație și prezența rezistențelor de contact la terminalele tranzistorului



- fig 8 -

unde D_1, D_2 respectă exact aceeași convenție ca mai sus, iar r_e, r_b, r_c țin cont de diverse aspecte fizice (rez. distribuită a bazei, de contact etc) iar relațiile sînt :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1(v_1) \\ t_2(v_2) \end{pmatrix} & (27) \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} & (28) \end{cases} \qquad \alpha_r \alpha_f \in (0,1) \quad (20)$$

(cu diacritica aferentă pentru t_1, t_2, care dacă sînt standard (fig 9a, b) satisfac (21) și

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_c \end{pmatrix} \quad (29)$$

<u>Observații</u>

1) Dacă facem $r_b = r_c = r_e = 0$ se regăsește modelul restrîns.

2) Putem trece r_b, r_c, r_e din fig 8 pe seama multiportului liniar,

<u>c) Modelul diodelor standard</u>

Am făcut deja mai multe referiri la acest aspect, în cazul diodelor din modelul tranzistorului.

În cazul general „dioda", cu simbolul din figura 7 va fi doar obligată să satisfacă anumite ipoteze calitative (detalii în cap III, pag 33) Exemple:

- t strict crescătoare P_1
- t continuă P_2
- mărginire la $\left\langle \begin{matrix} +\infty & \text{pentru np} \\ -\infty & \text{pentru pn} \end{matrix} \right.$ P_3

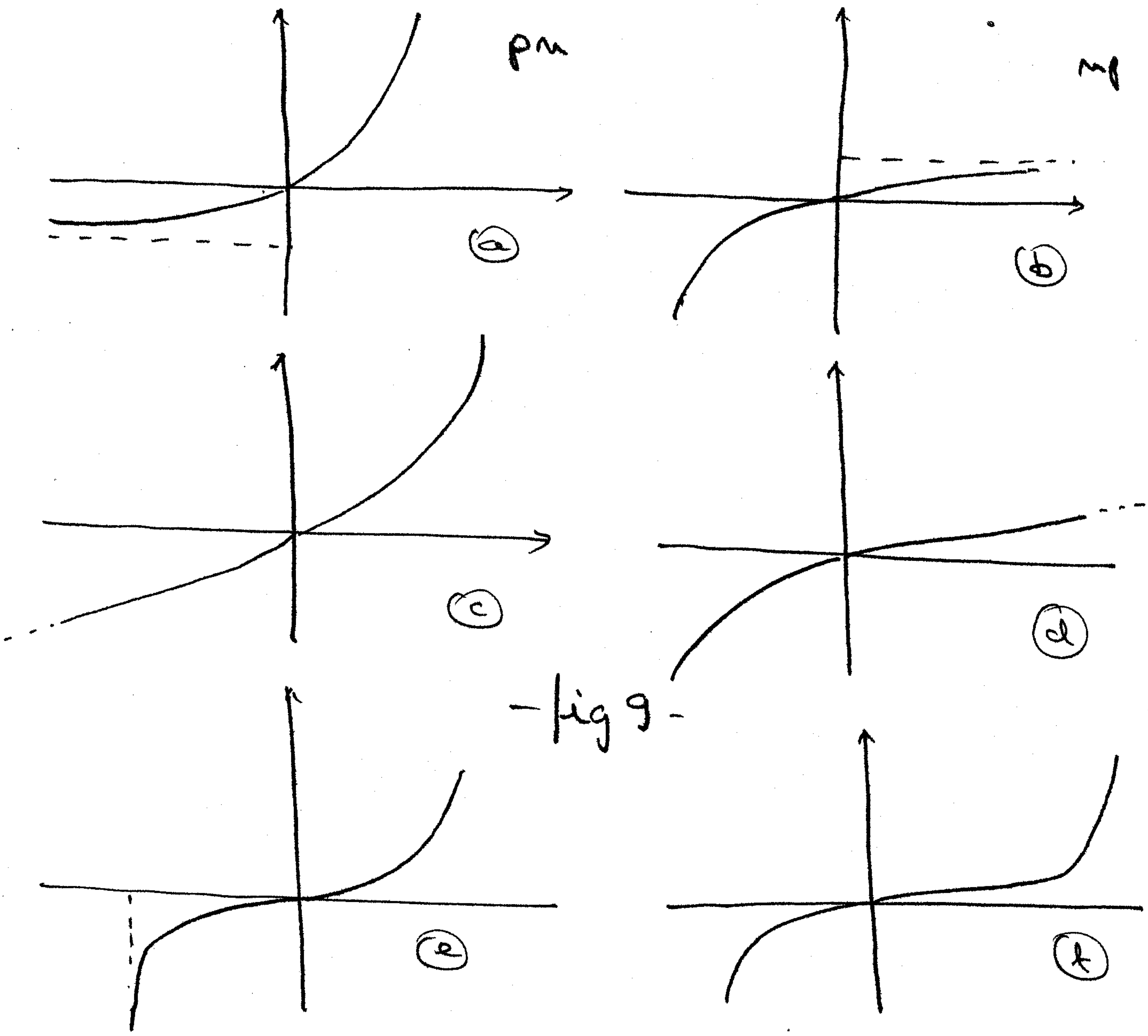
- $f(0) = 0$ $\quad P_4$
- $f_i \in C^k$ $\quad P_5$
- $f_i' > 0$ $\quad P_6$
- $\boxed{f \in \mathcal{E}}$, adică

$$\begin{cases} \inf\{f(\alpha+\beta) - f(\alpha) : -\infty < \alpha < \infty\} = 0 \\ \sup\{f(\alpha+\beta) - f(\alpha) : -\infty < \alpha < \infty\} = \infty \end{cases} \qquad P_7$$

etc.

Din aceste eventuale proprietăți, fiecare teoremă va specifica pe care din ele le satisface.

Să reținem doar modelele mai des folosite:



– fig 9 –

d) Notații

Figurile a, b reprezintă diode modulate standard.

Figurile c, d, e, f reprezintă alte variante, a căror caracteristică esențială este surjectivitatea, de aceea ele vor fi în general apelate prin „diode surjective", în plus existând notația $\boxed{f \in \tilde{\mathcal{F}}^1}$ pentru a exprima o diodă strict crescătoare și surjectivă pe R. Dacă ne referim la toate componentele aplicației diagonale F, cu proprietatea că $f_k \in \tilde{\mathcal{F}}^1$, se notează și $\boxed{F \in \tilde{\mathcal{O}}^n}$.

În speță, pentru dioda standard $\boxed{F \in \tilde{\mathcal{F}}^n_{00}}$ prin $\tilde{\mathcal{F}}_{00}$ înțelegem clasa funcțiilor strict crescătoare, continue cu $f_k(0)=0$ (uneori chiar condiții mai largi pot fi notate cu $\boxed{\tilde{\mathcal{F}}^n_0}$ — adică (f strict crescătoare, f continuă)

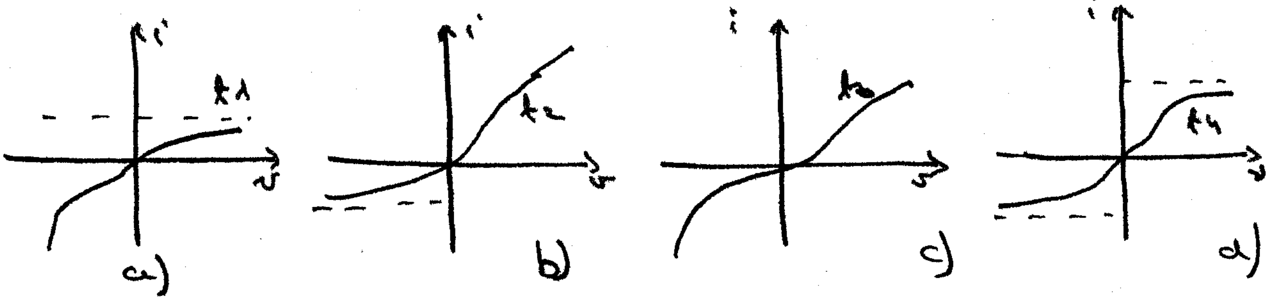
sau chiar $\boxed{(\tilde{\mathcal{F}}^n_{0g})}$ → (f-ii strict crescătoare; $f: R^n \to$ o mulț. convexă) (se va specifica v. Cap 3')

Uneori pentru o funcție $\tilde{\mathcal{F}}_0^n$ se va specifica și mai precis codomeniul. Astfel:

$\boxed{f \in \tilde{\mathcal{F}}_0(R;\ \alpha_1, \beta_1)}$ va reprezenta o funcție strict crescătoare ce duce $R \to (\alpha_1, \beta_1)$. Aici, pentru a lua în considerație toate posibilitățile:

$-\infty \le \alpha_i < \beta_1 \le \infty$, sau $\boxed{\alpha, \beta \in \bar{R}}$ (sistemul real extins). În

Astfel, putem avea situațiile descrise în figură



– fig 10 –

Din figură se vede că

$t_1(ax)$ rămâne mărginit pentru $a \to \infty$, dacă $x > 0$

$t_2(ax)$ — " — dacă $x < 0$

$t_3(ax)$ — " — dacă $x = 0$

$t_4(ax)$ — " — dacă $x =$ oarecare.

Se obișnuiește a se nota intervalele „de mărginire"

$i_1 = [0, \infty)$ $i_2 = (-\infty, 0]$ $i_3 = \{0\}$ $i_4 = (-\infty, \infty)$

și dacă ne vom referi la o aplicație diagonală

$F = [t_1, t_2, t_3, t_4]^t$, atunci se

notează cu $\left| \begin{array}{l} \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^t \\ \beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4]^t \end{array} \right.$, unde α_k și β_k

sînt astfel încît $\alpha_k < t_k(v_k) < \beta_k$ și sînt

în sistemul real extins $\bar{R}$.

deci $F : R^4 \to [\bar{\alpha}, \beta]$

(notație prescurtată

aceste funcții mai sunt notate $\boxed{F \in \tilde{\mathcal{F}}(R^n; \alpha, \beta)}$, clasă

care pentru $\alpha = (-\infty, -\infty, -\infty, -\infty)$

$\beta = (\infty, \infty, \infty, \infty) \rightarrow \mathcal{F}^4$

iar pentru alte cazuri reprezintă particularizări ale $\tilde{\mathcal{F}}_0^4$.

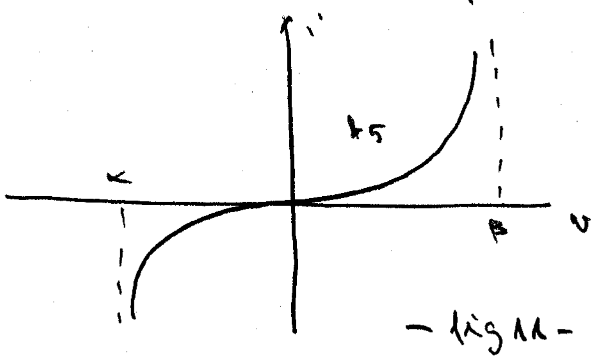
Pentru a specifica „domeniul de mărginire" a lui F se mai obișnuiește notația:

$\boxed{B(F)} = i_1 \times i_2 + i_3 \times i_4$ (găsiți pe pagina alăturată de exemplu)

În general

$\boxed{B(F) = i_1 \times i_2 \times \dots \times i_n}$ unde i_k = domeniul de mărginire a lui f_k (adică x a.î. $f(ax)$ mărginit pentru $a \to \infty$)

Ne-am mai putea ocupa însă și de funcții definite pe intervale mărginite. Ele sunt notate cu $\boxed{\mathcal{F}^n(\alpha, \beta; R^n)}$, dacă domeniile de definiție sunt intervale de tipul considerat mai sus, fiile f_i sunt strict crescătoare și acoperă R, sau respectiv $\boxed{\tilde{\mathcal{F}}_0^n(\alpha, \beta, R^n)}$ unde nu se mai impune surjectivitatea.



Exemplu de funcție $f(\alpha, \beta, R)$ cu α, β finite.

— fig 11 —

Arăt astfel care ne vor permite enunțarea unor teoreme valabile și pentru cazul domeniilor mărginite, cu implicații în procedeele de prelungire.

Dacă domeniul de definiție este notat S, cu $S = S_1 \times S_2 \ldots \times S_n$ mulțime convexă, se mai folosesc notațiile:

$\boxed{\mathcal{F}^n(S)}$, $\boxed{\mathcal{F}_0^n(S)}$ cu înțelesuri analoge celor precedente (fiind definite pe S strict crescătoare, a duce R^n pe (în) R^n.

② Rezumat privind modelele

Pe scurt putem spune că tranzistoarele sunt modelate tip 1 (model restrâns) sau tip 2 (model lărgit) iar elementele neliniare se introduc în model, sau în exterior: $f_1, \ldots f_{2p}, f_{2p+1}, \ldots f_{2p+q}$ (diode) - sunt modelate diverse, preponderent prin „dioda standard" ($\mathcal{F}_0'$ mai general) sau dioda surjectivă $\mathcal{F}_0^1$, dar permițându-se și alte ipoteze.

$$\begin{pmatrix} i_{2k-1} \\ i_{2k} \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} f_{2k-1}(v_{2k-1}) \\ f_{2k}(v_{2k}) \end{pmatrix} \quad \text{— model restrâns} \qquad (30)$$

sau

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_{2k-1} \\ i_{2k} \end{pmatrix} = T_k \begin{pmatrix} f_{2k-1}(v_{2k-1}) \\ f_{2k}(v_{2k}) \end{pmatrix} \quad \text{— model lărgit} \qquad (31) \\ \begin{pmatrix} v_{2k-1} \\ v_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{2k-1} \\ \tilde{v}_{2k} \end{pmatrix} - R_k \begin{pmatrix} i_{2k-1} \\ i_{2k} \end{pmatrix} \end{cases}$$

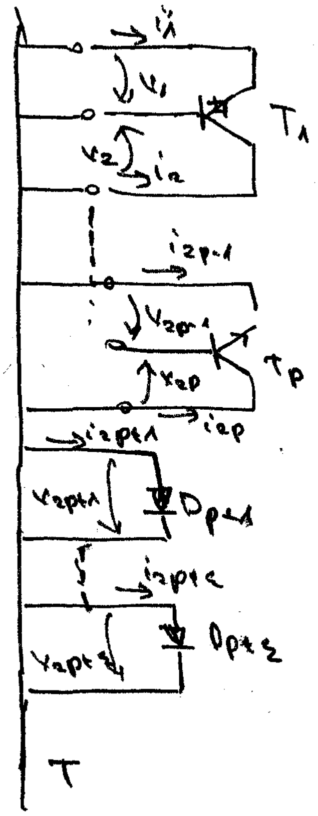
cu

T_K, R_K definiți la (24), (29) și

$$\begin{cases} i_{2p+1} = f_{2p+1}(v_{2p+1}) \\ \vdots \\ i_{2p+q} = f_{2p+q}(v_{2p+q}) \end{cases} \qquad (32)$$

(t) Restricția neliniară

Din fig 4 :



— fig 12 —

Restricția neliniară impusă tăieturii

Avem evident sistemul următor de relații:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} &= T_1 \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} \\ &- - - - - - \\ \begin{pmatrix} i_{2p-1} \\ i_{2p} \end{pmatrix} &= T_p \begin{pmatrix} f_{2p-1}(v_{2p-1}) \\ f_{2p}(v_{2p}) \end{pmatrix} \\ i_{2p+1} &= f_{2p+1}(v_{2p+1}) \\ &- - - - - - \\ i_{2p+q} &= f_{2p+q}(v_{2p+q}) \end{aligned}\right\} (33)$$

și cu $T_K = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r^K \\ -\alpha_f^K & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_r^K, \alpha_f^K \in (0,1)$

$\forall K = 1, 2 \dots p.$

$f_1, f_2, \dots f_{2p+q}$ diverse modelate

și putem scrie toate aceste relații într-un singur tablou: (formă standard) pe care îl vom interpreta imediat ca o transformare $f : R^{2p+q} \to R^{2p+q}$:

$$\begin{pmatrix} i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ \vdots\\ i_{2p-1}\\ i_{2p}\\ i_{2p+1}\\ \vdots\\ i_{2p+q}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r^1 & 0 & 0 & & & & & \\ -\alpha_f^1 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_r^2 & & & & & \\ 0 & 0 & -\alpha_f^2 & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & -\alpha_r^p & 0 & \\ & & & & & -\alpha_f^p & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(v_1)\\ f_2(v_2)\\ f_3(v_3)\\ f_4(v_4)\\ \vdots\\ f_{2p-1}(v_{2p-1})\\ f_{2p}(v_{2p})\\ f_{2p+1}(v_{2p+1})\\ \vdots\\ f_{2p+q}(v_{2p+q})\end{pmatrix} \quad (35)$$

sau cu $i = (i_1, i_2, \ldots, i_{2p+q})^t$ (36)

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_{2p+q})^t$

$F(v) = (f_1(v_1), \ldots, f_{2p+q}(v_{2p+q}))^t$ (37)

deci $F : R^{2p+q} \to R^{2p+q}$ aplicație diagonală

și $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_p \oplus I_q$ (38), unde prin $\oplus$ se înțelege operația „sumă directă" (vizualizată în 35) aplicată matricilor 2×2:

$$T_k = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^k \\ -\alpha_f^k & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

și matricii unitate I_q - de ordin q (41). Avem deci:

$$\boxed{i = T F(v)} \quad (40)$$

aceasta este o expresie standard condensată pentru restricția neliniară.

b) Modelul lărgit al tranzistorului

Se procedează la fel ca mai sus, dar ținând cont de:

relațiile (31) în loc de (30), vom avea:

$$\boxed{\begin{aligned} i &= T\,F(v) \\ v &= \tilde{v} - R\cdot i \end{aligned}} \quad (42)$$

unde $i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_{2p+q} \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2p+q} \end{pmatrix}$ (43) (~~sunt valorile~~ ~~tensiunilor~~ ~~pe diode~~ ~~curentilor~~ ~~lor~~ ~~(care sunt)~~ ~~de contact~~)

iar $\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{2p+q} \end{pmatrix}$ (44) (vezi fig 8) repr. tens. pe joncțiuni neglijând rezistențele de contact.

$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p \oplus I_q$ (45) (vezi ~~fig~~ rel 35)

$F(v) = \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ \vdots \\ f_{2p+q}(v_{2p+q}) \end{pmatrix}$, ~~F(v)~~ $F: R^{2p+q} \longrightarrow R^{2p+q}$ (46)

(aplicație diagonală)

și în sfârșit, R rezultă din:

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} - R_1 \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (47) \\ &\vdots \\ &\begin{pmatrix} v_{2p-1} \\ v_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{2p-1} \\ \tilde{v}_{2p} \end{pmatrix} - R_p \begin{pmatrix} i_{2p-1} \\ i_{2p} \end{pmatrix} \\ &v_{2p+1} = \tilde{v}_{2p+1} \\ &\vdots \\ &v_{2p+q} = \tilde{v}_{2p+q} \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow v = \tilde{v} - R\,i$ ~~(48)~~

cu $R = \begin{pmatrix} R_1 & & & & 0 \dots \\ & R_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_p & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$ (48)

(la fel ca 35)

Deci

$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_p + O_q$ ~~→ (matrice~~

unde $R_k = \begin{pmatrix} r_a^k + r_b^k & r_b^k \\ r_b^k & r_b^k + r_c^k \end{pmatrix}$ $k = 1 \dots p$ $\quad r_a^k, r_b^k, r_c^k \geq 0$ (49)

O_q = Matricea nulă de ordin q.

~~Deci, Să facem în final~~

Deci ~~și~~ relațiile (36) și (42) vor caracteriza partea neliniară.

Vom remarca în final că

Obs1 : Dacă facem $r_b^k, r_c^k, r_e^k = 0$, relațiile 42 se transformă în 36, așa cum de altfel ne așteptam : considerarea cazului [illegible] ca un caz particular a celui lărgit cu $r_e^k, r_c^k, r_b^k = 0$.

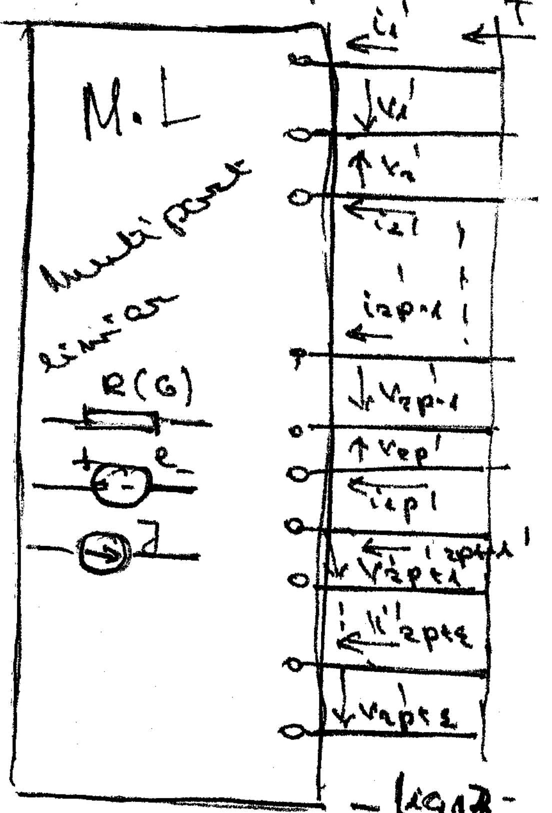
Obs2 Am fi putut proceda și invers, să reducem rezistențele „de contact" (r_e, r_b, r_c) în partea liniară (v fig 4) și să rămânem cu partea neliniară restrânsă. (36 → 42)

Vom lăsa aceste observații mai târziu.

4) Reducția liniară

a) Obținerea reducției

Să ne ocupăm acum de reducția liniară :



- fig 13 -

Remarcăm de la început că noi am obținut o caracterizare $i = \hat{\mathcal{F}}(v)$ ($i, v \in R^{2p+c}$) din partea neliniară, și avem un mare avantaj să cuplăm și partea liniară cu o relație de același tip.

$$i' = \mathcal{G}(v')$$

Dorim deci ca multiportul liniar să aibă o reprezentare prin parametrii admitanțelor de scurtcircuit.

Am văzut la par 1, că în general, un multiparte reactivă poate admite o reprezentare:

(11) $x' = H y'$ (unde x'_k repr $\langle^{v'_k}_{i'_k}$

y'_k repr $\langle^{i'_k}_{-v'_k}$)

admite o repr. hibridă (Teorema 1 pag 227), atunci înseamnă că [?] nu sunt respectiv [?] surse independente.

Dacă ele sunt prezente:

(10) $x' = H y' + c$ ~~(Teo)~~ este posibilă introducerea (Teorema 2)

~~Nu~~ Nu vom mai reveni asupra detaliilor privind matricea G (mai sus notată cu Y de obicei) ~~a de~~ a admitanțelor de scurtcircuit (vezi deci de la pag 1 și calculul de la pag 90 ff), pentru cazul în care există surse indep)

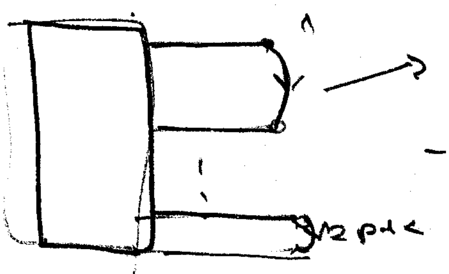
Desigur, calculul lui B din relația

(50) $\boxed{i' = G v' + B c}$ (analoagă lui 10, unde c ține cont de prezența surselor independente din multiport) este arătat și la pag 93. De astfel se arată acolo cum putem calcula direct pe $-c$, notat cu B. În adevăr se pleacă de la (50), de exemplu

$$i'_1 = G_{11} v'_1 + \dots + G_{1k} v'_k + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = i'_1 \Big|_{v'_1 = \dots = v'_k = 0}$$ ceea ce sugerează imediat

calculul lui c: Se face scurtcircuit la toate porțile v_k și se măsoară curenții care trec prin aceste scurtcircuite.



- fig 14

Cu sensul din figură se măsoară de fapt $-c$, pentru că sensul pozitiv este cum se numără în multiport. Deci obținem prin acest procedeu:

$$\boxed{B = -C} \qquad \left(B_i = -i_i \Big|_{v_1 = \dots = v_{2p+\ell} = 0}\right) \quad (51).$$

Acum avem deci să calculăm valorile G și

$$\boxed{\left(G_{jk} = \frac{i_j}{v_k}\Big|_{v_1 = \dots v_{k-1} = v_{k+1} = \dots = v_{2p+\ell} = 0} \right.} \quad C_j = 0 \qquad (52)$$

(v. pag 14) s-a adăugat $C_j = 0$ pentru a nu avea de grija lui C (și deci a surselor). Practic se va proceda astfel: facem toate sursele de curent zero și de tens. scurtcircuit v. pag 50.

și C, deci avem determinată relația:

$$\boxed{i' = Gv' - B} \quad (53).$$

b) Discuții asupra posibilității

Acum să facem o discuție asupra unui punct care ne interesează foarte mult: când va fi posibil să scriem (53), cu alte cuvinte, când vor exista valorile B și G?. (vezi și Desoer la pag 91 privind acest aspect)

1) Pentru a putea scrie pe B) trebuie să-l putem face pe $v_1 = v_2 \dots = v_{2p+\ell} = 0$. Deci acest lucru nu ar fi posibil numai dacă cu părțile $1, \dots 2p+\ell$ și cu sursele de tensiune independente, s-ar forma vreo buclă care să nu cuprindă și alte elemente. ~~Aceasta~~ Adică, în care o lege K. de tensiune să nu poată fi respectată, de valorile independente ale surselor.

Dar aceasta este în fond echivalent cu a spune că dacă facem sursele de tens. scurtcircuit, în nici un caz $v_1, \dots v_{2p+\ell}$ să nu formeze vreo buclă.

2) După ce facem toate sursele de curent goluri și cele de tensiune scurtcircuitate, obținem un nou multipol $\boxed{Me'}$ liniar, rezistiv, fără surse independente, dar scurtcircuitarea surselor de tensiune poate produce bucle nepermise pentru calculul lui G. (aceste bucle pot exista de altfel și în circuitul inițial).

Matricea G, va exista ~~intactă~~ atunci și numai atunci, când Me' nu va oferi „porților $X_1, \ldots X_{2p+q}$, o cale pe care să se evolueze o buclă incluzând exclusiv laturi de poartă. Altfel spus, $X_1 \ldots X_{2p+q}$ trebuie să fie independente liniar. ! Regăsim ~~care și în impu~~ condiția impusă existenței lui B. În concluzie aceasta e condiția necesară și su-

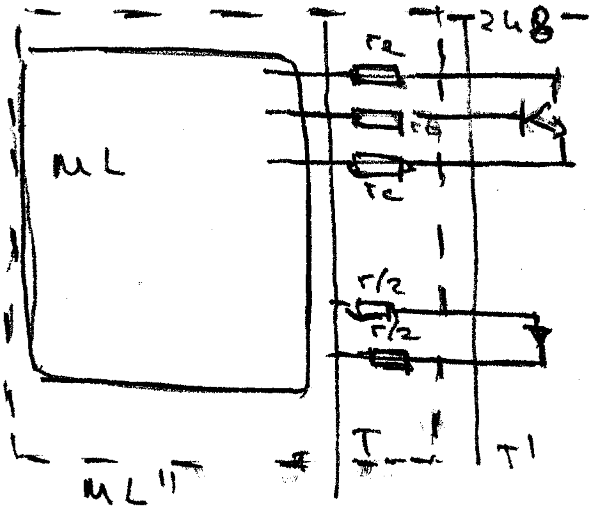
(54) ficientă de existență a lui B (53) (sau a lui G). (54)

3) Ne va interesa încă, când este G singulară și când nu. Răspunsul este evident: (v. și pag 92):

$\boxed{\det G \neq 0}$ d.n.d. multiportul liniar Me (Me') admite o caracterizare prin parametrii impedanță de gol. (R)

4) Pentru multiporți rezistivi, reciproci G este în general simetrică

5) Dacă folosim modelul larg al tranzistorului, putem neglija rezistențele $r_b, r_c, r_e \neq > 0$, în partea rezistivă a tranzistorului. La fel putem lua cazul de ~~Situația diodei ideale~~: rezistența inversă a diodelor (ruptă $\langle\, r/2,\ r/2$



– fig 15 – Trapelarea rezistențelor de terminal multiplexorului liniar.

Observație: în general r diodelor se poate pune chiar scurtcircuit (ele nu se iau în considerație în R)

Noul multiplexor liniar va avea acum întotdeauna o matrice G', care părțile ele vehiculare a lucrărilor ulterioare sunt eliminate.

Aceasta e o alegere f. importantă, care practic, întotdeauna putem lua în considerație rez. de terminal a disp. neliniare (ele sunt chiar impuse de circuite serie) și astfel am arătat că întotdeauna pot servi (53), adăugat la (36).

c) De fi vom da unele rezultate care cer ca G să existe. Un mod de a vedea lucrurile este cel de mai sus. Vlehan însă a observat că aceasta înseamnă să speculăm o informație auxiliară și că nu vom mai putea folosi rezultatele pentru modele mai practice, în care r_b, r_c, r_e, sunt neglijate. De aceea el s-a străduit să obțină rezultate valabile și pentru aceste modele simple, și rezultatul principal al lucrării (Aplicația 1 – cap 5) este un astfel de rezultat, care nu depinde dacă poate, sau nu poate fi scrisă matricea G.

5 Obținerea ecuației standard.

Nu vom face acum altceva decât să privim atent figura 4, și rezultatele paragrafelor 3 și 4. Avem așadar

Varianta 1 (model restrâns)

$i = TF(v)$ (50) rezistența neliniară

$i' = Gv' - B$ (53) rezistența liniară

$+\begin{cases} i' = -i & (54) \\ v' = v & (55) \end{cases}$ (relații „oglindă" față de tăietură)

$$\Rightarrow Gv - B = -TF(v) \Rightarrow \boxed{TF(v) + Gv = B} \quad (56)$$

Varianta 2 (model lărgit)

$\begin{cases} i = TF(v) \\ v = \tilde{v} - Ri \end{cases}$ (42) rezist. neliniară

$i' = Gv' - B$ (53) rezist. liniară

$\begin{cases} i' = -i & (54) \\ v' = \tilde{v} & (57) \end{cases}$ relații „oglindă"

$$\Rightarrow \begin{cases} G\tilde{v} - B = -TF(v) \\ \tilde{v} = v + RTF(v) \end{cases} \Rightarrow \underset{G(v + RTF(v))}{\cancel{G(v+Ri)}} - B = -TF(v)$$

unde $R_K = \begin{pmatrix} r_b^k + r_e^k & r_b^k \\ r_b^k & r_b^k + r_c^k \end{pmatrix}$ pe $K = 1 \ldots n$

$R_{K+1} = \ldots R_{K+q} = 0$ (dacă neglijăm rez. diodelor)

$R_{K+1} = r_{q+1}, \ldots R_{K+q} = r_{K+K}$ dacă ține cont de ele

$R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_{p+q}$

sau

$$Gv + GRTF(v) + TF(v) = B \quad \text{sau}$$

$$\boxed{(GR + 1)TF(v) + Gv = B} \quad (58)$$ sau, dacă $\det(GR+1) \neq 0$ (59)

$$\boxed{TF(v) + (GR+1)^{-1}Gv = (GR+1)^{-1}B} \quad (60).$$

Dacă mai observăm că, având în vedere forma lui T (vezi rel. 35)

$$\det T = \det T_1 \ldots \det T_p = (1 - \alpha_F^1 \alpha_R^1) \ldots (1 - \alpha_F^p \alpha_R^p) \neq 0$$

(61) (61)'

și ca urmare relațiile (56), (60) mai pot fi scrise și:

$$\boxed{F(v) + T^{-1} G v = T^{-1} B} \quad (61)$$

$$\boxed{F(v) + T^{-1} (GR+I)^{-1} G v = T^{-1} (GR+I)^{-1} B} \quad (62)$$

Formulele 56, 58, 60 pot fi scrise (63)

$$\boxed{A F(v) + B v = C}$$

Forma standard 2 a ec. neliniare a ...

(A, B, matrici $2p+q \times 2p+q$
C vector $2p+q \times 1$
iar formulele (61), (62):

$$\boxed{F(v) + A v = B} \quad (64)$$

Forma standard 1 a ec. neliniare cu ...

(A o matrice oarecare $2p+q \times 2p+q$ $(n \times n)$
B vector de cte: $n \times 1$ $(2p+q \times 1)$

~~Am luat ... ~~

(unde $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $F(v) = \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ \vdots \\ f_n(v_n) \end{pmatrix}$. $F: R^n \to R^n$ (aplicație diagonală)

iar $f_i(v_i)$ respectă anumite condiții de calitate.

În cele ce urmează, vom trata ~~...~~ rezolvarea ecuației (64), în forma ei generală, urmând ca prin particularizare să se obțină ~~...~~ rezolvarea problemei date.

(de exemplu $A \to T^{-1} G$, ~~...~~ $B \to T^{-1} B$ pentru problema ecuația 56 – așa cum a fost și în exemplul anterior.

Deși ordinul ecuației obținute este încă se poate lua sistemul ecuația (64) referiri la proprietățile ei calitative, existența soluțiilor, unicitate, (calculul etc.) analoage celor pe care le-am ~~...~~ sugerat în Cap III - D.

~~Procedeul ... acest capitol ..., va fi ...~~

Din faptul ... (v. ...) și ... la ...