(E) Discuția ecuațiilor de regim staționar

(1) Generalități

În paragraful anterior au fost obținute diverse ecuații a căror rezolvare ar duce la determinarea tuturor variabilelor laturilor circuitului (printre care și cele care ne interesează.

Să repetăm câteva forme:

Varianta 1 : $F(y) = b$, $F : R^{10} \to R^{10}$ (69)

Varianta 2 : $\tilde{F}(z) = c$, $F : R^5 \to R^5$ (71)

Varianta 3 : $f(x) = a$, $f : R^4 \to R^4$ (73)

Varianta „tăieturii" $f(v) = B$, $f : R^2 \to R^2$ (84)

în care $f(v) = T F(v) + G v$.

Observăm că ordinul minim la care pot fi aduse aceste ecuații este doi (datorită prezenței tranzistorului - element diport și neliniar)

Nu putem reduce acest ordin printr-o eliminare, căci cele două ecuații din (84) sînt transcendente.

Să presupunem așadar că dorim să analizăm ecuația

$$(93) \quad f(x) = a \qquad f : R^n \to R^n$$

(indiferent de ordinul ei și de faptul că acest ordin este minim sau nu. În 84 $n = 2$)

Ce ne-ar putea interesa în legătură cu ecuația (93)?

În primul rând am putea fi interesați să obținem soluția ei exactă. Caracterul transcendent va face să nu putem obține însă soluția generală (parametrii o reprezintă) într-o formulă. Totuși pentru o actualizare oarecare a parametrilor, am putea spera să obținem soluție numerică exactă. Desigur că aceasta ar ține locul oricăror considerații calitative.

Confruntați cu această problemă analiștii adoptă două maniere de a o rezolva (v și pag 11 - IB3)

$\boxed{\text{Ek}}$ - folosesc aproximarea ecuațiilor, pentru a le aduce la forme mai simple. Menționez că această metodă presupune:

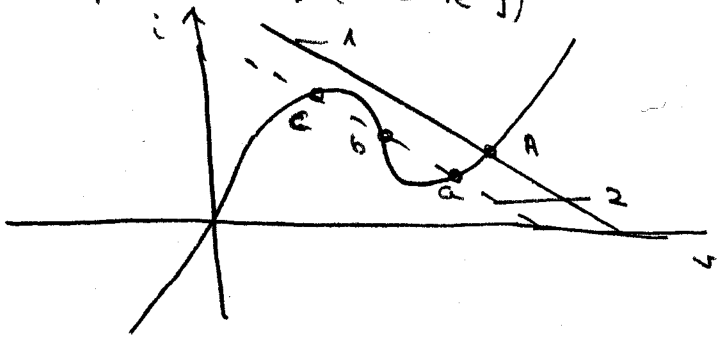
- o serie de ipoteze simplificatoare (reg. activă normală, $V_{BE} = 0.6V$ etc)
- aproximări care nu sunt urmărite riguros în final

O primă problemă ce ar trebui lămurită fundamental este dacă ne putem aștepta ca soluția aproximativă să fie departe valoric de cea reală:

α) $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{real}$ e destul de aproape de $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{aprox}$?

Dar, o problemă și mai neglijată este dacă nu cumva aproximarea schimbă caracterul calitativ al ecuațiilor de exemplu :

(β) nu cumva există două valori $\binom{v_1}{v_2}'$, $\binom{v_1}{v_2}''$ reale din care una s-a pierdut : (vezi fig)

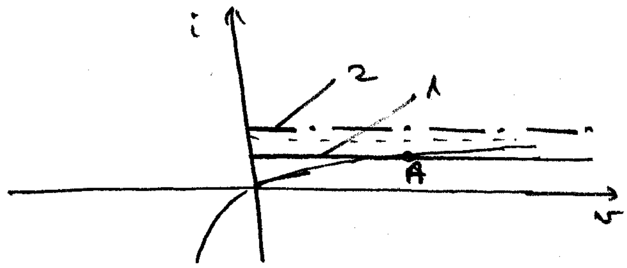


— fig 30 —

1 – caract. reală

2 – caract. aproximată

– sau nu cumva s-a pierdut o soluție care există ?



— fig 31 —

– alte întrebări de această tip.

Răspunsurile la aceste întrebări ar antrena probabil un asemenea efort, <u>pentru fiecare caz particular</u>, încât ar anula metodei aproximative calitatea ei esențială : operativitatea.

Deseori se recurge la următorul procedeu : se întoarce valorile $\binom{v_1}{v_2}$ obținute în ecuații. Dacă rezultatul e prea depărtat se face o modificare asupra lor. În genere, această alternanță : <u>calcul – verificare – modificare</u> este în fond un algoritm (<u>iterație</u>) și ea stă la baza vestitelor metode clasice (b). Vom discuta deci în acest cadru efectele ei :

$\boxed{b}$ Rezolvarea pe calculator, care aplică în gol un algoritm iterativ oarecare.

Apar însă impedimentele:

- exactitatea calculului este făcută fără sens (de ex. în proiectare) de puternica variație a diverșilor parametri ce apar în (93). (Variații cu temperatura, împrăștierea caracteristicilor k_1, f_2, variația lui E - insuficient (filtrată etc)

- algoritmii folosiți nu sînt „imbatabili". Aceasta este un fapt deseori neglijat și de aceea unii utilizatori pot „chinui" calculatorul (sau pe ei înșiși) aplicînd un algoritm într-o problemă „cronică", cum ar fi cazul cînd ecuația nu are soluție, sau are mai multe, sau chiar cînd ecuația este în regulă, dar algoritmul folosit nu e convergent în cazul ei. Deci:

<u>Ne poate oferi ecuația (93) asemenea surprize</u>?

Aceasta e întrebarea la care încearcă să răspundă analiza calitativă fundamentată (A.C.F) și răspunsurile vor fi cu atît mai valoroase, cu cît vor reclama ipoteze mai puțin restrictive asupra circuitului (între altele nu se cere măcar nici o actualizare a parametrilor !). „împrăștierea" care va fi admisă de aceste ipoteze, va trebui numai să se încadreze în anumite condiții calitative. Acesta este rostul introducerii i. C. C. și i. C. T. (ipoteze de constanță calitativă și topologică) și a detalierii făcute la par II B.

Aș dori ca acum să apară clar necesitatea rezolvării problemelor de care se ocupă acest paragraf, pe care le voi numi probleme calitative și care, pe lîngă interesul lor de sine stătător mai au și rolul de a întovărăși metodele clasice.

Această „tovarăşie" este de fapt întotdeauna necesară pentru o analiză riguroasă (fundamentată).

(2) Problema existenței unei soluții

Este în general o problemă spinoasă pentru cazul ecuațiilor n-dimensionale.

Ar fi de exemplu suficient (dar nu necesar) să arătăm ca funcția f(x) (din §3) este surjectivă, pentru a avea certitudinea că f(x) = a are o soluție, pentru un a dat. Pentru a avea certitudinea existenței a măcar o soluție oricare ar fi a (oricare ar fi datele numerice), ar trebui să arătăm surjectivitatea lui f (necesar și suficient).

Surjectivitatea se arată însă foarte greu. Nu o voi face nici măcar pentru exemplul nostru (ecuația §2). Ea va rezulta însă automat, dacă vom arăta că funcţia f este bijectivă. Desigur că aceasta nu trebuie să implice surjectivitatea (cerc vicios) ci ar fi de dorit să se facă pe altă cale. În acest scop, teoremele de la par III C pot fi extrem de utile. Aşa vom proceda şi în cazul exemplului nostru. (v pct 4)

Să mai observăm însă încă un fapt important: nici una dintre metodele $\boxed{a}$ şi $\boxed{b}$ (v pag 117) nu ne oferă o demonstraţie riguroasă a existenţei soluţiei.

$\boxed{a}$ - nu este rezolvată ecuaţia reală şi nu se demonstrează că dacă ecuaţia aproximativă are o soluţie, atunci şi cea reală are (v fig 31)

- soluţia nu este insensibilă la variaţia parametrilor (cu tot efortul făcut în proiectare (v pag 49). Nu se demonstrează că această variaţie nu poate produce o ecuaţie fără soluţie.

- argumentul folosirii unei tehnici iterative nu este definitiv. ~~Vom.~~ Acest aspect este lărgit în $\boxed{b}$, unde tehnica iterativă este cea folosită:

$\boxed{b}$ - oricât de exactă ar fi tehnica iterativă, ea se aplică la şirul ecuaţii care stau sub semnul variaţiilor descrise mai sus (a)

- oricât de „evidentă" pare convergenţa unui proces, <u>aceasta nu este o demonstraţie</u> a convergenţei.

Un exemplu este oferit de şirul:

(94) $x_n = \{1 - \frac{1}{n}$ pt $n \leq 1000$ și 2^{n-1000} pt $n \geq 1000\}$, șir desigur nemărginit care poate părea convergent la 0 după primii 999 de pași!

Desigur intuim deseori că un astfel de fenomen nu poate apare în problema noastră (intuițiile grafice nu ne vor mai servi însă de suport pentru cazul n-dimensional!). Dacă însă intuiția este acceptabilă (dorită chiar) în activitatea practică și de cercetare, ea nu poate reprezenta nimic în planul ~~demonstrațiilor~~ propozițiilor matematice, decît însoțită de o demonstrație riguroasă (fundamentarea intuiției)

Deasemenea, cea mai simplă dovadă că nu există un algoritm „imbatabil", care să ofere soluția oricărei ecuații este considerarea unei probleme care din start nu are soluție! Nu aceasta este însă singura posibilitate de „blocare" a calculatorului, ~~pe~~ Pe lîngă problemele de tipul menționat („interzise"), în situații „cronice" calculatorul poate fi adus și prin probleme bine definite (ecuații cu o soluție unică) dar pentru care algoritmul calculatorului nu e convergent („probleme „maladive")

O altă problemă care ne poate interesa foarte mult este aceea de a fi siguri că soluția, dacă există, este unică: O vom putea trata mai în detaliu, realizînd-o chiar, pentru exemplul nostru.

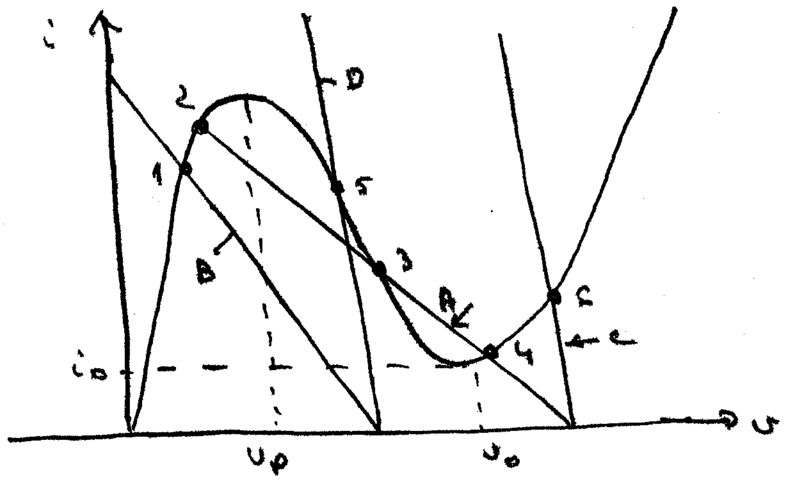
3) Problema unicității soluției

Vom da o dezvoltare mai mare acestui subiect și pentru că el este legat de Aplicația A (cap X)

a) Generalități

Problema unicității este extrem de interesantă practic, fie când ea este dorită (circ. obișnuite), fie când nu (circuite bistabile). Circuitele bistabile sînt cele a căror existență atrage automat atenția asupra problemelor de acest tip. Se arată că un circuit nu se poate comporta bistabil decît dacă ecuațiile lui de regim staționar au mai multe soluții.

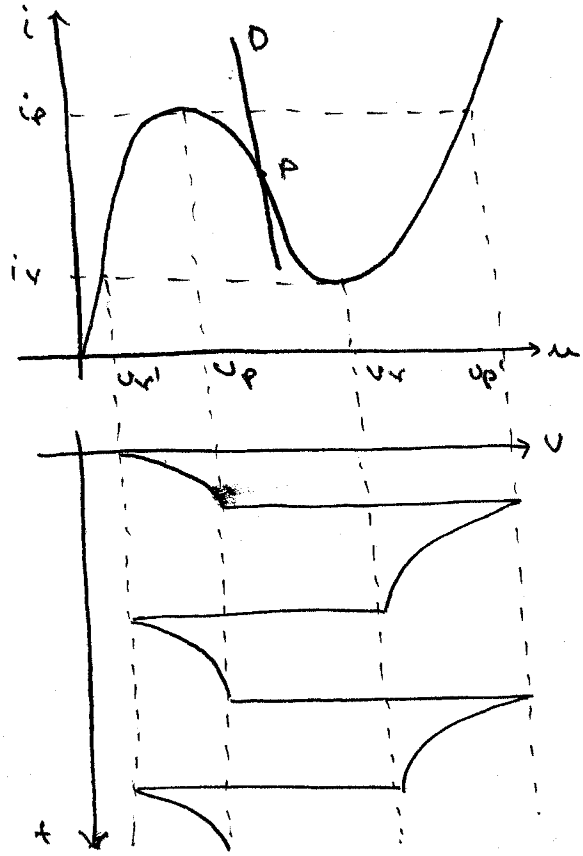
Aceasta nu înseamnă automat că toate punctele soluție vor fi automat puncte de stabilitate. (v disc. din cap V)
Un exemplu îl oferă dioda tunel (v [12] de ex) funcționînd în regim: astabil, monostabil, bistabil:



— fig 32 —

Dioda tunel și diverse drepte de sarcină statică (A, B, C, D)

Nu toate punctele 1, ... 6, (soluții ale ecuațiilor statice) vor fi efectiv puncte de funcționare stabilă întotdeauna. Iată exemplul oferit de regimul de lucru astabil, în cazul dreptei D, cu toată existența soluției S, [illegible]:



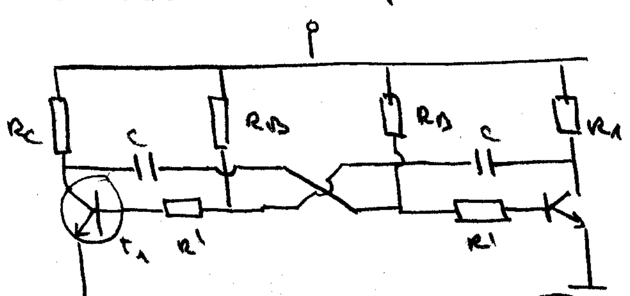
— fig 33 —

Explicația dată acestui fenomen, este legată de elementele reactive ale schemei (L, C), care nu vor permite soluției să se „așeze" în punctul P. (însăși termenul de regim „staționar" se dovedește aici impropriu)

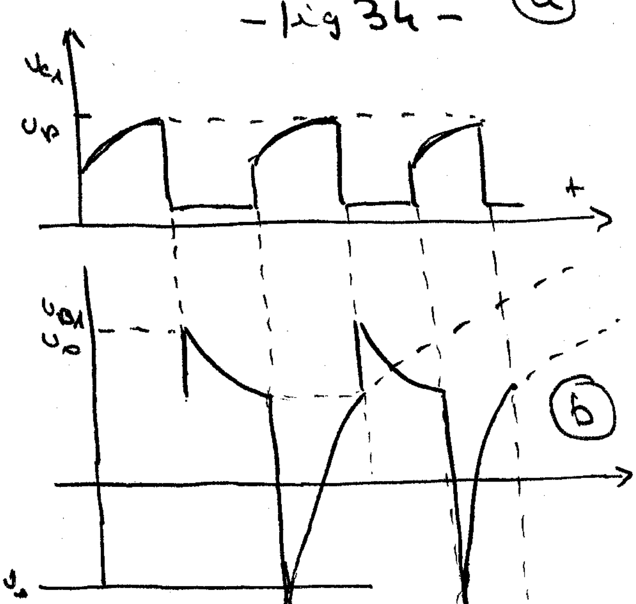
Analiza acestei probleme este un subiect complex ([10], 6, 8, 9) în detaliile căruia nu vom intra aici. Să remarcăm numai că astfel de „surprize" se pot afla și circuitele cu tranzistori, după cum vedem în fig 34, care reprezintă

(a) – Multivibratorul astabil cu cuplaj în colector

(b) – Variațiile curenților.



— fig 34 — (a)



Din nou expresia punct static (adică mulțimea soluției ecuațiilor staționare) nu este potrivită.

Descrierea acestei comportări, este tratată în lucrările de specialitate printr-o argumentare hibridă, care a-mulțimi aspectele legate cu cele matematice. Justificarea matematică, pornind de la ecuațiile diferențiale ce caracterizează circuitul (singurele care reprezintă cu adevărat o cercetare - fără a „rupe" funcționarea în „static" și „variabil"). Se analizează aceste ecuații, după ce în prealabil se aduce eventual la forma normală (v. Apel B, cap V). Este un subiect foarte vast. Din concluzii vom folosi aici aceea că: Un circuit nu poate avea o comportare bistabilă, decât dacă ecuațiile sale de regim staționar au mai multe soluții. (de obicei există 3 dintre care una nu repr. un pt de stabilitate)

Aceasta este motivul interesului pentru problema unicității ecuației (93) (92, 84 de ex.)

b) Căutarea condițiilor de unicitate

Vom porni de la scrierea (92), sau (84) - pentru concizie și generalitate.

Ne punem deci întrebarea dacă este posibil ca ecuația

$$T\,F(v) + G\,v = B \quad (84)$$

să aibă două soluții, pentru un B oarecare.

Problema este evident similară injectivității. Să presupunem că ar exista două soluții v', v'' care să verifice 84:

$$T\,F(v') + G v' = B$$

$$T\,F(v'') + G v'' = B$$

$$\Rightarrow T\left(F(v') - F(v'')\right) + G(v' - v'') = \theta \qquad (95)$$

sau pe larg:

$$(96)\quad T\begin{pmatrix} f_1(v_1') - f_1(v_1'') \\ f_2(v_2') - f_2(v_2'') \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} v_1' - v_1'' \\ v_2' - v_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Ipoteza standard de strictă monotonie crescătoare</u>, ne va permite să facem unele modificări:

$$(97)\begin{cases} \dfrac{f_1(v_1') - f_1(v_1'')}{v_1' - v_1''} = d_1 > 0 \\[2ex] \dfrac{f_2(v_2') - f_2(v_2'')}{v_2' - v_2''} = d_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (98)\begin{cases} f_1(v_1') - f_1(v_1'') = d_1(v_1' - v_1'') \\[2ex] f_2(v_2') - f_2(v_2'') = d_2(v_2' - v_2'') \end{cases}$$

cu $d_1, d_2 > 0$.

care introduse în 96 duc la:

$$T\begin{pmatrix} d_1(v_1' - v_1'') \\ d_2(v_2' - v_2'') \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} v_1' - v_1'' \\ v_2' - v_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (99)$$

sau cu $\begin{pmatrix} v_1' - v_1'' \\ v_2' - v_2'' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = \tilde{v}$ (99')

$$T \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \tilde{v} + G\tilde{v} = 0$$ sau în final

$$\boxed{\left\{ T\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + G \right\} \tilde{v} = 0 \quad \text{cu } d_1, d_2 > 0} \qquad (100)$$

Acum vom observa că din relația (100) va rezulta $\tilde{v} = 0$ (deci $v' = v''$, deci injectivitate), dacă matricea

$M = T\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + G$ este nesingulară, căci rezultă

(100) este omogen. Deci o condiţie care ar fi suficientă pentru injectivitate ar fi ca:

$$(101)\quad \det\left\{T\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + G\right\} \neq 0 \qquad \forall\, d_1, d_2 > 0$$

Să mai obţinem o formă (standard), folosind ipoteza că $\alpha_r, \alpha_t \in (0,1)$, deci

$$(102)\quad \det T = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_r\alpha_t \neq 0$$

De fapt (102') $\boxed{\det T = \frac{1}{K}}$, cu $K > 1$

Există deci $T^{-1} = \frac{1}{\det T}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_r \\ \alpha_t & 1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1 & \alpha_r \\ \alpha_t & 1 \end{pmatrix}$ (103)

cu care dacă înmulţim ecuaţia (95), (101), şi chiar (84) obţinem

$$(84) \to \boxed{F(v) + T^{-1}Gv = T^{-1}B = B_1} \quad (104)$$

scrisă şi $\boxed{F(v) + Av = B_1}$ (105)

Aceasta este forma de care ne ocupăm standard. Relaţia 101, înmulţită cu $\det T^{-1}$ care există duce la

$$\boxed{\begin{gathered}\det\left\{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + T^{-1}G\right\} = \det\left\{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A\right\} \neq 0 \\ (106) \qquad\qquad (107) \\ \forall\, d_1, d_2 > 0\end{gathered}}$$

În rezumat am folosit ipotezele (subliniate în text)

- t_1, t_2 strict crescătoare
- $\alpha_r, \alpha_t \in (0,1)$

şi am dedus că ecuaţia (105) (care particular e-ecuația noastră (92) are maxim o soluție, oricare ar fi B (și deci la mai oricare ar fi Ec) dacă matricea A are proprietatea (107). O matrice cu o astfel de proprietate vom numi o matrice P_0 (v. cap IV, și Apl C din cap V).

c) Exemplu de verificare a condiției $A \in P_0$

Să încercăm să demonstrăm pentru cazul nostru că $A \in P_0$.

Avem

$$(108)\quad A = T^{-1}G = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha_r\alpha_t}}_{=k\ \text{(din 102')}}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_r \\ \alpha_t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix}$$

Și se încearcă ~~deci să proi~~ evaluarea determinantului de control

$$\Delta = \det\left\{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A\right\} =$$

$$(109)\quad = \det\left\{\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} G_3-\alpha_r G_3 & -G_3+\alpha_r(G_1+G_2+G_3) \\ \alpha_t G_3 - G_3 & -\alpha_t G_3 + G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \det\begin{pmatrix} d_1 + kG_3(1-\alpha_r) & k\left[G_3(\alpha_r-1)+\alpha_r(G_1+G_2)\right] \\ kG_3(\alpha_t-1) & d_2 + k\left[G_3(1-\alpha_t)+G_1+G_2 \cancel{+G_3}\right] \end{pmatrix}$$

$$= \overbrace{d_1 d_2}^{A} + k^2 \cancel{G_3(1-\alpha_r)}(1-\alpha_t) + \overbrace{k^2 G_3(1-\alpha_r)(G_1+G_2)}^{B}$$

$$+ \overbrace{k d_1\left[G_3(1-\alpha_t)+G_1+G_2\right]}^{C} + \overbrace{d_2 G_3(1-\alpha_r)}^{D}$$

$$\cancel{\mp k^2 G_3(\alpha_r-1)}(\alpha_t-1) + \overbrace{k^2 G_3(1-\alpha_t)\alpha_r(G_1+G_2)}^{E}$$

Se observă acum imediat, că dacă

$$\boxed{\left.\begin{matrix} d_1>0 \\ d_2>0 \end{matrix}\right)\ G_1, G_2, G_3 \geq 0,\quad 0 \leq \alpha_r, \alpha_t \leq 1} \qquad (110)$$

$$\Delta = A+B+C+D+E > 0 \qquad (111)$$

cu aceasta demonstrația este terminată, căci $\Delta > 0$, $\forall (\forall d_1, d_2 \geq 0)$ înseamnă tocmai că $A = T^{-1} G \in P_0$.

Mai direct, am arătat relația (107), care ne asigură unicitatea, în următoarele condiții:

$\boxed{\text{Concluzia 1}}$
(de unicitate)

1) t_1, t_2 strict crescătoare
2) $G_1, G_2, G_3 \geq 0$ oarecare ($G_k = 0$ înseamnă că elementul ar putea chiar lipsi!)
3) $\alpha_r, \alpha_t \in (0,1)$.

Acestea sunt ipotezele necesare garantării rezultatului (unicitatea). Este un prim exemplu de rezultat A.C.F și vom reveni cu detalii.

Deocamdată, să mai încercăm o alternativă de demonstrație a faptului că $A \in P_0$. Facem aceasta pentru că sugerează originea (și esența) caracterizării lui P_0, prin următoarea proprietate (care va fi generalizată în cap IV și va sta la baza metodei de analiză pe calculator a condiției $A \in P_0$ din Aplicația C)

În fond, Δ calculat mai sus este o polinomială în $d_1, \dots d_n$ (la noi d_1, d_2) și avem interes ca această polinomială să fie > 0, $\forall d_1 \dots d_n > 0$.

Se arată ușor că această condiție e asigurată dacă toți coeficienții polinomului sînt pozitivi. Dar, acești coeficienți sînt formați din elemente din A. Se poate arăta că ei sînt tocmai minorii principali ai lui A (minori obținuți prin selectarea a k linii și acelorași k-coloane). Să vedem acest lucru pentru cazul nostru:

$$\det\left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A\right] = \det\left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{bmatrix} d_1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & d_2 + a_{22} \end{bmatrix} \quad (112)$$

Vom folosi dezvoltarea determinantului prin „despicarea" coloanelor:

$$\det\begin{vmatrix} d_1 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & d_2 + a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ 0 & d_2 + a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & d_2 + a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= d_1 d_2 + d_1 a_{22} + d_2 a_{11} + \det A. \quad (113)$$

Dar, coeficienții polinomului sînt tocmai minorii principali: $|a_{11}|$ (linia și col 1)

$|a_{22}|$ (linia și col 2)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (liniile și col. 1 și 2)

și nu rămîne decît să verificăm că aceștia sînt pozitivi (vezi expresia lui A din rel. 108), fapt foarte simplu q.e.d.

d) Rezultate de neunicitate

Am arătat mai sus că, dacă $A \in P_0$, ecuația are cel mult o soluție. Ne punem întrebarea: să fie oare această condiție și necesară? Astfel spus, e oare valabilă și afirmația: „$A \notin P_0 \Rightarrow$ există cazuri de neunicitate pentru unii B"

În general nu, dar dacă impunem funcțiilor f_1, f_2, (până acum restrânse doar de strict mon. cresc.) condițiile suplimentare (ipoteze):

1) f_1, f_2 continue (de fapt inclusă în 2), dacă pentru a fi subliniată)

2) $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$ (v. pag 56, în care s-a arătat printre altele că modelele standard exponențiale aparțin clasei $\mathcal{E}$)

sau reluând rel (7):

$$\begin{cases} \inf\{f(\alpha+\beta) - f(\alpha) : -\infty < \alpha < \infty\} = 0 \\ \sup\{f(\alpha+\beta) - f(\alpha) : -\infty < \alpha < \infty\} = \infty \end{cases} \quad (7)$$

$\forall \beta > 0$

Mai mult ne propunem să arătăm că există unii B pentru care cele două soluții pot fi la orice distanță. Deci

$\boxed{\text{Propoziția (Concluzia) } 2}$ (de neunicitate)

- dacă $F \in \mathcal{E}^2$ (adică $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$)
- $A \notin P_0$

Atunci ecuația $F(x) + Ax = B$ are două soluții x, y, la orice distanță σ, pt anumiți B:

$$\begin{cases} F(x) + Ax = B \\ F(y) + Ay = B \\ \|x - y\| = \sigma > 0 \end{cases} \qquad (114)$$

(Este un caz particular al T 11, cap IV C :

<u>Demonstrație</u> (rafinare a unei dem. din [art 13])

<u>Dacă $A \notin P_0$</u>, există $d_1, d_2 > 0$ a.î. $\det\left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A\right] = 0$ (115)

(v. rel 107)

Aceasta înseamnă că sistemul omogen

$$\left[\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A\right] \cdot x = 0 \qquad (116)$$

are soluții diferite de cea identic nulă. Există deci o soluție x_0 și cum prin înmulțirea cu k constant, sistemul 116 nu se schimbă, putem alege ~~aceste~~ acea soluție kx_0, care să aibă norma σ, adică (euclidiană)

$$x_\sigma = kx_0 \quad \text{a.î.} \quad \|x_\sigma\| = \|kx_0\| = k\|x_0\| = \sigma$$

(de exemplu alegem $k = \frac{\sigma}{\|x_0\|}$ lucru posibil căci $\|x_0\| \neq 0$ pt $x_0 \neq \theta$ - vezi propr. normei)

Să ne referim deci la această <u>soluție</u>

(117) $x_\sigma = \begin{pmatrix} x_{\sigma 1} \\ x_{\sigma 2} \end{pmatrix}$ cu $\|x_\sigma\| = \sigma$

Vom folosi acum ipoteza că <u>$F \in \Sigma^2$</u>, adică îndeplinerea relațiilor (7), de către ambele funcții f_1, f_2.

Voi presupune două cazuri

1) $x\sigma_1 > 0$ Atunci putem alege

$$\alpha+\beta \to x_1 \quad , \quad \alpha \to x_1 - x\sigma_1 \qquad (\beta = x\sigma_1 > 0)$$

și relațiile (7) devin

$$(118)\begin{cases} \inf\{ (f_1(x_1) - f_1(x_1 - x\sigma_1)), \ -\infty < x_1 < \infty \} = 0 \\ \sup\{ f_1(x_1) - f_1(x_1 - x\sigma_1), \ -\infty < x_1 < \infty \} = \infty \end{cases}$$

(deoarece că $x_1 - \sigma_1$ variază la fel cu x_1, căci σ_1 e o constantă)

Aceasta înseamnă însă că $f_1(x_1) - f_1(x_1 - x\sigma_1)$ ia orice valoare pozitivă, datorită continuității lui f_1. Deci în particular pentru un $\bar{x}_1$ va lua valoarea $x\sigma_1 \cdot d_1 > 0$:

$$(119) \quad f_1(\bar{x}_1) - f_1(\bar{x}_1 - x\sigma_1) = x\sigma_1 \cdot d_1$$

2) $x\sigma_1 < 0$ Atunci vom alege

$$\alpha+\beta \to x_1 - x\sigma_1 \quad , \quad \alpha \to x_1 \qquad (\beta = -x\sigma_1 > 0)$$

și obținem:

$$(118')\begin{cases} \inf\{ (f_1(x_1 - x\sigma_1) - f_1(x_1)), \ -\infty \le x_1 \le \infty \} = 0 \\ \sup\{ f_1(x_1 - x\sigma_1) - f_1(x_1), \ -\infty \le x_1 \le \infty \} = \infty \end{cases}$$

Și raționând ca mai sus, există $\bar{x}_1$ ai:

$$f_1(\bar{x}_1 - x\sigma_1) - f(\bar{x}_1) = -x\sigma_1 \cdot d_1 > 0 \qquad (x\sigma_1 < 0)$$

sau

$$(119)' \quad f_1(\bar{x}_1) - f_1(\bar{x}_1 - x\sigma_1) = x\sigma_1 \cdot d_1 .$$

Am arătat deci că, în ambele cazuri posibile, există un $\bar{x}_1$ a.î. :

(120') $f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_1 - x\sigma_1) = x\sigma_1 \cdot d_1$

Cu totul analog stabilim existența unui $\bar{x}_2$ a.î.

(120'') $f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_2 - x\sigma_2) = x\sigma_2 \cdot d_2$.

Ne oprim asupra vectorului $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ găsit ca mai sus. și calculăm pentru el:

$$F(\bar{x}) + A\bar{x} = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1) \\ f_2(\bar{x}_2) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \bar{B} \qquad (121)$$

Pe de altă parte:

$$F(\bar{x} - x\sigma) + A(\bar{x} - x\sigma) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_1 - x\sigma_1) \\ f_2(\bar{x}_2 - x\sigma_2) \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x\sigma_1 \\ \bar{x}_2 - x\sigma_2 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{(120)}{=} \begin{pmatrix} f(\bar{x}_1) - x\sigma_1 \cdot d_1 \\ f(\bar{x}_2) - x\sigma_2 \cdot d_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \bar{x}_1 - x\sigma_1 \\ \bar{x}_2 - x\sigma_2 \end{pmatrix} \overset{(121)}{=} \bar{B} - \begin{pmatrix} x\sigma_1 \cdot d_1 \\ x\sigma_2 \cdot d_2 \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} x\sigma_1 \\ x\sigma_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{B} - \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\sigma_1 \\ x\sigma_2 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} x\sigma_1 \\ x\sigma_2 \end{pmatrix} = \bar{B} - \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} + A \right\} \begin{pmatrix} x\sigma_1 \\ x\sigma_2 \end{pmatrix} \overset{(118)}{=} \bar{B}$$

Iată deci că pentru $\bar{B}$ oferit de relația (121) am găsit <u>2 vectori</u> $\left\langle \begin{matrix} \bar{x} = x \\ \bar{x} - x\sigma = y \end{matrix} \right.$ care verifică relația:

$$F(x) + A x = \bar{B}$$

Mai mult

$$\| x - y \| = \| x\sigma \| = \sigma \qquad (\text{v. rel. } 117).$$

Cu aceasta <u>demonstrația</u> este încheiată

.________.

Observații

Teorema mai sus demonstrată, arată în ce măsură este importantă clasa P_0 în analiza circuitelor cu tranzistoare. Se va arăta că această clasă are implicații nu numai în ceea ce privește unicitatea ci și existența soluțiilor (v. teoremele din cap IV). Totuși să nu trecem cu vederea faptul că prop. 2 nu se poate asigura de testabilitate din cel puțin două motive:

1) Punctele soluție ale ecuației nu sînt neapărat puncte de realizabilitate.

2) Se asigură existența soluțiilor pentru un anumit B, aci practic nu putem garanta că acest B poate fi atins de către sursa. Acest aspect iese însă din cadrul modelului dat și va fi discutat cu altă ocazie.

În schimb, pentru rezultatele de unicitate putem trage următoarele

e) Concluzii. Observații finale

(1) O primă observație vine în sprijinul afirmațiilor făcute cu alte ocazii (v. de ex. I B 3 pag 11) și anume că varianta „A.C.F - globală" poate oferi o mai mare posibilitate pentru utilizator de a se adapta unei situații concrete.

Astfel, cel care a urmărit atent mersul demonstrațiilor precedente, a putut sesiza că, anumite ipoteze sînt suficiente, dar nu necesare pentru a garanta valabilitatea concluziilor.

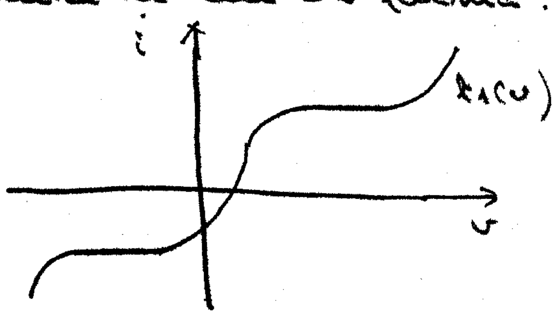
De exemplu, din forma obținută pentru Δ (rel 111 pag 127) s-ar putea obține unele alternative ale concluziei 1

$\Delta = A + B + C + D + E > 0$ este condiția de unicitate, (în urma rel. 107).

Ea poate fi asigurată însă și prin setul de condiții $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, $B + E > 0 \iff G_3(G_1+G_2)k^2(1-\cancel{\alpha_f}+\cancel{\alpha_r}-\alpha_r\alpha_f k) > 0$ (vezi rel 109), de unde:

$\boxed{\text{Concluzia } 1'}$: Dacă f_1, f_2 sunt nedescrescătoare, $\alpha_r, \alpha_f \in (0,1)$, $G_3 > 0$, $G_1 + G_2 > 0$, atunci ecuația (#2) are o soluție unică

Astfel, printre funcțiile f_1, f_2 admise au fost incluse și cele de forma:



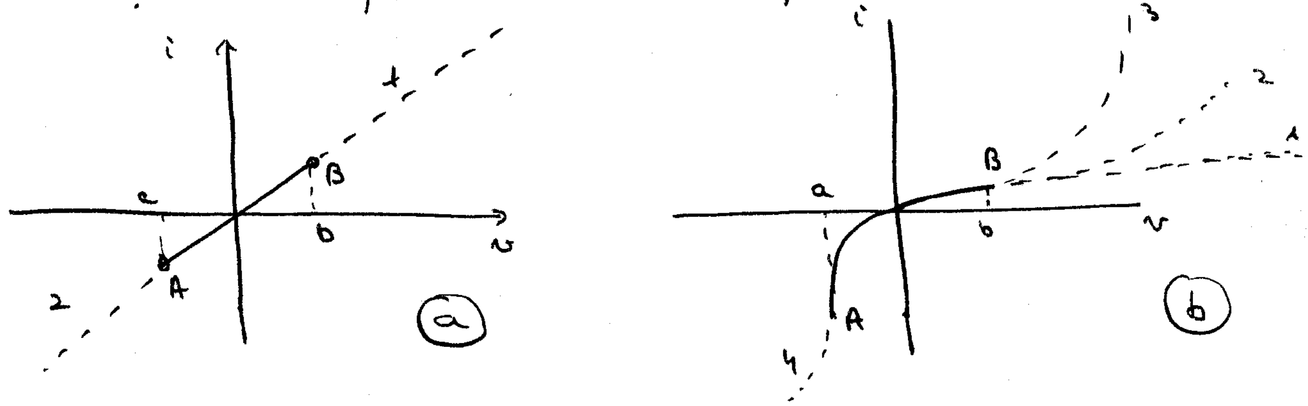
— fig 35 —

Utilizatorul mai poate stabili și alte asemenea concluzii, dacă stăpînește maniera demonstrației!

(2) Fără a intra în detalii, concluziile 1 și 1' sînt spre exemplu, pentru promisa proprietate de relativă independență a rezultatelor de unii factori, cu condiția îndeplinirii ~~condi~~ calibrărilor cerute.

(3) Un aspect la care am promis că voi reveni este acela a cazului în care funcțiile nu sunt definite pe întreaga axă reală (fie că e vorba de rezistențele liniare, sau de caract. tranzistorului)

Procedeul prin care voi depăși acest inconvenient îl voi numi „prelungire" (detalii în [0]). În mare el este redat în figura 36, fie că este vorba de o rezistență liniară (a), sau neliniară (b):



– fig 36 – : „Prelungirea" funcțiilor.

Vom face prelungirea funcției în afara domeniului ei mărginit de definiție (impus de anumite cerințe practice: distorsiuni etc) în așa fel încât să nu alterăm calitatea funcției cerute de o anumită teoremă. Sunt mai des folosite în fig 36 b prelungirile

- saturate (curba 1): funcția e mărginită la ∞ („dioda mărginită")
- nesaturate (curba 2, 3) – pantă oricât de mică dar pozitivă.

Desigur că teoremele de existență vor fi afectate de aceste „prelungiri". Va trebui să verificăm de fiecare dată, pe lîngă existența soluției, <u>că ea se află în intervalele inițiale de definiție la toate funcțiile f_k</u> („verificarea de coincidență"). Pentru aceasta, de un mare interes se vor arăta problemele punctului § 6 din par E: „Marginile soluțiilor".

În schimb, pentru teoremele de unicitate, este evident că dacă „ecuația prelungită" (de care se ocupă teoremele" are o soluție unică, aceasta rămîne valabil și pentru porțiunea mărginită, de definiție. Mai clar: nicăieri în paginile precedente nu am avut nevoie de definirea lui f de la $-\infty$ la ∞. Rezultatele de unicitate nu vor putea avea decît următoarele variante:

4 $\boxed{\text{Sinteză}}$

Sunt posibile doar posibilitățile:

1) Concluziile sînt valabile și există cel mult o soluție
2) Nu este respectată măcar una din ipotezele de calitate (t_1, t_2 crescătoare strict, $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$)
3) Funcționarea iese din cadrul procesului de definire a funcțiilor

În acest ultim caz, ecuațiile nu vor corespunde realității și ori se revine asupra modelului, ori dacă o recrea nu este posibil, datorită unor fenomene „interne" (cădere etc) aceste fenomene se produc.

⑤ Legătura cu funcția inversă

Odată demonstrată injectivitatea funcției, putem aplica teorema de invarianță a domeniului T5 (pag 97 par C 7) vedem, dacă $\tilde{F}$ este și continuă (la noi $\boxed{\tilde{\sigma} = T F(v) + G v}$ (122) deci condiția echivalentă este ca f_1 și f_2 să fie continui) obținem rezultate interesante privind funcția inversă $f^{-1} : f(R) \to R$. Independent aceasta teoremă ne asigură că această inversă e continuă.

④ Probleme de existență și unicitate

În lume, de cele mai multe ori am vrea să știm dacă ecuația (93) (92, 84) are o soluție, unică. Ar fi suficient, în acest sens să arătăm că $\tilde{\sigma} : R^2 \to R^2$, dat de 122 este o bijecție. Dacă vrem să arătăm ex. și unic. pentru $\forall B$, atunci bijectivitatea va fi și necesară. Am putea merge pe mai multe căi:

a) Demonstrarea injectivității și a surjectivității

Metodă evidentă și generală, care însă poate duce la eforturi mari (dezavantajos insurmontabile în R^n). De ex. pentru circuitul de probă (fig 22) am arătat injectivitatea la par 3, dar la par 2 ne-am eschivat de la demonstrarea surjectivității, pe care am amânat-o ca „dificilă". Mai simplu este să folosim:

b) Particularizarea unor rezultate generale.

Este o metodă extrem de rapidă. (Se profită de eforturi gata făcute). Folosind de exemplu teoreme din cap IV - c obținem:

Concluzia 3 : Ecuația (32) are o soluție, unică, oricare ar fi $B \in R^2$ (sau $E_c \in R$), dacă:

— f_1, f_2 sînt strict crescătoare și continui

— $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1)$

— $G_1 + G_2, G_3 \geq 0$ $(G_1, G_2 \geq 0)$

Condiții desigur suficient de largi!

Pentru a obține concluzia, am verificat ipotezele teoremei 5 (cap IV c):

— $A \in P_0$ (am mai verificat-o deja)

— $\det G \neq 0$, care ne reiese imediat din

$$\det G = \det \begin{pmatrix} G_3 & G_3 \\ -G_3 & G_1 + G_2 + G_3 \end{pmatrix} = G_3 (G_1 + G_2)$$

Deci se impune $G_3 > 0$, $G_1 + G_2 > 0$

c) Folosirea unor teoreme din paragraful C 7

Aplicări ca cele ce urmează să justifice prezența capitolului C, mai ales a teoremelor de inversiune globală. Trebuie menționat printre altele și faptul că multe din rezultatele generale date la IV C, pot fi obținute prin utilizarea patrimitei situații a teoremelor 5 → 9 de la pag 97 (III C 7). Ele pot oferi în multe situații concrete ieșire, chiar atunci când teoremele IV C nu sînt aplicabile.

Ne ~~vom~~ putem ocupa de oricare din formele obținute în exemplul nostru (69, 71, 73, 92), în rezumat:

$$\tilde{\mathcal{F}} : R^K \to R^K \qquad \tilde{\mathcal{F}}(x) = a.$$

De exemplu să luăm

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{F}}_1(v_1, v_2) = t_1(v_1) - \alpha_r t_2(v_2) + G_3 v_1 - G_3 v_2 = -G_3 E_c \\ \tilde{\mathcal{F}}_2(v_1, v_2) = -\alpha_f t_1(v_1) + t_2(v_2) - G_3 v_1 + (G_1 + G_2 + G_3) v_2 = (G_2 + G_3) E_c \end{cases} \qquad (123)$$

cu $\tilde{\mathcal{F}} : R^2 \to R^2 \qquad \tilde{\mathcal{F}}(v) = b$

Aplicarea teoremei 6 (singura necesară și suficientă)

Ar trebui să arătăm că:

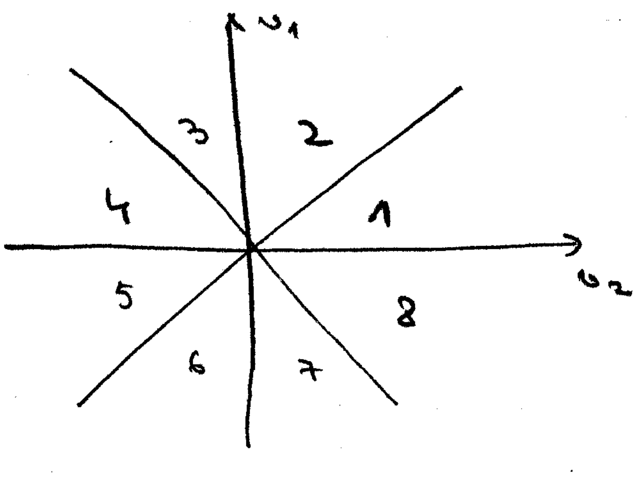
1) $\tilde{\mathcal{F}}$ e un homeomorfism local

2) $\lim_{\|x\| \to \infty} \|\tilde{\mathcal{F}}(x)\| = \infty$

Primul punct se va fi urmat de faptul că am demonstrat injectivitatea. Deci, <u>dacă f_1, f_2 sînt continue</u>, din T 5 obținem (v. Obs 5 pag 138) că $\tilde{F}$ e un homeomorfism local.

Al 2-lea punct însă este dificil de demonstrat. Într-un fel, dificultățile care se ridică sînt analoage celor din cadrul surjectivității (de altfel, dacă arătăm 2), rezultă concluzia de existență și unicitate și prin urmare surjectivitatea). Vom folosi deci acest prilej pentru a ilustra că într-adevăr, surjectivitatea (sau 2)) ridică probleme dificile.

Să presupunem așadar că $\|x\| \to \infty$. (124) Ce putem spune despre x în această situație? Chiar pentru cazul bidimensional, figura de mai jos încearcă să ilustreze multitudinea posibilităților pe care le au cele două coordonate, pentru ca $\|x\| \to \infty$!



— fig 37 —
„zone" în care e posibil ca $\|v\| \to \infty$

1: $v_1 \to \infty$, $v_2 \geq 0$
2: $v_2 \to \infty$, $v_1 \geq 0$
3: $v_2 \to \infty$, $v_1 \leq 0$
4: $v_1 \to -\infty$ $v_2 \geq 0$
5: $v_1 \to -\infty$ $v_2 \leq 0$
6: $v_2 \to -\infty$ $v_1 \leq 0$
7: $v_2 \to -\infty$ $v_1 \geq 0$
8: $v_1 \to \infty$ $v_2 \leq 0$

Şi desigur trebuie adăugate drumurile prin mai multe „zone".

Astfel încît, numai în zona 1 dacă ne restrîngem

(125)

vom avea necazuri la calculul lui $\lim\limits_{\|v\|\to\infty} \| \tilde{F}_1(v_1,v_2) \|$. Observînd că la mai, în zona 1, $f_1(v_1)$ şi $f_2(v_2)$ sînt mărginite în cazul standard (v fig 10 pag 59 - cazul bal dioda np) rămîne să calculăm:

(125)' $\lim\limits_{\substack{v_1\to\infty \\ v_2>0}} \| G_3(v_1-v_2) \|$ cu evidente complicaţii (de exemplu în jurul dreptei $v_1 = v_2$)

Nu voi continua această discuţie. Am dorit doar să evidenţiez dificultăţile pe care le întîmpină astfel de încercări

Aplicarea teoremei 7

Dacă suplimentăm condiţiile cu

(126) $\tilde{F} \in C^1$, ceea ce e satisfăcut uşor de modelarea standard, vom putea renunţa ~~la~~ parţial pentru a ajunge la injectivitate, dacă homeomorfismul local ar rezulta din condiţia:

(127) $\det J_{\tilde{F}} = \det \begin{pmatrix} \partial\tilde{F}_1/\partial v_1 & \partial\tilde{F}_1/\partial v_2 \\ \partial\tilde{F}_2/\partial v_1 & \partial\tilde{F}_2/\partial v_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall v_1, v_2$

Dacă însă înlocuim $\tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2$ cu expresiile lor (122) se ajunge la :

$$\det J_F = \begin{pmatrix} f_1'|_{v_1} + G_3 & -\alpha_r f_2'|_{v_2} - G_3 \\ -\alpha_t f_1'|_{v_1} - G_3 & f_2'|_{v_2} + G_1 + G_2 + G_3 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{(128)}{=\det} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1'|_{v_1} & 0 \\ 0 & f_2'|_{v_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix} \right\} \neq 0$$

Cred că este evident că această relație este total analogă relației (101). Dacă f_1, f_2 sunt strict crescătoare și derivabile : $f_1'|_{v_1} = d_1 > 0$, $f_2'|_{v_2} = d_2 > 0$ sunt exact aceiași care apăreau în condiția de injectivitate.

S-a obținut deci condiția 107 direct, dar să remarcăm că și eforturile particulare de la pag 126 care au avut rost, căci ele au scos în evidență posibilitatea renunțării la condițiile 126.

În ceea ce privește condiția a 2-a, din nou $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\|$, să remarcăm și forma din Corolarul 6 (pag 97) : „preimaginea unei mulțimi mărginite este o mulțime mărginită". Așa încât, unele demonstrații bazate pe T 6-7 se încadrează către efortul de a găsi, pentru o mulțime dată oarecare în care se găsește vectorul B („intrarea") : H, o zonă corespunzătoare mărginită U, în care se vor găsi sigur soluțiile v

(„ieșirea") Aceasta va crește suplimentar interesul pentru problematica par. 5, căci obținerea unei relații: „intrare mărginită - ieșire mărginită" va antrena în același timp concluzia 2) și eventual ca-rea a homeomorfismului global (cum va fi cazul problemei noastre - la care 2) și deci existența unei soluții, unice va rezulta în urma dem. făcute în par. 5.

<u>Aplicarea teoremei 9</u>

Singura teoremă de inversiune globală, care nu cere verificarea condiției la limită este T 9. Ne așteptăm deci ca ea să ne ofere oarecari facilități. Într-adevăr, cu ajutorul ei vom demonstra concluzia dorită pentru exemplul de probă.

Trebuie însă pentru a fi verificate ipotezele să cerem ca $\boxed{\hat{f} \in C^1}$ (126') deci ca $t_1(v_1), t_2(v_2)$ să fie derivabile, cu derivata continuă.

Scriem din nou pe

$$J_t = \begin{pmatrix} \partial \hat{f}_1/\partial v_1 & \partial \hat{f}_1/\partial v_2 \\ \partial \hat{f}_2/\partial v_1 & \partial \hat{f}_2/\partial v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1'|_{v_1} + G_3 & -\alpha_t t_2'|_{v_2} - G_3 \\ -\alpha_t t_1'|_{v_1} - G_3 & t_2'|_{v_2} + G_1 + G_2 + G_3 \end{pmatrix} \quad (129)$$

(rezultă din scrierea (123))

Pentru a verifica „condiția de înlănțuire" (63):

trebuie să verificăm că:

$$|\det J_1| \geq \varepsilon \qquad \left|\frac{\det J_2}{\det J_1}\right| \geq \varepsilon \qquad (L) \qquad (130)$$

pentru un $\varepsilon > 0$.

unde

$$|J_1| = \left| t_1'|_{v_1} + G_3 \right| \qquad (131)$$

$$|J_2| = \begin{vmatrix} t_1'|_{v_1} + G_3 & -\alpha_2 t_2'|_{v_2} - G_3 \\ -\alpha_1 t_1'|_{v_1} - G_3 & t_2'|_{v_2} + G_1 + G_2 + G_3 \end{vmatrix} \qquad (132)$$

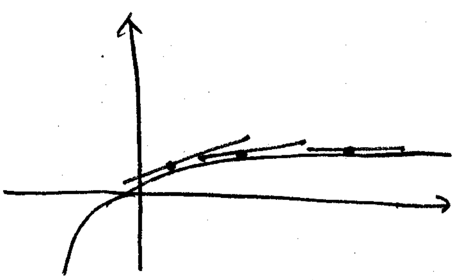
1) Să vedem de la început că:

$$\left| t_1'|_{v_1} + G_3 \right| \geq \varepsilon \quad \forall v_1 \qquad (133)$$

Este suficient să garantăm $t_1'|_{v_1} \geq 0$, $G_3 > 0$, (133')

În continuare vom nota $t_1'|_{v_1} = d_1$ $t_2'|_{v_2} = d_2$

$\boxed{\text{Observație}}$ Dacă am fi permis ca $G_3 = 0$, relația (133) nu ar fi fost asigurată, căci, pentru modelul standard al transp. din figură, deși $t'|_v$ este $> 0, \forall v$, el poate să se apropie oricât de mult de 0. Nu există deci un $\varepsilon > 0$, în relația 133



- fig 38 -

Cu $G_3 > 0$ (ct), $t_1' > 0$ este suficientă, dacă îl vom alege pe $\boxed{\varepsilon \leq G_3}$ (133'')

2) Să trecem la condiția

$$\left|\frac{\det J_2}{\det J_1}\right| \geq \varepsilon \qquad \text{sau}$$

$|\det J_2| \geq \varepsilon \, |\det J_1|$ sau

$|\det J_2| \geq \varepsilon \, (d_1 + G_3)$ sau

$$d_1 d_2 (1 - \alpha_r \alpha_t) + G_3 (G_1 + G_2) + d_1 (G_1 + G_2 + (1-\alpha_t) G_3) + d_2 G_3 (1-\alpha_r) \geq \varepsilon \, (d_1 + G_3) \qquad (134)$$

Avem mai multe posibilități de a satisface (134)

De exemplu, dacă: ($\boxed{\text{Concluzia 4}}$)

$$\begin{cases} d_1 > 0, \ d_2 > 0 \ \text{(funcțiile strict crescătoare)} \\ \alpha_r \alpha_t \in (0,1) \qquad - \ \tilde{F} \in C^1 \\ G_1, G_2, G_3 \geq 0 \end{cases}$$

și deci rezultă existența și unicitatea

atunci este ~~deci~~ întotdeauna posibil să alegem un $\varepsilon > 0$ în relația 134, căci de exemplu:

$d_1 (G_1 + G_2 + (1-\alpha_t) G_3) \geq \varepsilon \, d_1$

dacă $\varepsilon \leq (G_1 + G_2) + (1-\alpha_t) G_3$ (135')

$G_3 (G_1 + G_2) \geq \varepsilon \, G_3$ dacă $\varepsilon \leq G_1 + G_2$ (135'')

$d_1 d_2 (1 - \alpha_r \alpha_t) \geq 0$

$d_2 G_3 (1 - \alpha_r) \geq 0$ prin adunare:

$\det J_2 \geq \varepsilon \, (d_1 + G_3)$

dacă $\begin{cases} \varepsilon \leq G_3 (1-\alpha_r) + G_1 + G_2 \\ \varepsilon \leq (G_1 + G_2) \end{cases}$ (135')

$\det J_1 \geq \varepsilon$

dacă $\{ \varepsilon \leq G_3$. (133')

Toate condițiile vor fi îndeplinite pentru $\boxed{\varepsilon \leq \min\{G_3, G_1 + G_2\}}$ (135) q.e.d.

(d) Ca o consecință a rezultatelor de convergență

Fiecare teoremă de convergență va implica existența și unicitatea soluției (detalii la par. F)

(e) Metode directe

Trebuie subliniat faptul că nu este în general necesar să aplicăm o teoremă pentru a arăta că o ecuație are o soluție unică. Pot fi cazuri în care condițiile teoremelor să nu fie îndeplinite și totuși să existe bijectivitate.

În unele cazuri simple, însăși găsirea inversei va fi posibilă. Un exemplu:

$$\hat{f}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x_1+x_2)^{1/3}\\(x_1+x_2)^5+x_3\\(2x_1+x_2+x_3)^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \qquad (135)$$

Pe care o putem rezolva ușor:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2 = y_1^3\\ (x_1+x_2)^5+x_3 = y_2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_3 = y_2 - y_1^{15}} \qquad a)$$

$$(x_1+x_2+x_3) = y_3^{1/3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1+x_2 = y_3^{1/3} - y_2 + y_1^{15}\\ x_1+x_2 = y_1^3\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = y_3^{1/3} + y_1^{15} - y_1^3 - y_2} \qquad b) \qquad (136)$$

Deci $\boxed{x_2 = y_1^3 - x_1 = 2y_1^3 + y_2 - y_1^{15} - y_3^{1/3}}$ c)

Și (136) ne dă direct inversa. Din păcate însă nu trebuie să ne așteptăm la asemenea facilități în cazul circ. cu tranzistori (v. aspectul transcedental)

(5) Raportul dintre „intrare" și ieșire"

a) Prezentarea generală

Am văzut deja câteva motive care pot face a-tractivă problema interesantă:

(α) — (pag 144) vor reieși consecințe privind o condiție de limită din teorema lui Palais, de unde s-ar putea deduce o concluzie de existență și unicitate a soluției, atunci când

$\boxed{P_1}$: „intrarea mărginită (B), produce ieșire mărginită (x)" în ecuația

$$F(x) = B.$$

și pentru aceasta va reieși că inversa F^{-1} este continuă, ca și funcția dată; $x = F^{-1}(B)$ e continuă sau:

$\boxed{P_2}$: „~~intrarea~~ ieșirea depinde continuu de intrare"

Propozițiile P_1, P_2 sînt cele care ne vor interesa în problema raportului intrare - ieșire.

(β) — (pag 137) Dacă se vor obține limitele între care „joacă" ieșirea (x), atunci când intrarea (B) „joacă" într-un domeniu mărginit H, se va putea face „verificarea de coincidență" care să valideze rezultatele, pentru funcțiile cu domeniu mărginit (γ) – interesul în sine (practic) al problemei. O relației demonstrată de tipul P_1 sau P_2 ne poate asigura că nu ne putem aștepta la „salturi" ale ieșirii cînd intrarea variază continuu sau, că micile variații ale intrării nu pot avea repercursiuni „explozive" asupra ieșirii (v). Mai mult se pot obține chiar valorile ale marginilor în care „joacă" v, atunci cînd B (respectiv E_c la noi) se „plimbă" între niște limite date.

(δ) – vezi discuția de la pag 93

Toate aceste aspecte, reunite în expresia „relații intrare – ieșire" sînt urmărite de către analiști pe două căi:

b) <u>Metode directe (particulare)</u>

Demonstrarea propozițiilor P_1, P_2 pe fiecare caz particular, prin metode specifice cazului respectiv se dovedește în general dificilă.

Astfel demonstrațiile prop P_1, P_2 sînt deseori foarte laborioase (v. art[7, 10], [0]), dar ele prezintă și un mare avantaj (mai precis demonstrațiile constructive ale lui P_2), acela de a <u>oferi efectiv</u> procedeul prin care să determinăm aceste margini.

Vom vedea (par E.6) că de exemplu, pentru cazul nostru, dacă $\begin{cases} \alpha_1 \le b_1 \le \beta_1 \\ \alpha_2 \le b_2 \le \beta_2 \end{cases}$ (α_i, β_i dați) se va

da o metodă de a construi marginile ξ_1, ξ_2, v_1, v_2 aî

$$\begin{cases} \xi_1 \le u_1 \le v_1 \\ \xi_2 \le u_2 \le v_2 \end{cases}$$

c) Metode globale

Aceste metode nu ~~pot~~ vor oferi procedeul de construcție al marginilor, în schimb vor certifica existența lor (P_1), și deasemenea vor demonstra (P_2), atunci când putem demonstra o teoremă de inversiune globală (gen T5 – T9 pag 97) în scopul argumentării existenței și unicității soluțiilor ecuației, fără a mai face nici un efort suplimentar. Aceasta este avantajul tratării vectoriale (cap III c)

Exemple:

Dacă am putut aplica T5 – ~~dacă~~ deducem automat că $f^{-1}: f(R) \to R$ este continuă. (Deci injectivitatea va implica dependența continuă a lui x, de B, atunci când x există și f e continuă)

Dacă am putut aplica T6 – deducem automat propoziția P_2 (P_1 e în general echivalentă cu condiția la limită)

<u>Dacă am putut aplica T7</u> - deducția e analoagă celei precedente. În plus știm că $f^{-1} \in C^1$

<u>Dacă am putut aplica T8</u>

- știm în plus că $f^{-1} \in C^K$

<u>Dacă am putut aplica T9</u>

Deabia acum foloasele metodei globale vor fi mai evidente. Astfel, să observăm că în verificarea T9, condiția la limită nu a fost implicată. (drept urmare nici P_1). P_1 și P_2 vor ieși însă firesc din faptul că T6 (fundamentală) <u>este valabilă în ambele sensuri</u>. Deci T9 $\Rightarrow$ f e un homeomorfism global

$\Rightarrow$ (T6) $\nearrow$ P_1 - „intrare mărginită $\rightarrow$ ieșire mărg"
$\searrow$ P_2 : „ieșirea depinde continuu de intrare".

Putem deci „atașa" pur și simplu concluziei 4:

$\boxed{\text{Concluzia 5}}$ Dacă sunt îndeplinite condițiile

- $\alpha_f, \alpha_t \in (0,1]$
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$
- $k_1, k_2 \in C^1$ și $\frac{\partial k_1}{\partial v_1}, \frac{\partial k_2}{\partial v_2} > 0 \ \forall v_1, v_2$ avem pentru ecuația (§2):
  - intrarea mărginită E_c va produce o ieșire mărginită
  - v_1, v_2 (și o dată cu ele celelalte variabile) vor depinde continuu de E_c.