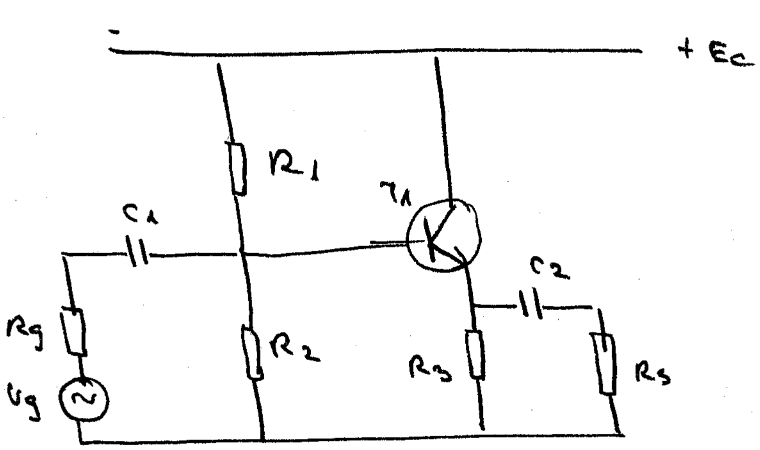
III Inițiere

A) Generalități

Analiza circuitelor electrice a cunoscut o neîncetată transformare și îmbogățire. Un aparat matematic tot mai dezvoltat a fost folosit în sprijinul acestei analize, aparat care pornește întotdeauna de la o modelare a circuitului real (fizic).

Vom presupune în continuare că, pornind de la un circuit real, această modelare a fost făcută. În acest sens, vom folosi și aici modelele clasice (vezi bibl.)

Să presupunem așadar că vrem să facem o analiză a circuitului ([B]):



— fig 1 —

(Repetorul pe emitor. Exemplu de circuit cu elemente neliniare)

În lucrările de specialitate (de ex [5] pag 16) se remarcă faptul că metodele clasice valabile pentru cazul circuitelor liniare nu mai pot fi în general folosite în aceste cazuri.

Cum vor fi depășite în mod clasic aceste dificultăți?

Se fac unele ipoteze, cum ar fi:

- aproximarea liniară a caracteristicilor pe porțiunile aflate în vecinătatea unor puncte statice de funcționare
- funcționare în regim de semnal sinusoidal (U_g)
- — " — mic ($|\Delta V_{BE}| \leq \frac{\varepsilon}{kT} = 0.25V$)
- diverse alte aproximări

La aceste prime aproximări se adaugă și altele privind însăși caracteristicile elementelor neliniare (regim mic de injecție, neglijarea efectelor de recombinare a efectului Early etc) se trece la analiză, lucrând în două etape:

(1) <u>Calculul punctului static</u> de funcționare (regim staționar). Aici se fac diverse aproximări „rezonabile" pentru a facilita găsirea rapidă a unor soluții aproximative.

Să mai menționăm și <u>observația standard</u> că o mai multă precizie nici nu are rost, dacă ținem cont de diverși factori perturbatori (împrăștierea tehnologică a caract., acțiunea temperaturii etc)

(2) <u>Calculul regimului dinamic</u> (sinusoidal de semnal mic) lucrat pe baza unor modele, valabile între niște limite foarte restrânse, așa cum am

mai specificat.

În sfîrşit, în cazul că regimul este „de semnal mare" se face un calcul exact (pe calculator) pornind de la anumite modele, aşa zise „de semnal mare", mai generale ca cele de semnal mic şi care între anumite limite rămîn valabile şi pentru variaţia anumitor factori. Imprecizia tehnologică reduce eficienţa acestei metode, mai exacte.

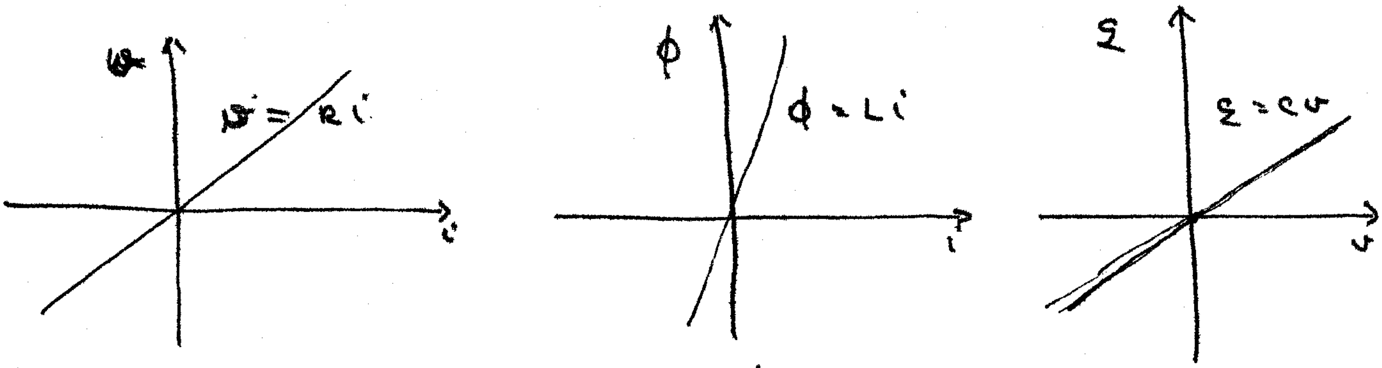
Pornind de la modele generale de semnal mare, ba mai mult, acordînd o libertate mult mai mare anumitor parametri, analiza calitativă fundamentală abordează problema într-un mod diferit.

Acest mod va rezulta în cele ce urmează:

B) Caracteristicile elementelor

1) Aspecte generale

Din toate lucrările de specialitate, putem trage concluzia că pentru caracteristicile elementelor liniare clasice (rezistențe, condensatoare, bobine) sunt posibile modele valabile în limitele destul de largi:



a) Caract. unui rezistor liniar

b) Caract. bobinei liniare

c) Caract. cond. liniar

(1) cu $v = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$ (1') $i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt}$

— fig 2 —

Chiar dacă în realitate o rezistență de exemplu nu va rezista de fapt la orice tensiune (curent), teoria clasică adoptă modelul definit pe întreaga axa reală: $(-\infty, \infty)$. Așa vom face și noi. Asupra efectelor acestei prime considerații, vom reveni cu altă ocazie.

Tehnologia fabricării acestor elemente este destul de bine pusă la punct încât să le

afere oarecum o plajă restrânsă de variație.
Totuși atunci când se trece la calcule trebuie urmărit efectul eventualelor derivări și aceasta se face, în proiectare prin acele σ-uri ce reflectă <u>dispersia</u>, specificate pentru fiecare element.

In plus să amintim efectul eventualelor perturbații asupra acestor elemente, efect de care se ține cont de obicei prin considerarea unor coeficienți de variație (de ex: α cu temperatura etc)

Practic deci, nu dispunem de caracteristica din fig 3a, ci de un „nor" sugerat în figura 3b

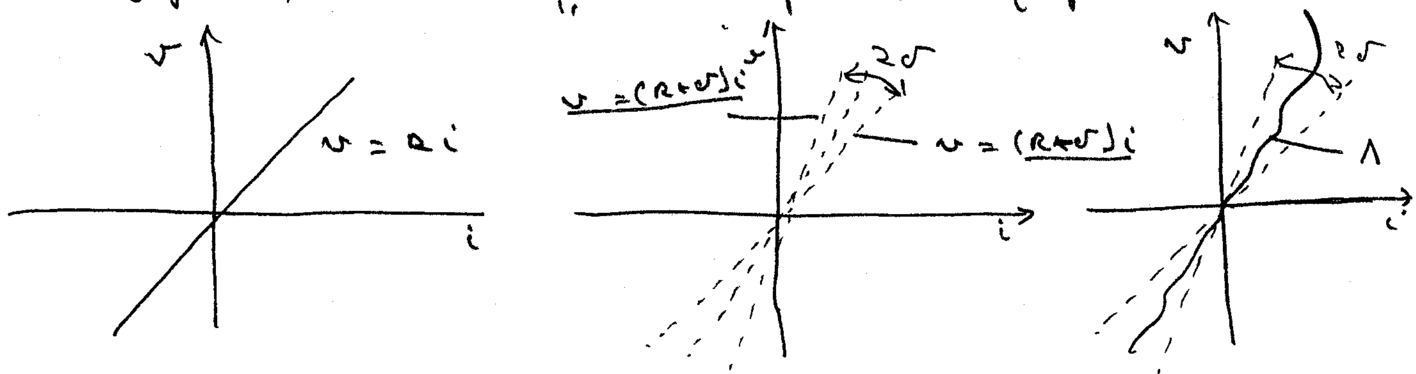


fig 3a (caract. ideală) — fig 3b (imprecizie tehnologică) — fig 3c (Efecte exterioare)

— fig 3 —

În figura 3c am reprezentat ideea că, pe parcursul desfășurării unei experiențe curba reală poate fi deviată de unii parametri exteriori (o variație a temperaturii mediului de exemplu) astfel încât locul punctelor (v, i) nu va mai fi o linie dreaptă. (Oricum, curba 1 nu reprezintă o „caracteristică statică", ea nu va mai fi întîlnită decît dacă expunem circuitul la aceeaşi dublă acţiune sincronă în timp : a părţii electrice proprii-zise şi a părţii exterioare)

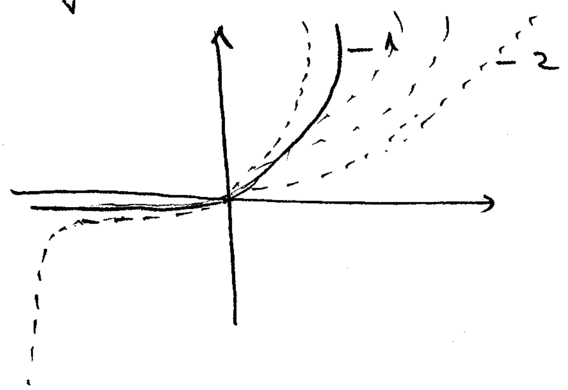
Efectele mai sus specificate nu au fost însă destul de supărătoare pentru a face inoperante calculele clasice de circuite liniare, valabile cu foarte bune aproximaţii. Din acest punct de vedere, elementele „neliniare" sînt mult mai „slabe". Astfel, în circuitele combinate va fi foarte rezonabil să presupunem şi noi că elementele liniare îşi păstrează forma şi valoarea. Totuşi vom vedea că multe din rezultate nu depind de această presupunere, necesitînd elementelor rezistive liniare doar să fie strict crescătoare şi surjective pe R.

Să trecem aşadar la circuite neliniare. Situaţia se schimbă esenţial : caracteristicile suferă o împrăştiere tehnologică şi o variaţie cu parametrii exteriori mult mai puternică (pînă la 300% !) Se spune cu această ocazie că preţul care trebuie plătit pentru posibilităţile deosebite a circuitelor cu tranzistori bipolari (<u>la care ne</u>

vom referi în continuare) constă tocmai în această puternică și neplăcută nedeterminare

Soluția la care se recurge atunci în mod obișnuit este proiectarea unor dispozitive astfel gândite, încât prin însăși concepția lor, să stabilizeze punctul de funcționare, în ciuda eventualelor variații (vezi de exemplu clasica rezistență de reacție negativă din emitor, etajele diferențiale integrate cu parametri împerecheați, folosirea reacției, care face ca soluția să depindă de dispozitivele liniare etc) Aceste modificări au însă întotdeauna și efecte negative, pe care automat trebuie să le acceptăm (de exemplu scăderea amplificării)

Procedeele folosite fac ca în figura de mai jos:



1 - caracteristica estimată
2 - caracteristica reală (una)

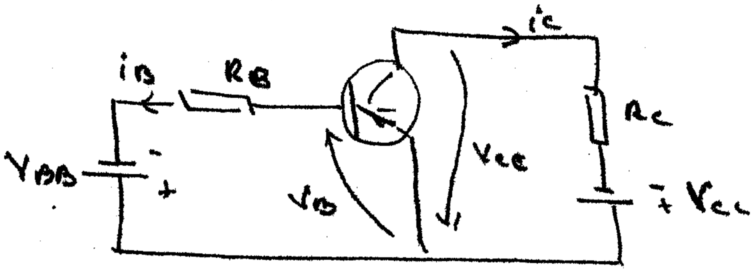
— fig 4 — (Element neliniar)

variația caracteristicii reale a dispozitivului neliniar să influențeze destul de puțin regimul global de funcționare a circuitului

Totuși remarcăm că:

- această „slabă dependență" este greu de urmărit, necesitând de fiecare dată raționamente ingenioase și fiind „particularizată" analiza ei în cazuri complexe.

- efectul unei eventuale greșeli în acest sens poate fi foarte puternic. Să luăm un exemplu clasic în acest sens:



— fig 5 —
Etaj cu emitorul comun

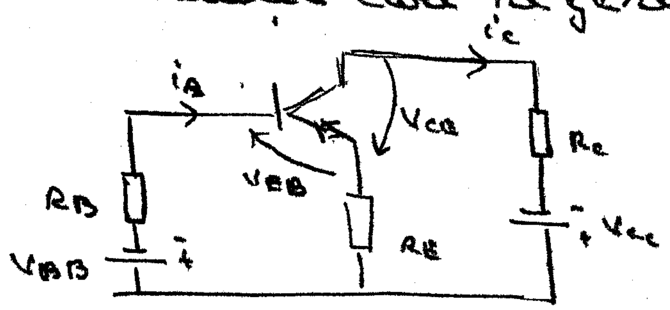
Acest etaj este practic nedeterminat, din cauza dispersiei caracteristicilor, care face ca intersecția lor cu dreapta de sarcină

(2) $i_B = \dfrac{V_{BB} - V_{EB}}{R_B}$

(2') $i_C = \beta_F \, i_B$ cu β_F foarte variabil

să fie mult prea variabilă.

Soluția care se găsește:



— fig 6 —
Introducerea rezistenței stabilizatoare

duce la

$$(3)\quad i_C = \beta_F i_B = \frac{\beta_F (V_{BB} - V_{EB})}{R_B + (\beta_F + 1)R_E}.$$

Relația arată evident stabilizarea lui i_C cu variația lui β_F. Practic pentru β_F mari:

$$(3')\quad i_C \approx \frac{V_{BB} - V_{EB}}{R_E} \sim ct$$ (nu depinde de elementul activ)

Aceasta a fost un caz simplu și artificiul a fost găsit. Ne întrebăm însă: ce ne facem în situații mai complicate?

- dacă ne înșelăm puternic asupra soluției?
- dacă nu găsim artificiul necesar?

Dar, întrebarea esențială la care aș dori să răspundem este una de obicei eludată: Nu cumva aproximările făcute sau imprecisiile inerente pot schimba caracterul calitativ al circuitului? (v. și TB2 pag 5)

Pe calea răspunsului la această întrebare calitativă (ca și la multe altele) va merge analiza pe care o vom face. De la început trebuie să specific că vom acorda circuitului un grad mult mai mare de libertate, căci nu ne va mai interesează caracteristica exactă a unui element, ci aspectul său calitativ, în termeni care vor fi de fie-care dată precizate. Astfel, ipoteza noastră fun-damentală este:

$\boxed{\text{ipoteza constanței}}$ — toate caracteristicile elemen-telor, chiar dacă variază (în timp, tehnologic etc) păstrează în această variație constanța unor cali-tăți, care vor fi menționate de fiecare dată (ipoteza constanței calitative i. C. C.)

— topologia circuitului rea ce propusă analizei (nu suferă modificări). Aceasta este ipoteza constanței topologiei (i. C. T).

Observație

Există de fapt o legătură între i.c.T și i.c.c căci apariția unei rezistențe între două noduri înainte nelegate (de exemplu) ar putea fi considera-tă o schimbare a caracteristicii dipolului din $i = 0$ (înainte) în $i = Gv$ (după modificare)

Totuși pentru claritatea ideilor vom folosi ambele ipoteze, explicit.

Pe baza ipotezelor constanței, vom stabili o seamă de teoreme calitative (existența so-luției, unicitatea ei etc). Metodele folosite

le-am numit „analiză calitativă fundamentată"
(pe scurt A.C.F.)

Ipotezele de constanță sînt în general validate de realitate (sînt deseori foarte largi). Totuși, dacă realitatea ne infirmă un rezultat pe care l-am dedus prin metoda A.C.F., trebuie să înțelegem de lucrare dată că ipotezele de calitate au fost încălcate, căci restul afirmațiilor din teorie sînt stabilite prin deducție și validitatea lor e indiscutabilă.

Să vedem mai departe ce fel de ipoteze vom face asupra elementelor de circuit.

2 Elemente liniare

Iată cîteva ipoteze, (tot mai largi)

i1 : Elementele liniare respectă strict fig 3a (practic ~~nu~~ vor fi ~~[illegible]~~ rareori atît de pretențioși)

i2 : Elementele liniare au o anumită libertate de joc (R liber să ia orice valoare), dar rămîn liniare (fig 3b)

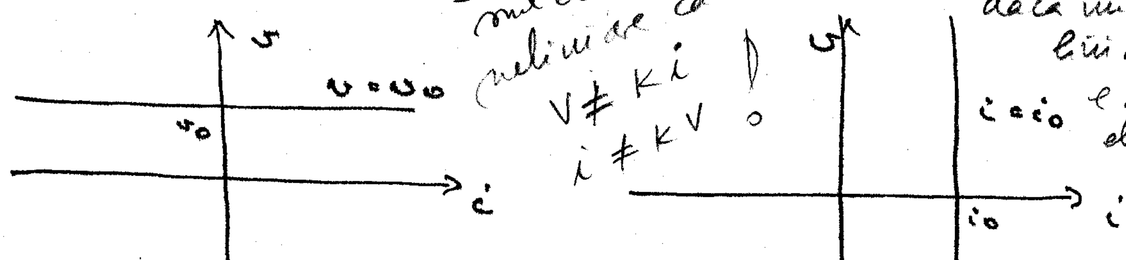
i3 : Libertatea a crescut să ia forma 4 din fig 3c. Desigur că un astfel de element nu mai este practic liniar. Îl vom numi „cvasiliniar" și uneori vom acorda și această libertate (în general însă aceea care se confundă cu a permite prezența u-sau elemente direcționate la pct 5)

ipoteza i2 va fi cel mai larg utilizată.

Să mai menționăm aici faptul că sursele de tensiune constantă (sau de curent) pot fi și ele considerate elemente liniare, așa cum se sugerează și figura:

sunt elemente neliniare că $V \neq Ki$, $i \neq KV$!

element ste neliniar dacă nu ste liniar – ac. e definiția elem. nel.



a) sursă de tensiune   b) sursă de curent

— fig 7 —

3.) Dioda semiconductoare. Ipoteze diverse

Presupunem cunoscute chestiunile legate de funcționarea diodei semiconductoare și stabilirea ecuațiilor sale de regim staționar, cvasistaționar sau nestaționar (v [5] [8] [9] [10])

Vom lucra cu modelele respective, cele mai generale (incluzând cât mai multe efecte)

α. Regimul staționar

Să începem cu enunțarea unei ipoteze clasice:

i_1: $i_A = i_0\left[\exp\left(\frac{qV_A}{KT}\right) - 1\right]$, (4)

Aceasta e ipoteza exponențială asupra diodei pn un model mai rafinat (în care se ține cont de efectul de generare și recombinare) apare:

i_2 : $$i_A = i_{od}\left[\exp\left(\frac{qV_A}{kT}\right)-1\right] + i_{ogr}\left[\exp\left(\frac{qV_A}{2kT}\right)-1\right] \quad (5)$$

Se mai folosește forma:

i_3 : $$i_A = i_o\left[\exp\left(\frac{qV_A}{mkT}\right)-1\right] \quad m\in[1,2] \quad (6)$$

care încearcă să îmbine mai multe fapte.

Rafinarea pot continua, cu alte noi ipoteze, care să țină cont de:

i_4 – efectul suprafeței semiconductorului

i_5 – efecte la nivel mare de injecție (rezistența serie variabilă)

i_6 – efectul străpungerii în polarizare inversă (cu observația că noi la un anumit punct considerăm această străpungere reversibilă)

i_7 – efectul dependenței de temperatură

– etc etc etc.

i_8 : Un exemplu de model care ține cont de un mai mare număr de efecte este dat în [10]

Totuși noi nu vom intra în detaliile acestor modelări. Teoremele de A.C.F sînt de o astfel de factură încît permit condiții destul de largi pentru valabilitatea concluziilor lor. Deci, de fiecare dată cînd vrem să stabilim un rezultat, nu trebuie

decît să verificăm, de că sunt îndeplinite condi-
țiile teoremei, cu alte cuvinte că, orice efecte sînt luate în seamă, caracteristica are anumite calități (de exemplu numai monotonie, pentru o teoremă de unicitate) în aceasta constă marele avantaj al metodelor A.C.F, de tip (d2) (v. pag 24), bazată pe verificarea condițiilor teoremelor generale.

Metoda ACF de tip (d1), care presupune cunoașterea rezultatelor din demonstrația teoremei sînt încă și mai avantajoase. Ele permit aplicarea unor teoreme a căror condiții din enunț nu sînt îndeplinite de un caz concret, dacă aceste condiții nu au fost necesare și doar suficiente în demonstrație și utilizatorul arată că și cazul concret îndeplinirea condiției suficiente.

De exemplu dacă un utilizator vrea să ia în considerație modelul (5) și se încearcă aplicarea unei teoreme care are pentru clasa modelul (4) el va fi blocat, căci suma a două exponențiale nu este o exponențială. Pe de altă parte însă, teoremele cu condiția (4) rămîn în general valabile pentru o clasă mai largă de caracteristici de $i_d = f(V_d)$ definită prin proprietățile (7):

$$\begin{cases} - \ f \text{ este continuă, } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ și} \\ - \ \forall \beta>0 \quad \inf\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha) : -\infty<\alpha<\infty\}=0 \\ \qquad\qquad \sup\{f(\alpha+\beta)-f(\alpha) : -\infty<\alpha<\infty\}=\infty \end{cases} \qquad (7)$$

Clasa funcțiilor cu aceste proprietăți este notată cu $\boxed{\mathcal{E}}$

Să arătăm că ~~exercițiile~~ că „diodele exponențiale" (4) sunt în clasa $\mathcal{E}$, deci verifică (7)

$$f(\alpha+\beta)-f(\alpha) = i_0\left[\exp\left(\frac{\varepsilon(V_\alpha+V_\beta)}{KT}\right) - \exp\left(\frac{\varepsilon V_\alpha}{KT}\right)\right] =$$

$$= i_0 \exp\frac{\varepsilon V_\alpha}{KT}\left[\exp\left(\frac{\varepsilon V_\beta}{KT}\right) - 1\right]$$

Dar pentru $\forall \beta>0$, $\exp\left(\frac{\varepsilon V_\beta}{KT}\right)-1 > \exp(0)-1 \geq 0$

Deci $\exp\left[\frac{\varepsilon V_\beta}{KT}-1\right] = K > 0$ și rămâne:

$$f(V_\alpha+V_\beta)-f(V_\alpha) = K i_0 \exp\frac{\varepsilon V_\alpha}{KT}$$

Acum este evident că proprietățile (7) sunt satisfăcute. q.e.d.

Unele rezultate din lucrare depind totuși numai de apartenența la clasa $\mathcal{E}$ a caracteristicilor. Astfel s-ar părea că și modelul (5) ((6) în mod evident) să aibă proprietatea (7), deci nu este modelul exponențial (4), așa cum s-ar putea ca ipotezele teoremei să o ceară explicit.

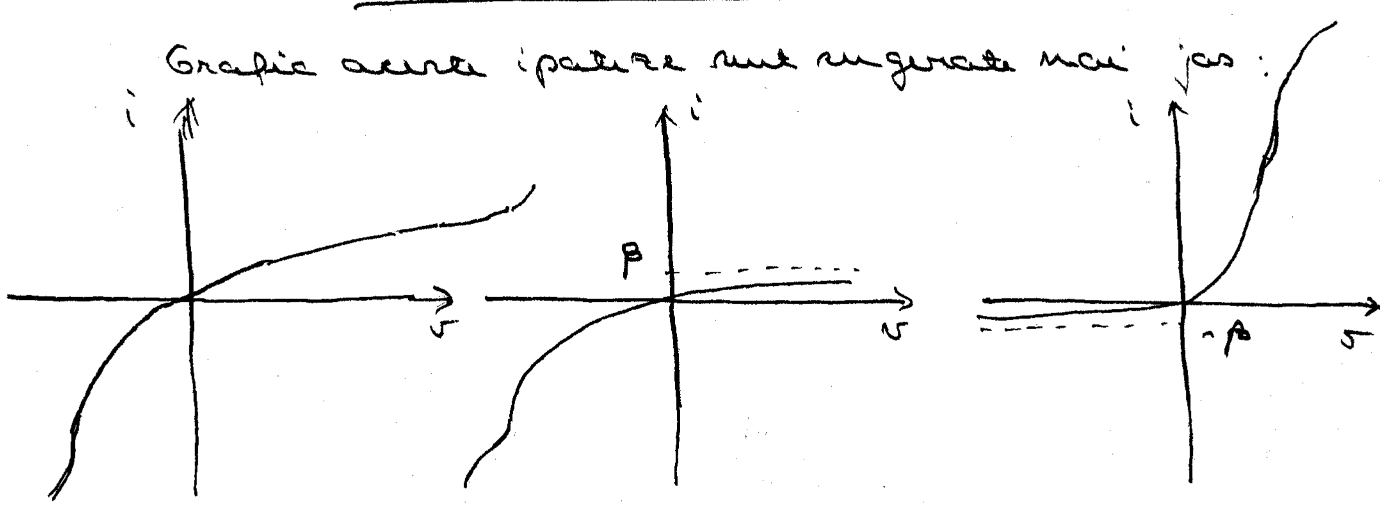
Fiecare teoremă va specifica ipotezele pe care le reclamă. Desigur că dacă modelul va satisface ipoteze mai „tari" le va satisface cu atît mai mult pe cele mai slabe în teoremele ce se pot aplica.

Șirul ipotezelor $i_1, i_2 \dots$ (pag 54) poate fi extins cu ipoteze tot mai largi. Cîteva exemple:

i_9 : $f(v) = i$ este o funcție strict crescătoare care aplică surjectiv R pe R („dioda surjectivă")

i_{10} : $f(v) = i$ este o funcție strict crescătoare care aplică R pe un interval de forma $(-\infty, \beta)$, sau $(-\beta, \infty)$ unde $\beta > 0$. („dioda mărginită)

Graficele acestor ipoteze sunt redate mai jos:



a) diodă surjectivă b) diodă mărginită superior c) diodă mărginită inferior

— fig 8 — : Tipuri de diode

Sunt desigur posibile ipoteze și mai largi, dar le vom parcurge la punctul 5), care se ocupă cu „rezistența neliniară" în general.

β) Regim nestaționar

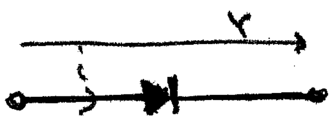
Deducția este absolut analogă celei din cazul precedent. Există și aici o mulțime de modele, mai mult sau mai puțin precise. Utilizatorul va trebui însă numai să verifice dacă modelul pe care îl ia în considerație se încadrează în condițiile teoremei pe care vrea s-o folosească.

Mai jos precizez acele modele folosite de exemplu în analiza pe calculator. Ele sînt foarte restrictive și se vor încadra întotdeauna în condițiile cerute de teoreme.

④ Ipotezele standard pentru dioda semiconductoare

Pentru regim staționar:

I.C.T.St. :



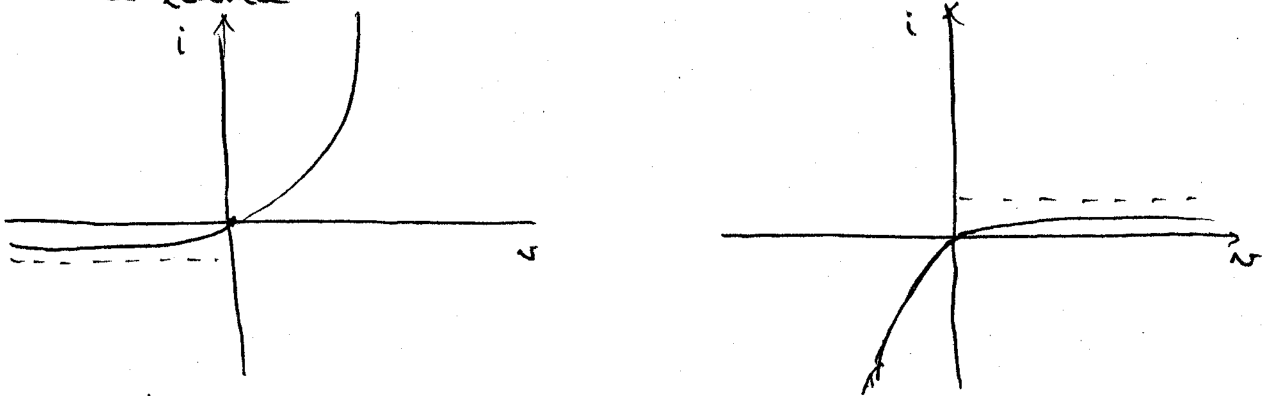
— fig 5 —
(Simbolizarea diodei semiconductoare)

Cu alte cuvinte se presupune dioda un dispozitiv biterminal rezistiv.

Observație : Pentru tot vom nota la fel diodele n p și p n, cu simbolul de mai sus. Deosebirea dintre ele va reieși din aceea că, notînd cu

$i = f(v)$ caracteristica diodei, ea va

avea forma



a) pn b) np

— fig 10 —

<u>i.c.c. st</u>

(8) $i_A = \varepsilon\, i_0 \left[\exp\left(\frac{\varepsilon q V_A}{m k T}\right) - 1\right]$

unde (vezi fig 10) (8') $\begin{cases} \varepsilon = 1 & \text{pt dioda pn} \\ \varepsilon = -1 & \text{pt dioda np} \end{cases}$

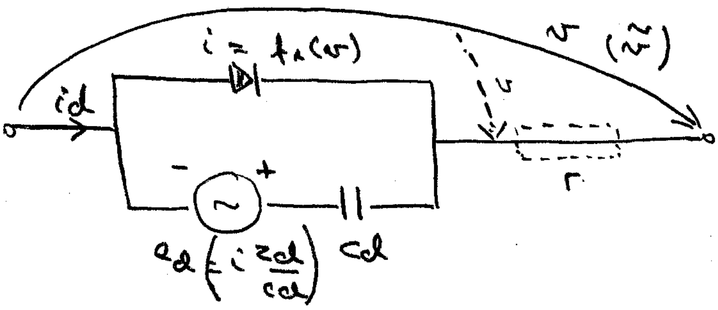
Deseori vom mai scrie și forma

$i = f_1(v)$ unde $\boxed{f_1(v) = m_1\left[\exp(n_1 v) - 1\right]}$ (9)

cu $m_1 n_1 \geq 0$ (9')

Pentru regim nestaționar:

<u>i.c.T st</u> : este arătată în figura:



- fig 11 -

Este un model destul de elaborat, unde sursa de tensiune comandată ține seama de anumite efecte, care fac ca sarcina stocată să varieze. (cd globală e fct de i și zd)

Rezistența serie r_s poate fi prezentă pentru a lua în calcul efectele la un nivel mare de injecție.

Sursa de tensiune comandată face să putem considera elementele schemei constante cu v, i.

τ_0 — timpul de viață a electronilor și golurilor ($\tau_0 = \tau_{n0} = \tau_{p0}$). ER va modela în general fenomenele de generare - recombinare.

Modelul e valabil și la t_t, dar aceasta nu se consideră o limitare în cazul circuitelor de comutație.

i.c.c. st

- C_d (aceasta r) sunt elemente liniare
- $i = f_1(v)$ este de tip standard (5)
- $e_d = i \dfrac{\tau_d}{C_d}$ (10)

Dacă dorim o scriere unitară, să calculăm mai întâi sarcina totală stocată:

$$(11)\quad Q_d = C_d v_{cd} = C_d(e_d + v_d) = C_d\left(i \cdot \frac{\tau_d}{C_d} + v_d\right) = i\tau_d + C_d v_d$$

(unde termenii reprezintă: purtătorii minoritari generali în regiunea de golire, respectiv sarcina ~~stocată~~ stocată capacitiv pe joncțiune (la capetele reg. de tranziție)

Deci

$$(12)\quad i_d = i + \frac{dQ_d}{dt} = f_1(v_d) + \frac{d}{dt}\left[C_d v_d + \tau_d f_1(v_d)\right]$$

Atunci când se ține cont și de R, se ajunge:

$$\tilde{v} = v + R i_d \quad (13)$$ (evident de pe figură)

(5) Ipoteze privind rezistențele neliniare (în general)

I.C.T : sînt elementele bi-terminale admise cu structura

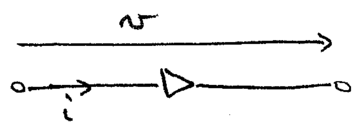


fig 12 : Element rezistiv neliniar oarecare

I.C.C. ele pot fi extrem de variate. Deși ele poate anume, dau mai jos unele ipoteze clasice, pe care voi încerca să le ordonez oarecum pe categorii (relativ) și crescător, în sensul restrictiv.

1 Ipoteze privind comportarea în timp :

- relația (14) $f(v, i) = K$, care caracterizează elementul este invariabilă în timp sau :
- variabilă în timp

2. ipoteze privind modul de definire

- rezistențe definite implicit : $f(v, i) = 0$
- rezistențe definite unicursal : (atunci cînd există un parametru t – de obicei lungimea arcului – cu

$$(14') \begin{cases} v = v(t) \\ i = i(t) \end{cases}$$

și funcțiile v, i au anumite proprietăți (v Art 9) (rectificabilitate etc)

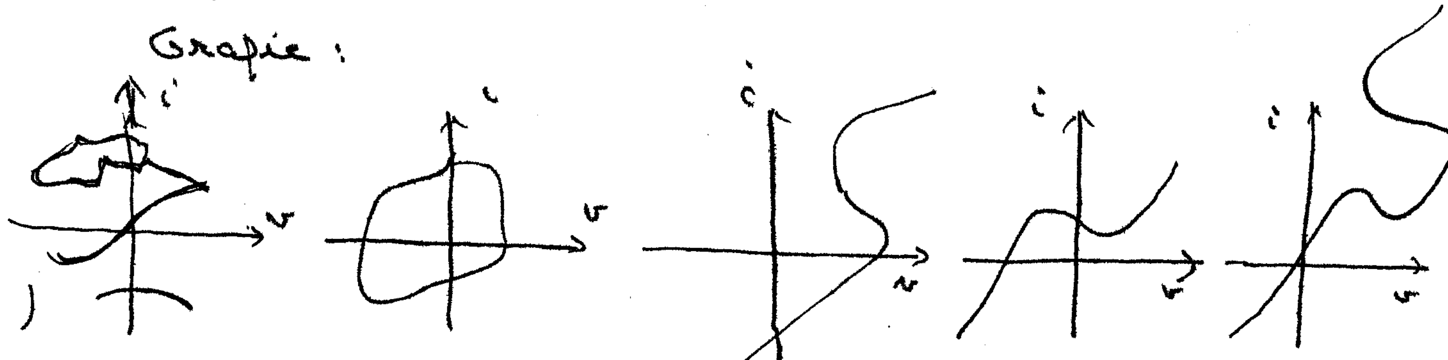
- rezistențe ~~definite~~ definite în curent – atunci cînd scriem o expresie de forma (14'') $v = G(i)$, unic definită pe o anumită submulțime din R.

- rezistențe ~~definite~~ controlate în curent (ca la cele precedente dar i poate lua acum orice valoare reală)

- rez. definite (~~……~~) controlate în tensiune, printr-o relație (14''') $i = R(u)$ (considerații analoage)

- rez. dublu definite (controlate), sau se mai folosește „rezistențe unu la unu" (caracteristica lor e bijectivă)

Grafic:



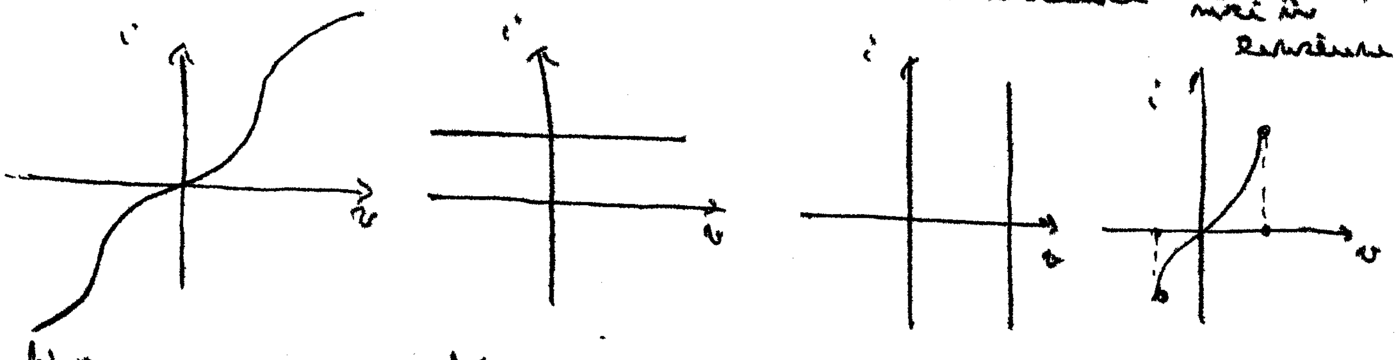
a) Rez „generală"

b) Rez. „unicursală"

c) controlată în curent

d) Controlată în tensiune

e) Nici în curent, nici în tensiune



f) Rez „unu la unu"

g) Sursa de curent ca o rez. controlată în tensiune

h) Sursa de tensiune - rez cont. în curent

i) rez dublu definită (domeniu mărginit)

- fig 13 - Tipuri de rezistențe

Observație.
Cazul i) este cazul impus de lupe de realitate, dar, ca și la rez. liniare, vom considera funcțiile definite pe toată axa reală. Înfățișa acestei considerații

va fi discutată în altă parte (v [O]). De remarcat și procesele de „prelungire" pe care le vom discuta în lucrare și care vor face să putem considera un element definit în curent - controlat în curent, cu verificările finale de control specificate (v III D 6). În general, teoremele de unicitate își vor păstra însă validitatea, fără nici o verificare.

In continuare vom presupune existența controlată în tensiune (cazurile controlului în curent și unicausal se tratează analog)

Deci $i = G(v)$, $f: R \rightarrow R$. Privind funcția $G(v)$ (de obicei notată $f(x)$) avem:

<u>3. ipoteze privind funcția $f(x)$</u>

- monotonia (strictă sau nu) < crescătoare / descrescătoare
- injectivitatea
- surjectivitatea
- bijectivitatea
- mărginirea < la $+\infty$ / la $-\infty$ / în ambele părți < inferioară / superioară / dublă

Sau proprietăți analitice:

- continuitatea
- derivabilitatea

- $\boxed{f \in C^k}$ – clasa f-ţiilor cu derivate continue până la ordinul k
- funcţia îndeplineşte o $\boxed{\text{condiţie Lipschitz}}$:

$$|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \qquad (15)$$

(în cazul variaţiei în timp, condiţia va fi îndeplinită uniform în timp, adică $\forall t$)

- sau alte proprietăţi particulare:
- f-ţii de tip ε (v pag 56)
- f-ţii cu variaţie mărginită (v [I1] pag 67) (sunt utile în cazul tratării unicursale)
- f-ţii exponenţiale etc etc etc.

<u>Observaţii</u>

1) înseriind două diode tunel vom ajunge la un element a cărui caracteristică poate fi foarte variată (unicursală, contr. în tensiune etc), dovadă a realităţii fizice a cazurilor considerate.

2) Toate consideraţiile acestui paragraf se pot aplica şi condensatorilor şi bobinelor, văzute ca elemente biterminale neliniare, cu schimbările

condensatori $\quad i \to q$, $\quad v \to v$

bobine $\quad i \to i$, $\quad v \to \phi$ $\qquad$ (v. fig 2)

(6) Ipoteze privind tranzistorii - generalități

Pentru a nu deveni obositor, nu vom mai relua întreaga descriere privind diversele modele ale tranzistorului, gradul lor de precizie, modul cum sunt obținute sau efectele de care ele țin sau nu cont (unidimensionalitate, nivel mic de injecție, efecte de generare - recombinare etc)

Vom fi puși din nou în situația de a alege un model de regim staționar și unul de regim nestaționar. care să țină cont, pe cît posibil de cît mai multe efecte, dar trebuie să remarc încă o dată că multe teoreme (v. Apl. A ca exemplu) nu cer decît ipoteze slabe, cum ar fi monotonia diodelor din modelul Ebers-Moll și continuitatea lor. Tocmai acest lucru le va oferi generalitate și aplicabilitate.

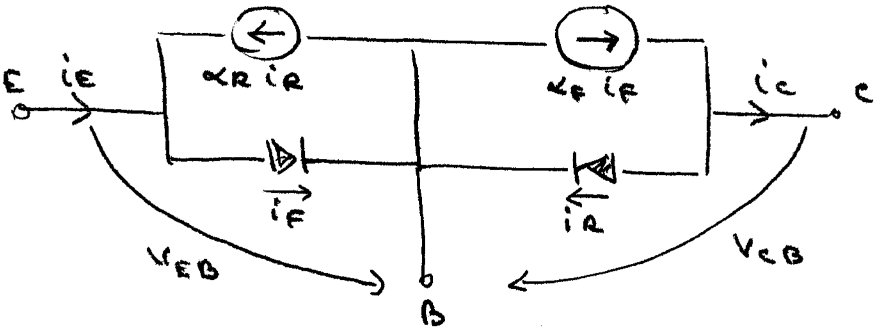
(7) Modelări standard pentru tranzistor

(a) Regim staționar. Modelul simplu

Vom porni de la modelul clasic Ebers-Moll, cu generatoare de curenți comandate de curenții prin diode. (fig 14 - rel 17) unde putem sau nu ține cont de condiția

(16) $\alpha_F i_{ES} = \alpha_R i_{CS}$, dedusă pe considerente fizice

$i_{ES}(i_{CS})$ — curenții de saturație cu $V_{CB} = 0$ ($V_{EB} = 0$)



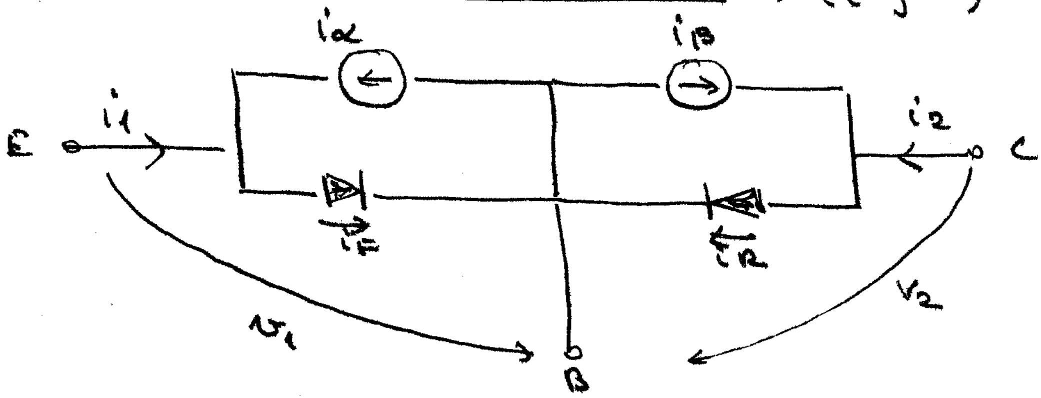
— fig 14 —

Model „Ebers - Moll" al tranzistorului bipolar pnp

$$(17)\begin{cases} i_E = i_{ES}\left[\exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT}\right)-1\right] - \alpha_R\, i_{CS}\left[\exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT}\right)-1\right] \\ i_C = \alpha_F\, i_{ES}\left[\exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT}\right)-1\right] - i_{CS}\left[\exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT}\right)-1\right] \end{cases}$$

Vom transforma puțin schema de mai sus, pentru a ajunge la forma pe care o vom folosi în lucrare (printre altele schimbăm referința curentului joncțiunii de colector.

Avem deci <u>I.C.T.st 1</u> : (fig 15)



— fig 15

iar ipotezele de calitate <u>I.C.C.St 1</u> vor fi

$$(18)\begin{cases} i_\alpha = \alpha_r\, i_R \\ i_\beta = \alpha_f\, i_F \end{cases} \quad \text{cu} \quad \boxed{\alpha_r, \alpha_f \in (0,1)} \quad (18)'$$

(sursele de curent controlate)

în ceea ce privește joncțiunile, ele se presupun modelate ca <u>diode standard</u> (v pag 59) sau în multe cazuri, vor fi diode generalizate (v pag 61) cu di -

verse proprietăți, întocmai specificate. Deci

$$(19)\quad \begin{cases} i_1 = m_1\left[\exp(n_1 v_1) - 1\right] \\ i_2 = m_2\left[\exp(n_2 v_2) - 1\right] \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{cases} m_1 n_1 > 0 \\ m_2 n_2 > 0 \end{cases} \quad (19)'$$

sau în general

$$(20)\quad \begin{cases} i_1 = f_1(v_1) \\ i_2 = f_2(v_2) \end{cases}$$

<u>Observații</u>

1) Ca și în cazul diodelor, <u>nu vom face nici o deosebire privind forma relațiilor</u> (19) sau (20) <u>între tranzistoarele pnp și npn</u>. Deosebirea va consta în aceea că:

- pentru pnp : $m_1, n_1, m_2, n_2 > 0$
- pentru npn $m_1, n_1, m_2, n_2 < 0$

sau, așa e figurată în fig 10.

De aceea peste tot, simbolul:

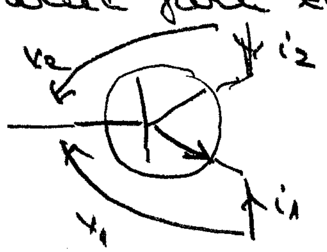


fig -16-

<u>Simbol universal pentru tranzistor bipolar</u>

(pnp sau npn)

va putea reprezenta la fel de bine un tranzistor npn sau pnp. Teoremele vor avea proprietăți ale funcțiilor f_1, f_2, la fel de bine îndeplinite de ambele variantele de diode din fig 10. (strict crescătoare, etc)

2) Relațiile dintre parametrii m_K, n_K și cei din modelul Ebers-Moll se stabilesc imediat prin identificarea rel (17) cu (21), care este obținută prin utilizarea lui (18) (19) în modelul din fig 15:

$$(21)\quad \begin{cases} i_1 = m_1\left[\exp(n_1 v_1) - 1\right] - \alpha_r m_2\left[\exp(n_2 v_2) - 1\right] \\ i_2 = -\alpha_f m_1\left[\exp(n_1 v_1) - 1\right] + m_2\left[\exp(n_2 v_2) - 1\right] \end{cases}$$

3) Dacă lăsăm diodelor libertatea din rel (20) obținem

$$(22)\quad \begin{cases} i_1 = f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2) \\ i_2 = -\alpha_f f_1(v_1) + f_2(v_2) \end{cases}$$

sau matricial:

$$(22')\quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix}$$

sau pentru concizie, cu notațiile

$$(23')\ i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \quad (23'')\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (23''')\ F(v) = \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{bmatrix} (24)$$

$$(25)\quad \boxed{i = T\,F(v)}$$

cu

- $\alpha_r, \alpha_f \in (0,1)$
- F o aplicație diagonală (v rel 23''')
- i, v vectori bidimensionali (23', 23'')

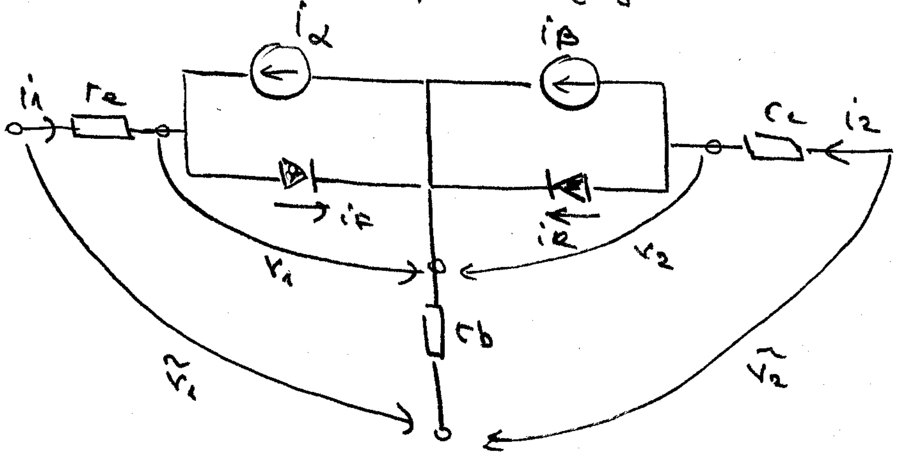
așa că

$$(25')\quad F : R^2 \longrightarrow R^2,$$ funcție vectorială „diagonală"

(b) Regim staționar. Modelul lărgit

Ca și în cazul diodelor, putem ține cont de prezența rezistenței r_b (pentru nivele mari de injecție) sau a rezistențelor de contact de terminal. Obținem atunci „modelul lărgit", cu:

Î.C.T (topologia) din fig 17:



— fig 17 —
Modelul „lărgit" al T.B

Î.C.C. St 2

- r_e, r_b, r_c sunt rezistențe liniare pozitive

Observație

Dacă avem că $r_e, r_b, r_c \geq 0$, pentru cazul egalității cu 0, dăm peste modelul simplu St 1, ca un caz particular a lui St 2.

$$\begin{cases} i_\alpha = \alpha_F \, i_R \\ i_\beta = \alpha_R \, i_R \end{cases} \quad \text{cu} \quad \alpha_r \, \alpha_f \in (0,1)$$

(18 bis) (18' bis)

Deci:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2) \\ i_2 = -\alpha_f f_1(v_1) + \alpha_r f_2(v_2) \end{cases} \quad (20 \text{ bis})$$

sau $\boxed{i = TF(v)}$ (25 bis)

Avem acum suplimentar

$$(26)\quad \begin{cases} v_1 = \tilde{v}_1 - i_1(r_b + r_e) - i_2 r_b \\ v_2 = \tilde{v}_2 - i_1 r_b - i_2(r_b + r_e) \end{cases}$$

$$\left(\text{Relaţii care ies din } \begin{cases} v_1 = \tilde{v}_1 - (i_1 + i_2) r_b - i_1 r_e \\ v_2 = \tilde{v}_2 - (i_1 + i_2) r_b - i_2 r_e \end{cases} \right)$$

Relaţiile 26 se mai scriu şi

$$(26')\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

sau:

$$(27)\quad \boxed{v = \tilde{v} - R\, i} \quad \text{unde}$$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $\quad i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$ sunt vectori bidimensionali

(23 bis)

iar $R = \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_e \end{pmatrix}$ (27'), cu $r_b, r_e, r_e \geqslant 0$.

În rezumat, pentru acest caz avem:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} & i = TF(v) \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} & v = \tilde{v} - R\, i \end{array}} \quad (28)$$

şi $f_k(v_k)$ pot avea forma standard:

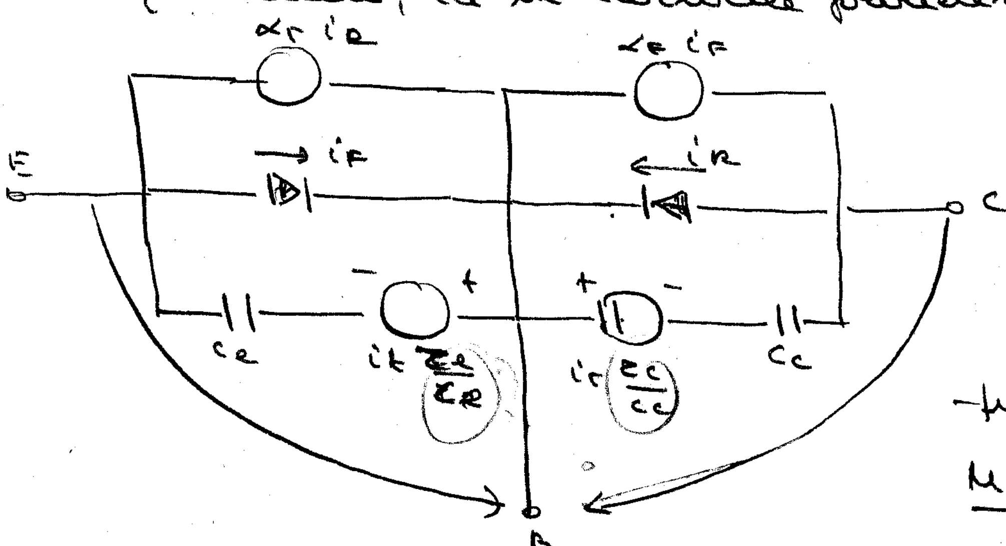
$$f_k = m_k\left[\exp(n_k v_k) - 1\right] \quad \begin{array}{l} k = 1, 2 \\ m_k n_k > 0 \end{array} \quad (28')$$

sau una altă funcţie, mai generală

(C) Regim nestaționar. Model simplu

Voi folosi modelul destul de rafinat al lui Gummel, [cart 16], utilizat de obicei în literatură, pentru adaptabilitatea sa pe calculator. Este un model de control prin sarcini. Nu voi mai detalia discuțiile privind raza sa de valabilitate. (de altfel am văzut că acest aspect va conta mai puțin)

i.C.T st 1 : preia topologia din figura 18 (detalii cu privire la tipul surselor controlate, la i.c.c):
Pentru rapiditate, am inclus în figură și valorile de control ale surselor comandate, deși acestea puteau fi trecute, ca în cazurile precedente la i.c.c.



- fig 18 -
Modelul Gummel al TB.

i.C.C. st 2

În figură am lăsat trecute deja unele din ele.

- $(\alpha_r, \alpha_f) \in (0,1)$
- C_c, C_e sunt condensatori liniari pozitivi
- A (surse controlate de tensiune din care deriva-

riabile cu parametrii de funcționare)

- i_t, i_r pot fi standard:

$$\begin{cases} i_t = m_1\left[\exp(n_1 v_1) - 1\right] \\ i_r = m_2\left[\exp(n_2 v_2) - 1\right] \end{cases} \qquad m_k n_k > 0 \qquad (19\ \text{bis})$$

sau

$$(20\ \text{bis}) \begin{cases} i_t = t_1(v_1) \\ i_r = t_2(v_2) \end{cases} \qquad \text{mai generale} \quad (\text{v rel } 19, 20)$$

Calculând sarcinile stocate pe joncțiuni (cu deducția și interpretarea lui Gummel [art 16])

$$(29) \begin{cases} Q_t = C_e V_{ce} = C_e\left(V_1 + i_t \frac{\tau_t}{C_e}\right) = C_e V_1 + i_t \tau_t \\ Q_r = C_c V_{cc} = C_c\left(V_2 + i_r \frac{\tau_r}{C_c}\right) = C_c V_2 + i_r \tau_r \end{cases}$$

de unde putem calcula:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{d}{dt} Q_t + i_t - \alpha_r i_r \\ i_2 = \frac{d}{dt} Q_r - \alpha_t i_t + i_r \end{cases} \qquad \text{sau:}$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{d}{dt}\left[C_e v_1 + \tau_t t_1(v_1)\right] + t_1(v_1) - \alpha_r t_2(v_2) \\ i_2 = \frac{d}{dt}\left[C_c v_2 + \tau_r t_2(v_2)\right] - \alpha_t t_1(v_1) + t_2(v_2) \end{cases} \qquad (30)$$

sau

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_e v_1 + \tau_t t_1(v_1) \\ C_c v_2 + \tau_r t_2(v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1(v_1) \\ t_2(v_2) \end{pmatrix} \qquad (30')$$

Se mai obișnuiește notația:

$$(31) \begin{cases} C_1(v_1) = C_e v_1 + \tau_t t_1(v_1) \\ C_2(v_2) = C_c v_2 + \tau_t t_2(v_2) \end{cases} \qquad \text{cu care } (30) \text{ ia}$$

forma:

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(v_1) \\ c_2(v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} \quad (30'')$$

sau pe scurt

$$\boxed{i = \frac{d}{dt}\left(C(v)\right) + T\,F(v)} \quad (32)$$

unde $i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $T = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{pmatrix}$ $(32')$

iar $F(v)$, $C(v)$ sunt deci aplicații diagonale $R^2 \to R^2$

adică au forma $\begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1(v_1) \\ c_2(v_2) \end{pmatrix}$ $(32'')$

În acest α-urile vor respecta următoarea

condiție $(18')$: $\alpha_r, \alpha_t \in (0,1)$ $(18')$

iar f_1, f_2, pot sau nu să aibă forma (19)

(d) Regim nestaționar. Model lărgit

Se ține cont de prezența rezistențelor de terminal. Nu mai fac figura (analoagă lui 17) nici calculele (analoage celor de la pt b). Rezultatele sunt evident:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(v_1) \\ c_2(v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_b + r_e & r_b \\ r_b & r_b + r_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (33)$$

sau pe scurt

$$\begin{cases} i = \frac{d}{dt}C(v) + T\,F(v) \\ v = \bar{v} - R\,i \end{cases} \quad (33')$$

cu toate elementele specificate la punctele anterioare

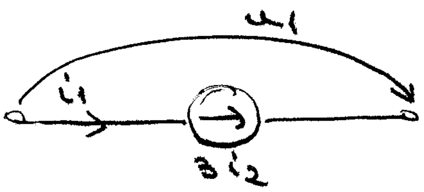
(8) Ipoteze privind dispozitivele multiterminale

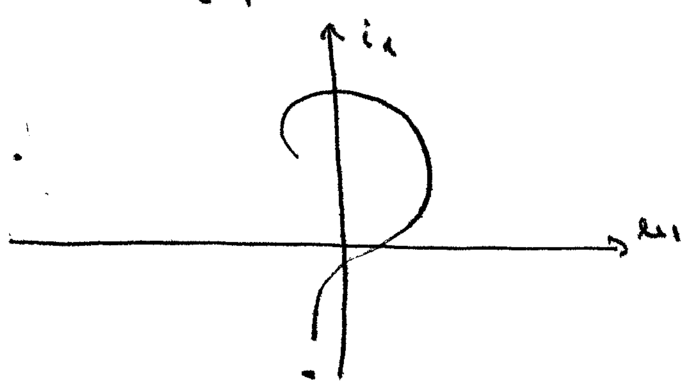
Deși acest subiect este foarte interesant, (vezi [19, 20]) nu îl vom extinde aici. Totuși nu se poate trece mai departe fără a face unele observații.

Așa precum s-a văzut în exemplul oferit de tratarea tranzistorului, în general, topologia multiterminală (care în general aduce schimbări profunde în funcționarea și analiza dispozitivului) este înlocuită de analiști cu un ansamblu de dispozitive bi-terminale, atunci când aceasta este posibil. Printre aceste dispozitive apare și sursa de curent sau tensiune comandată de variabilele unor altor laturi.

Aceste noi elemente biterminale (generatoarele comandate) nu sunt însă niște dipoli în înțelesul clasic al cuvântului (adică o relație între variabilele U, I ale laturii respective).

Situația este ilustrată în figură:





— fig 19 —

1) Sursă comandată!

Care era cauza apariției acestor elemente „reporter"?
Să luăm ca exemplu modelul tranzistorului, văzut ca tripol, sau dipol cu bornă comună:

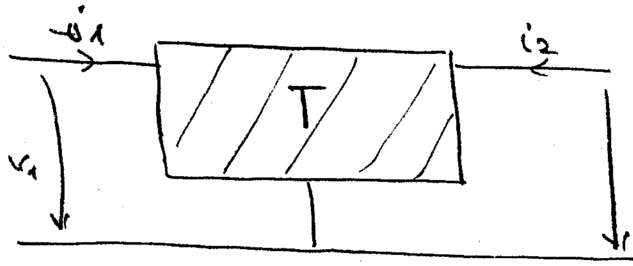


fig 20
Tranzistorul ca dipol

El va determina o restricție în spațiul celor patru variabile de poartă i_1, i_2, v_1, v_2, adică un set de două relații care să le cuprindă. Din fericire, putem exprima aceste relații în forma:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2) \\ i_2 = -\alpha_f f_1(v_1) + f_2(v_2) \end{cases} \qquad (20\,bis)$$

care se reduce ca urmare de varianta liniară:

$$\begin{cases} i_1 = G_{11} v_1 + G_{12} v_2 \\ i_2 = G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{cases} \qquad (34)$$

Oricare din aceste două relații însă, nu ne permite să scoatem într-un mod o relație care să-l cuprindă numai pe i_1 și v_1. Întotdeauna într-o astfel de relație va fi angrenat și un alt parametru. Acest alt parametru va sugera ideea de sursă comandată.

În mod normal însă, într-un circuit liniar, vom putea face calcule care să aducă ecuațiile în forma dorită (dipolul T e format din elemente liniare, adică un nereporter bi-terminale)

Pentru cazul tranzistorului însă, însăși fenomenul fizic impune dependența din relația (20 bis), aceasta nu mai reprezintă doar un mod de scriere prescurtată a unui sistem de relații. Deci cvadripolul tranzistorul e un tripol (el nu poate fi descompus în dipoli normali - adică relații $v_k = f(i_k)$). De aceea tranzistorul nu va mai lega două mărimi unidimensionale (din spațiul R), ci, așa cum se vede din (20):

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(v_1) \\ f_2(v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(v_1, v_2) \\ \tilde{f}_2(v_1, v_2) \end{pmatrix} \quad (35')$$

adică pe scurt

$$\boxed{i = F(v), \quad F : R^2 \rightarrow R^2} \quad (35)$$

(F funcție vectorială)

În cazul general funcțiile $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$ pot fi oarecare. Astfel dacă la noi

$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2) = f_1(v_1) - \alpha_r f_2(v_2) \\ f_2(v_1, v_2) = -\alpha_f f_1(v_1) + f_2(v_2) \end{cases} \quad (35')$$

avem deja un caz foarte particular, în care variabilele v_1, v_2 din expresiile funcțiilor f_1, f_2 ar fi

1) separabile

$$(36) \begin{cases} f_1(v_1, v_2) = f_1'(v_1) + f_1''(v_2) \\ f_2(v_1, v_2) = f_2'(v_1) + f_2''(v_2) \end{cases}$$

(aceastǎ particularitate a lǎrgit posibilitǎ introducerea surselor controlate)

2) „cvasiliniare" : relațiile (32) pot lua forma din 35'. (adicǎ f_2', f_2'' sînt tot f_1', f_1'' înmulțite cu coeficienți constanți)

Aceste particularitǎți vor fi exploatate pentru nic. Sǎ ne trecem totuși mai departe pentru a vedea cǎ, pe cazul general al unui multipol pot avea următoarea „scară de simplificare"

1) Multipol general

2) Multipol organizat ca multiport. Există variabilele $i_1 \ldots i_n, v_1, \ldots v_{2n}$, iar relațiile care îl definesc sînt:

$$(37)\quad \begin{cases} f_1(i_1, \ldots i_n, v_1, \ldots v_n) = 0 \\ f_2(i_1, \ldots i_n, v_1, \ldots v_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(i_1, \ldots i_n, v_1, \ldots v_n) = 0 \end{cases}$$

(pot vedea aceste relații ca un set de ecuații implicite pentru un grup oarecare de n variabile)

3) Sînt date explicit n variabile de poartă funcție de celelalte:

$$(38)\quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \ldots x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots x_n) \end{cases}$$

, unde $\left.\begin{matrix} y_1 \ldots y_n \\ x_1 \ldots x_n \end{matrix}\right\}$ sînt variabilele $i_1, \ldots v_n$,

$$
(39)\quad 4)\begin{cases} y_k = i_k \text{ sau } v_k \\ x_k = v_k \text{ sau } i_k \end{cases}
$$
, în (38) → reprezentare hibridă generală

5) în cazul 4), funcțiile $f_k(x_1 \dots x_n)$ pot fi separate

$$
\stackrel{si}{=} f_k^{(1)}(x_1) + f_k^{(2)}(x_2) + \dots + f_k^{(n)}(x_n) \quad \rightarrow \text{surse comandate separate}
$$

(39') $\quad k = 1, \dots n$

6) Posibilitatea ecuații liniare (în afara unor termeni constanți apar aceleași $f^{(j)}(x_j)$ indiferent de k, în relațiile 40.

În general, un multipol poate introduce o relație de tipul

$$
(40^*) \quad \boxed{F(x) = y}
$$
sau pe larg

$$
\begin{cases} f_1(x_1 \dots x_n) = y_1 \\ f_2(x_1 \dots x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_n) = y_n \end{cases} \quad (40')
$$
dacă admite o reprezentare hibridă generală

unde $F : R^n \rightarrow R^n$ e o funcție vectorială.

În cazul multipolilor neliniari de tipul tranzistorului, considerarea aspectului vectorial (rel 40), nu mai este doar o manieră de prescurtare a scrierii ecuațiilor ci singurul mod posibil de definire a unor elemente, pentru o funcție $F : R^n \rightarrow R^n$ ireductibilă.

Aceasta va oferi posibilitatea unor comportări deosebite și tot aceasta este motivul pentru care am considerat necesar paragraful următor.