(B) Regimul tranzitoriu al circuitelor cu tr.

(1) Introducere

Din păcate nu am putut dezvolta în această lucrare aspecte privind modul de obținere a A.C.F în cazul regimului nestaționar. (motive evidente de spațiu)

Acest lucru este însă foarte neplăcut, căci se pierde astfel tocmai partea cea mai utilă a acestei teorii, care poate rezolva probleme de semnal mare, inaccesibile prin metodele liniarizate obișnuite.

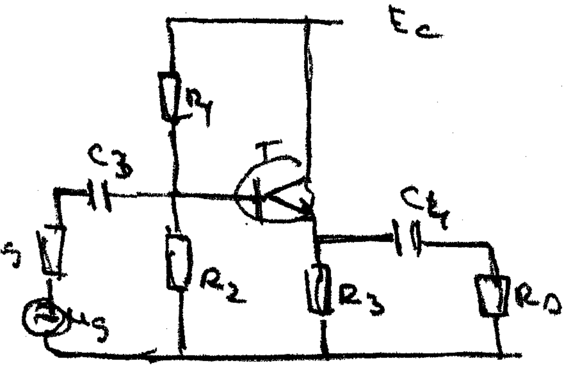
În plus, teoremele privind regimul tranzitoriu sunt strâns legate de teoremele din capitolele precedente. Deoarece, nu este nevoie decât de foarte slabe modificări pentru a putea folosi util o teoremă A.C.F (v. cap IV pt c – D) în regim nestaționar. Acesta este motivul pentru care voi indica (chiar dacă foarte fugitiv) modul în care se ajunge la problemele vizând soluțiile algebrice discutate până acum, în analiza regimului staționar.

Deși au fost obținute rezultate foarte promițătoare în cadrul mai larg al teoriei generale de circuite, mă voi mărgini aici numai la circuitele cu tranzistoare, rez. liniare, bobine și condensatoare, pentru a schița direcțiile în care analiza reg. nestaționar se dezvoltă și modul cum aceste direcții interferă cu rezolvarea mai problemei A.C.F asupra unor ecuații algebrice.

2. Exemplificare

(7) Exemplu de probă

Să reluăm acel exemplu din cap 3 (fig 27, p 82)



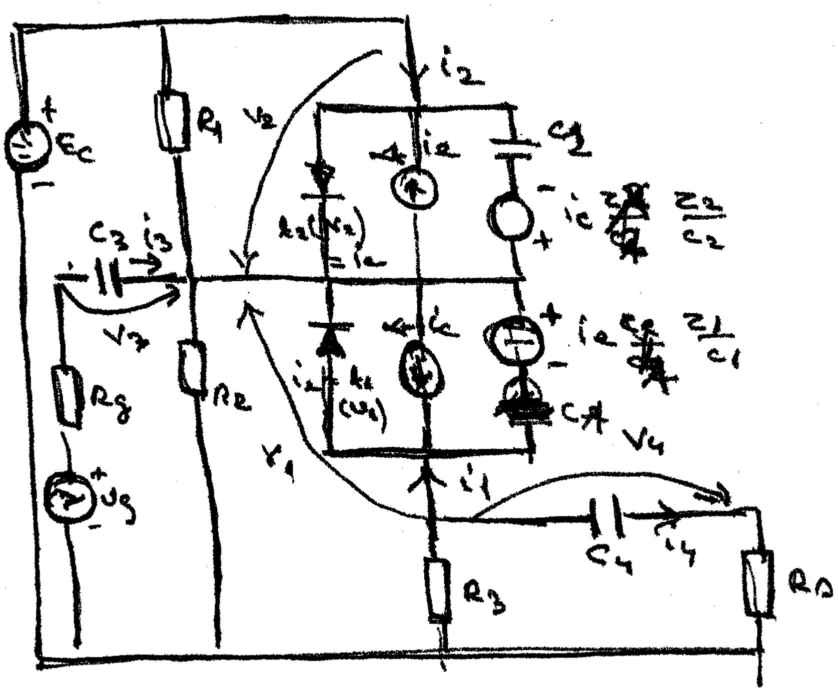
—fig 1—

Repetorul pe emitor

Și să folosim, pentru regimul tranzitoriu unul din modelele tranzistorului Gummel (pag 71 – fig 18, sau pag 73)

Ne oprim de exemplu asupra modelului rezultat 1.

Circuitul devine deci:



—fig 2—

Circuitul de calcul al regimului tranzitoriu

$$\text{unde}\quad \begin{cases} k_1(v_1) = m_1 \exp[(n_1 v_1) - 1] \\ k_2(v_2) = m_2 \exp[(n_2 v_2) - 1] \end{cases} \qquad (1)$$

$m_1, m_2, n_1, n_2 < 0$ (la noi, în cazul npn)

Ecuațiile impuse de tranzistoare sunt deci

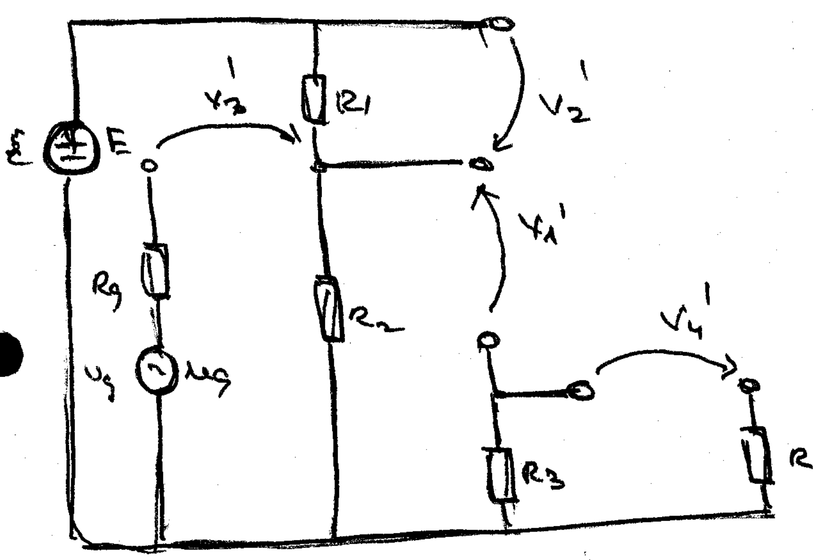
$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{d}{dt}[q_1] + t_1(v_1) - \alpha_r t_2(v_2) \\ i_2 = \dfrac{d}{dt}[q_2] - \alpha_f t_1(v_1) + t_2(v_2) \end{cases} \quad (2) \quad \text{sau}$$

cu (3)

$$\begin{cases} q_1 = c_1 v_{c_1} = c_1\left(v_1 + i_e \dfrac{\tau_1}{c_1}\right) = c_1 v_1 + i_e \tau_1 = c_1 v_1 + \tau_1 t_1(v_1) \\ q_2 = c_2 v_{c_2} = c_2\left(v_2 + i_c \dfrac{\tau_2}{c_2}\right) = c_2 v_2 + i_c \tau_2 = c_2 v_2 + \tau_2 t_2(v_2) \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} i_1 = \dfrac{d}{dt}\left[c_1 v_1 + \tau_1 t_1(v_1)\right] + t_1(v_1) - \alpha_r t_2(v_2) \\ i_2 = \dfrac{d}{dt}\left[c_2 v_2 + \tau_2 t_2(v_2)\right] - \alpha_f t_1(v_1) + t_2(v_2) \end{cases} \quad (4)$$

Atunci cele „rezistența neliniară" impusă tăieturii care e determinată de bornele condensatoarelor tranzistoarelor iată cum arată deci „rezistența liniară":



— fig 3: „Rezistența liniară" și bornele sale de acces (bornele tăieturii)

Vom avea ca urmare

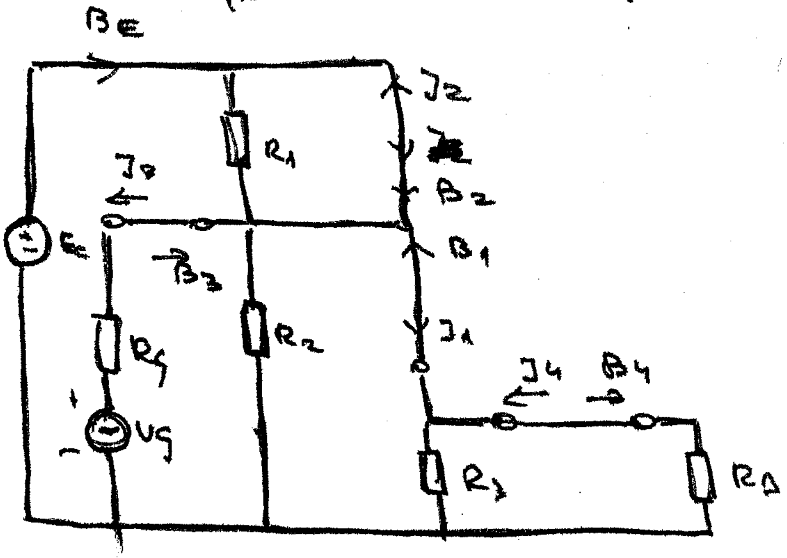
(5) $\boxed{\dot{v}' = G v' - B}$ (5) exact ca în cazul regimului static, determinăm întâi pe B, prin scurtcircuitarea tuturor particular și înmulțirea J-urilor aparente, în sens invers (de ieșire din multiport) și apoi pe G, lăsând numai independente de tensiune și aplicând

apoi metoda enunțată.

Deci bazat pe principiu vom face acest calcul, pentru exemplificare.

$\boxed{2\ \text{Calculul lui } B}$

Putem aplica pentru acum principiul suprapunerii efectelor. Calculăm mai întâi efectul lui E, lăsând pe U_g scurtcircuitat: obținem B', apoi efectul lui U_g lăsând pe E scurtcircuitat și obținem B''. Rezultatul căutat va fi $B = B' + B''$:



— fig 4 —

Calculul B-ului

$(-J)$

Obs: J-ul era curent spre multiport, B-ul invers.

în figură U_g e o tensiune oarecare (nu neapărat sinusoidală)

Avem efectul lui E:

$$(6)\begin{cases} B_2' = E(G_g + G_2 + G_3 + G_A) = B_E' \\ B_3' = -E G_g \\ B_1' = -E(G_3 + G_A) \\ B_4' = E G_A . \end{cases}$$

și efectul lui U_g:

$$(7)\begin{cases} B_3'' = U_g G_g \\ B_2'' = -U_g G_g \end{cases} \qquad B_1'' = B_4'' = 0$$

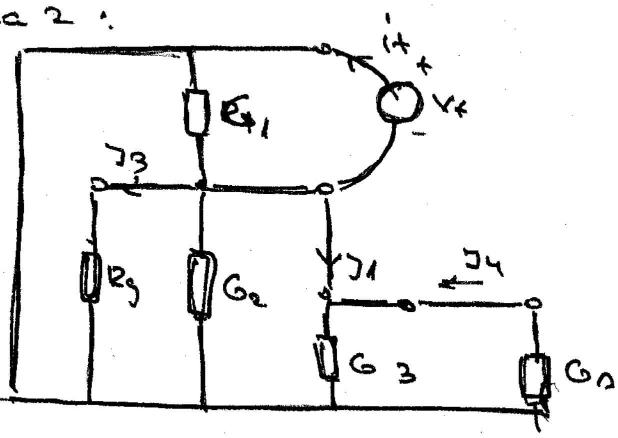
În concluzie:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(G_3+G_\Delta) \\ G_3+G_2+G_g+G_\Delta \\ -G_g \\ G_\Delta \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 \\ -G_g \\ G_g \\ 0 \end{pmatrix} U_g \qquad (8)$$

Calculul lui G 3

Să trecem acum la calculul lui G (se pasivizează mai întâi circuitul):

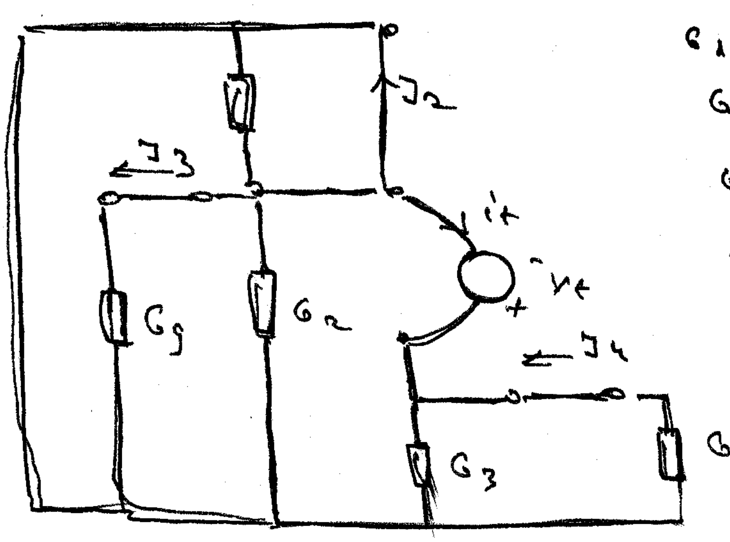
La poarta 2:



-fig 5. Calculul elementelor G la poarta 2.

$$\begin{cases} G_{22} = \dfrac{i_t}{v_t} = G_1 + G_g + G_2 + G_3 + G_\Delta \\ G_{12} = \dfrac{I_1}{v_t} = -(G_3 + G_\Delta) \\ G_{42} = \dfrac{I_4}{v_t} = G_\Delta \\ G_{32} = \dfrac{I_3}{v_t} = -G_g \end{cases} \qquad (9)$$

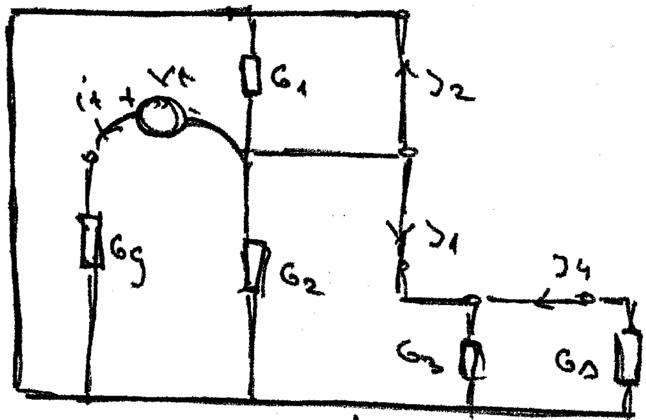
la poarta 1:



$$\left.\begin{aligned} G_{11} &= G_3 + G_\Delta \\ G_{31} &= 0 \\ G_{21} &= -(G_3 + G_\Delta) \\ G_{41} &= -G_\Delta \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

-fig 6-

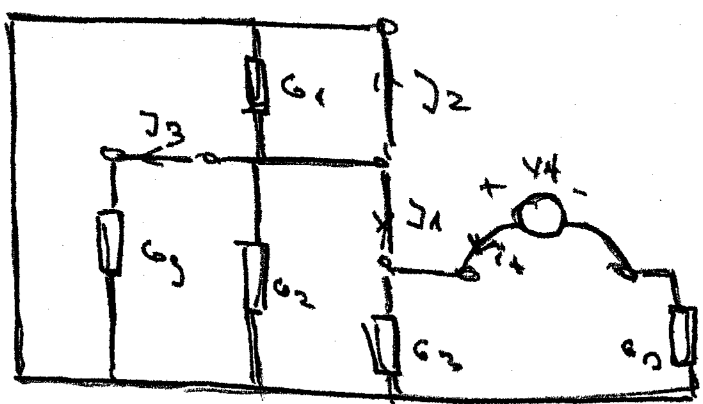
La poarta 3



- fig 7

$$\left.\begin{aligned} G_{33} &= G_g \\ G_{23} &= -G_g \\ G_{13} &= G_{43} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

La poarta 4 :



- fig 8

$$\left.\begin{aligned} G_{44} &= G_D \\ G_{24} &= G_D \\ G_{14} &= -G_D \\ G_{34} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

În concluzie G este :

$$G = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} G_3+G_D & -(G_3+G_D) & 0 & -G_D \\ -(G_3+G_D) & G_1+G_2+G_3+G_D+G_g & -G_g & G_D \\ 0 & -G_g & G_g & 0 \\ -G_D & G_D & 0 & G_D \end{pmatrix} \quad (13)$$

4 Obținerea ecuației în formă normală

Să avem acum (13), (8) toate elementele relației

$$\dot{q}' = G\,v' - B \qquad (5).$$

Vom mai folosi „relația capitală" (bilă de tăietură)

$$\begin{cases} v' = v \\ i' = -i \end{cases} \qquad (14)$$

și rezolvând ~~subiniarea~~, din partea cealaltă a tăieturii, formată din tranzistor (rezist. neliniară) și cei doi condensatori (rezist. reactivă). Aceste restricții rezultă:

$$(15)\quad \begin{cases} i_1 = \dfrac{d}{dt}\left(c_1 v_1 + c_1 k_1(v_1)\right) + k_1(v_1) - \alpha_r k_2(v_2) \\ i_2 = \dfrac{d}{dt}\left(c_2 v_2 + c_2 k_2(v_2)\right) - \alpha_f k_1(v_1) + k_2(v_2) \\ i_3 = \dfrac{d}{dt}\left(c_3 v_3\right) \\ i_4 = \dfrac{d}{dt}\left(c_4 v_4\right) \end{cases} \qquad (15)$$

Sau scrise pe scurt:

$$(16)\quad i = \frac{d}{dt}\left[c(v)\right] + T F(v) \text{ unde avem: } \qquad (16)$$

$$i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \quad (17) \quad \begin{cases} c(v)|_1 = c_1 v_1 + z_1 k_1(v_1) \\ c(v)|_2 = c_2 v_2 + c_2 k_2(v_2) \\ c(v)|_3 = c_3 v_3 \\ c(v)|_4 = c_4 v_4 \end{cases}$$

($c(v)$ este deci o aplicație diagonală)

$$TF(v) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r \\ -\alpha_f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(v_1) \\ k_2(v_2) \end{bmatrix} \quad (18)\ (18)$$

(pentru respectarea ordinului la adunarea matricilor se poate considera

$$TF(v) = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r & 0 & 0 \\ -\alpha_f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(v_1) \\ k_2(v_2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = TF(v) \quad (19).$$

Relațiile (17) merită o analiză atentă. Ideea de bază în tot ceea ce urmează este că toate cele patru funcții din membrii drepți ai 17 sunt strict monotone și respectiv, dacă $k_1(v_1)$, $k_2(v_2)$ sunt ~~...~~ crescătoare, și iar $c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 0$, $z_1, z_2 \geq 0$. Acest detaliu

(sau ~~$c_1, c_2, c_3, c_4 \geq, z_1, z_2 \geq$~~)

este foarte importantă, care ne permite să afirmăm că fiecare din $C(v)|_K$ <u>admite o inversă</u> ai

$$v_K = C^{-1}(u)_K, \quad K = 1, 2, 3, 4.$$

sau pe scurt $\boxed{v = C^{-1}(u)}$ (20) (Desigur e vorba tot de o aplicație diagonală, care în plus, ~~este tot~~ are toate componentele tot strict crescătoare, negative)

Relațiile (5) (14) (16) conduc la

~~$Gi - B = -$~~

$$Gv - B + \frac{d}{dt}[C(v)] + T F(v) = 0 \text{ sau}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}[C(v)] + TF(v) + Gv = B} \quad (21)$$

Sau cu substituția (20):

$$\boxed{\frac{d}{dt}[u] + T F[C^{-1}(u)] + G\, C^{-1}(u) = B} \quad (22)$$

$$\boxed{v = C(u)} \quad (22\text{bis})$$

<u>Am obținut deci în (22) ecuația diferențială a circuitului în formă normală</u>. Este un mare avantaj căci pentru astfel de forme:

$$\dot{u} = f(u, t) \quad (23)$$

matematicienii au obținut cele mai multe informații privind:

- existența soluțiilor ecuației diferențiale
- unicitatea

- alte proprietăți (continuitate etc)
- algoritmi de calcul aproximativ al soluțiilor (integrare numerică.

~~(Un exemplu ceea ce de astfel de algoritm, sunt algoritmii de integrare multipas,)~~

În ~~penultim~~ par. următoare, vom obține o ecuație de gen 22 pentru o clasă generală de circuite cu tranzistori. Se vor da niște teoreme privind aceste ecuații, a dată obținută. Cum nu vom putea intra în detalii, vom încerca să punctez ideile pe acest exemplu.

~~Descrierea exactă~~

5 (calculul matricei Jacobianului) J_t

În legătură cu ecuația (22) un rol determinant îl va avea matricea Jacobiană a părții algebrice a ecuației și adică J_t (23). Rolul acesta se manifestă pe mai multe planuri

— pt teoreme de existență și unicitate a sol. ec. diferen.

— pt dă informații asupra punctelor singulare

— asigurarea stabilității (v [7] pag 342) proprietăților formulelor de integrare

să-l calculăm așadar pentru problema noastră:

$$J_t = T F[c^{-1}(u)] + G c^{-1}(u)$$

$$(24) \quad J_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \frac{\partial h_3}{\partial u_2} & \frac{\partial h_4}{\partial u_4} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial h_4}{\partial u_1} & - & - & \frac{\partial h_4}{\partial u_4} \end{bmatrix} \quad (24)$$

~~Cum noi la hai aplicația f este diagonală~~

Vom aplica unele teoreme de calcul:

$$J\{TF[c^{-1}(u)] + G\,c^{-1}(u)\} = J\{TF(c^{-1}(u))\} + J(G\,c^{-1}(u))$$

$$= T\,J\{F(c^{-1}(u))\} + G\,J\{c^{-1}(u)\} \qquad (T, G \text{ fiind cte})$$

Dar $J\{F(c^{-1}(u))\} = J\{F\}\big|_{c^{-1}(u)} \cdot J\{c^{-1}(u)\} = \left(\cancel{J\{F\}\big|_{c^{-1}(u)} J\{c(v)\}}\right)$ (25)

(propr. analoagă cazului unidimensional)

Acum observăm că atât $F = \begin{bmatrix} h_1(v_1) \\ h_2(v_2) \\ h_3(v_3) \\ h_4(v_4) \end{bmatrix}$ (26) cât și $c = \begin{bmatrix} c_1v_1 + c_{11}h_1(v_1) \\ c_2v_2 + c_2h_2(v_2) \\ c_3v_3 \\ c_4v_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$ (27)

$E =$

sunt aplicații diagonale, deci Jacobienii matricilor lor nu vor avea termeni decât pe diagonală $\left(\frac{\partial h_1}{\partial v_2} = \frac{\partial h_1}{\partial v_3} = \frac{\partial h_1}{\partial v_4} = 0\right.$ și analoagele$\left.\right)$

Deci

$$J\{F\}\big|_{c^{-1}(u)} = \begin{bmatrix} h_1'(c_1^{-1}(u_1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2'(c_2^{-1}(u_2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3'(c_3^{-1}(u_3)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4'(c_4^{-1}(u_4)) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Mai putem nota pe respectivele $c_k^{-1}(u_k) = g_k(u_k)$

$$J(c^{-1}(u)) = \begin{bmatrix} g_1'(u_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2'(u_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3'(u_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_4'(u_4) \end{bmatrix} \quad (29)$$

cu $g'(u_k) = \left(c_k^{-1}(u_k)\right)' = \frac{1}{c'(v_k)}$ (derivata funcției inverse)

(30)

Pentru deci calcula necesar :

$$J\{c^{-1}(u)\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1(u_1)'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2(u_2)'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3(u_3)'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_4(u_4)'} \end{bmatrix} = (\text{v rel } 17)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 + z_1 k_1'(u_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2 + c_2 k_2'(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_4} \end{bmatrix} \quad (31)$$

și am calculat în final

$$J\{\tau F(c^{-1}(u)) + G c^{-1}(u)\} =$$

$$= T \cdot \begin{bmatrix} k_1'(g_1(u_1)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2'(g_2(u_2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3'(g_3(u_3)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4'(g_4(u_4)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 + c_1 k_1'(u_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2 + c_2 k_2'(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_4} \end{bmatrix}$$

$$+ G \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 + c_1 k_1'(u_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2 + c_2 k_2'(u_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{c_4} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Relație pe care o vom scrie condensat :

$$(33) \quad J_t = T \operatorname{diag} \frac{k_j'(g_j(u_j))}{c_j + z_j k_j'(g_j(u_j))} + G \operatorname{diag} \frac{\cancel{k_j\, g_j}\ 1}{c_j + z_j k_j'(g_j(u_j))} \quad (33)$$

(observăm că pentru $\boxed{j = 3, 4}$, vom lua $\boxed{z_j = 0}$

Pentru aceștia însă $\boxed{k_3 = k_4 = 0}$ (v rel 19) și $\boxed{k_j'(g_j(u_j)) = 0}$

(33 bis) $\boxed{J_t = T D_1 + G D_2}$ cu $D_1 \geq 0$, $D_2 > 0$ (33')

6 $\boxed{\text{Discuția existenței soluției}}$

1) În ceea ce privește teorema de existență a soluției ec. diferențiale, ar fi destul îndeplinirea unei condiții Lipschitz: (v [2], [4])

$$\|f(x) - f(y)\| \le L \|x - y\| \text{, uniform în } (34)$$

$x, y \in R^n$, $t \in R$, și f oarecare. (34)

Ori, dacă am putea arăta că $\|J_u\|$ e mărginită uniform, condiția Lipschitz ar rezulta ca o consecință (v [2], art 13)

Privind atent însă forma (33) este evident că norma lui $\|J_u\|$ este uniform mărginită, căci

$$f'_j[g_j(x_j)] \geq 0$$

$$c_j > 0, \quad z_j \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{c_j + z_j f'_j} \leq \frac{1}{c_j}$$ uniform.

iar $\dfrac{f'_j}{c_j + z_j f'_j}$ → pt $j = 1,2$ este evident pozitiv ~~...~~ și $< \dfrac{1}{z_j}$

→ pt $j = 3,4$ se reduce la 0.

(~~Concluzia : $\|J_u\|$~~)

Concluzia că cele două matrici diagonale sînt uniform mărginite în normă. Înmulțirea cu cele două matrici constante T, G nu poate modifica această mărginire. Deci

$\boxed{\text{Concluzia 1}}$ Ecuația circuitului din fig 1 — 22 — are o soluție unică, $u(t)$, continuă, $\forall$ ar fi

$u(0) = u_0$ condiţiile iniţiale, pentru $t \in [0, \infty)$

Este un rezultat foarte bun, căci în general e greu de găsit un set de condiţii care să asigure existenţa unei soluţii unice, globale ($[0, \infty)$) pentru ecuaţie diferenţială în forma normală.

$\boxed{7}$ Proprietăţile ecuaţiei diferenţiale

Există situaţii cînd din inspecţia ecuaţiilor diferenţiale, putem deduce proprietăţi foarte importante ale acestora.

Ar fi de exemplu util, dacă am reuşi să arătăm că, soluţia ecuaţiei diferenţiale (22) (pe care o ştim că există şi e unică - în urma discuţiei anterioare - pentru orice funcţie regulată de timp) are următoarea proprietate:

$\boxed{\text{Concluzia 2}}$ Pentru două excitaţii distincte $Ba(t)$ şi $Bb(t) \geq 0$, cărora le corespund două soluţii ale ecuaţiilor:

$$\frac{dua}{dt} + TF[C^{-1}(ua)] + G[C^{-1}(ua)] = Ba(t)\quad t \geq 0 \qquad (35)$$

$$\frac{dub}{dt} + TF[C^{-1}(ub)] + G[C^{-1}(ub)] = Bb(t), \quad t \geq 0 \qquad (36)$$

şi $Ba(t)$, $Bb(t)$ continui şi mărginite pe $[0, \infty)$ (regulate atunci dacă $[Ba(t) - Bb(t)] \to \Theta$ pentru $t \to \infty$ (37)

$\Rightarrow ua(t) - ub(t) \to \Theta$ pe $t \to \infty$, cu condiția (77) (pag 392 sau 76 pag 391)

La noi $$B = \begin{pmatrix} -(G_3+G_1) \\ G_3+G_1+G_g+G_2 \\ -G_g \\ G_1 \end{pmatrix} E + \begin{pmatrix} 0 \\ -G_g \\ G_g \\ 0 \end{pmatrix} U_g \quad (38)$$

și pentru $E = ct$ și U_g variabil în timp:

$$Ba(t) - Bb(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -G_g \\ G_g \\ 0 \end{pmatrix} (U_{ga} - U_{gb}) \quad (39)$$

și $Ba(t) - Bb(t) \to \Theta$ este echivalent cu $u_{ga}(t) - u_{gb}(t) \to 0$

Vom arăta deci că, independent de condițiile inițiale, dacă u_{ga}, u_{gb} se apropie la infinit, atunci și soluțiile respective se apropie la infinit.

Pentru a trage această concluzie se vor scade cele două ecuații diferențiale și se va folosi faptul că

$$F[C^{-1}(ua)] - F[(C^{-1}(ub)] = D_1 [ua - ub] \quad (40)$$

unde, datorită monotoniei lui F, D_1 e diagonală pozitivă ($k_3, k_4 = 0 \Rightarrow F$ e nedescrescătoare $\Rightarrow D_1$ e $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $d_1, d_2 > 0$ — mai precis). Se ajunge la

$$\frac{d}{dt}(ua - ub) + (TD_1 + GD_2)(ua - ub) = Ba - Bb \quad (41)$$

cu $D_1 \geq 0$ $\quad D_2 > 0$

Pentru noua ecuație difer. obținută ~~...~~,

(42) $\frac{d}{dt} x + m x = B a^{(t)} - B b(t)$ $(x = u_a - u_b)$

se pornește de la ecuația omogenă:

(43) $\frac{d}{dt} x + m x = 0$ și se arată că dacă există

un ~~...~~ $\exists$ $D > 0$ aî DM e uniform dominantă pe coloane:

(44) $d_j m_{jj} \Rightarrow \sum_{i \neq j} d_{ij} |m_{ij}| \geq \varepsilon$.

(45) atunci (45) $|x_i(t)| \leq K \exp(-\varepsilon t)$ $\forall\, i = 1 \ldots n$
(K depinde numai de d_i și $x_i(0)$)

Ne mai rămîne doar să arătăm că $TD_1 + GD_2$ are proprietatea (44).

Vom lăsa aceasta pentru mai tîrziu. Să observăm că Mare analogă cu Jacobianul matrice din (33) (v 41) și ne-a rămas de arătat despre aceasta că are proprietatea (44).

~~Dar~~, la rezultate de aceste gen ~~legat de asemenea proprietate~~ privind $TD_1 + GD_2$, sau altfel, privind Jacobianul matricea a lui f se va ajunge și pe altă cale:

$\boxed{8}$ Formulele de integrare numerică. Stabilitatea

Să presupunem [?] că sistemul ecuațiilor diferențiale:

(46) $X' = f(X, t)$, $t \geq 0$, care am arătat că

are soluția gl. ~~y = ~~ $x = x(t)$ satisfăcînd condiții inițiale

(47) ~~X~~ $x^0 = x(0)$.

Rezolvarea însă a acestei ecuații nu oferă în general o formulă explicită. Se folosesc metode numerice de integrare. O primă problemă care se poate pune, indiferent de metoda folosită este și ce măsură se propagă erorile, inerente introducerii
- în condițiile inițiale (calculate aprox)
- valorile funcțiilor f (rezultate dintr-o la nivelul lor din ecuații implicite f. - la noi nu e cazul).

Ne interesăm așadar, dacă se rezolvă sistemul:

$$\begin{aligned} &(48) \quad x' = f'(x,t), \quad t \geq 0 \\ &(49) \quad x^0 = x'(0) \end{aligned}$$

în ce măsură erorile vor fi admisibile. Ne-ar fi de dorit ca dacă: $\|f' - f\| \leq \delta_1$, $\|x'(0) - x(0)\| \leq \delta_2$ (50) sunt micile variații ale parametrilor ecuației

lor să le corespundă o variație „mică" a soluției:

(51) $\|x'(t) - x(t)\| \leq \varepsilon$.

Mai exact, ne interesăm dacă pt orice ε dat (precizie dorită) vom găsi δ_1, δ_2 a.î. să se respecte relația 51.

Dacă acest lucru este posibil spunem că soluția reprezentată e stabilă.

Dacă soluția este stabilă și în plus

$\|x'(t) - x(t)\| \to 0$ pt $t \to \infty$ soluția este asimptotic stabilă.

Se arată că Jacobianul $[J_t]$ poate fi din nou extins de tolaritor. Astfel, dacă $[J_t]$ are toate valorile proprii, în (uniform în $x \in R^n$) semiplanul strict stâng) stabilitatea este asigurată asimptotic pentru o anumită formulă de integrare.

adaptare din art [13]

Dacă la aceasta mai adăugăm $\boxed{\text{teorema noi}}$

că: dacă P şi φ sunt două matrici reale aî P e tare dominantă pe coloane, şi $\exists$ $D > 0$ diagonală aî DP e tare dominantă pe coloane iar $D\varphi$ tare dominantă pe coloane, atunci valorile proprii a lui $P D_1 + \varphi D_2$ se află pentru $\forall D_1 \geq 0$ (>0), $D_2 > 0$ în semiplanul drept strict.

Să remarcăm că la noi, am calculat Jacobianul

(32) $J_t = T D_1 + G D_2$ cu $D_1 \geq 0$ $D_2 > 0$

şi că ecuaţia (22) este aî

(5(32)) $\frac{d}{dt}(u) = -\{T F(c^{-1}(u)) + G(c^{-1}(u))\}$ aşa că noi am calculat $-[J]$-ul ecuaţiei diferenţiale. De aceea condiţia de stabilitate este ca pe J calculat, valorile proprii să fie în semiplanul strict drept.

Din nou ajungem la nevoia de a arăta că $\exists$

$D > 0$ aî DT e tare dom pe coloane iar $D\varphi$ tare dominantă pe coloane, adică ceva analog condiţiei (44).

($D(T+\varphi)$ să fie măcar tare dominant pe coloane).

Avem acum mai multe motive să ne ocupăm de următoarea problemă: există $D > 0$, aî

DT e tare dom pe coloane și DG tare dom pe coloane?

~~Acest~~ 9 [Legătura cu ecuațiile statice] ~~Criteriul aparținerii la clasa D. Proprietăți~~

De la început să remarcăm că problema nu ne era străină. Astfel, la pag 257, ~~277~~, în vederea de a demonstra ~~ceva~~ o teoremă asupra ecuației

$$TF(v) + Gv = B \qquad (53)$$

văzusem că în general, G nefiind strict dominantă pe coloane, nu vom putea spune cu atât că $T^{-1}G \in P_0$ și să deducem de aici unicitatea soluției.

~~Dacă~~. La fel, G tare dominantă pe coloane ar fi însemnat $T^{-1}G \in P$ (v. 4B) și de aici am fi dedus și existența soluției.

~~Remarcăm că~~
O primă observație ar fi că, dacă G e strict dominantă pe coloane (tare), rezultatele dorite pot fi afirmate imediat. ~~În~~ Am văzut în Apd A că se va ajunge la G să fie strict dominantă pe coloane oricând s-a format o topologie cu bornă comună (nu e cazul nostru). Tot în Apd A, remarcam (obs 15 pag 333) că dacă în plus, există legături existente între toate ~~nodurile de~~ și nodul comun, G va fi chiar tare dominant pe coloane.

De aici vom obține concluzia: pe clasa rețelelor cu

* bornă comună și cu rez. de intrare și colector prezente,

G va fi tare dominant pe coloane.

Ori, dacă G e tare dom pe coloane, T tare dom pe coloane, e suficient să luăm $D = I$ și DT, DG sînt tari dominante pe coloane, așa cum doriam!

Acum să presupunem (ca la pag 256) că $\exists\, D$ ai DT, DG sînt tare dom pe coloane. Atunci

(54) $DTF(v) + DGv = DB$ are în mod sigur o soluție, unică, căci $(DT)^{-1}(DG) \in P$. (T5 cap 4).

Dar pentru noi,

(55) $TF(v) + Gv = B$ reprezintă tocmai setul de ecuații care dă punctele singulare. Vedem deci că, dacă (în ecuația 22 se face $\frac{du}{dt} = 0$), dacă există $D > 0$ ai DT, DG sunt tare dominante pe coloane, atunci setul ecuațiilor ce dau punctele singulare are o soluție, unică.

Am expus din nou la condiția:

$\exists\, D > 0$ ai $DT \xrightarrow{\text{tare dom}}$ pe coloane DG tare dom pe coloane, și vom spune atunci că $(T, G) \in \mathcal{D}^1$, sau punând T considerat fix, că $G \in \mathcal{D}^1(T)$.

~~(La pag 257 se găsește un calcul simplu a ceea ce urmează că T să fie dominant pe coloane:)~~

Ne-am putea întreba de ce se mai trebuie să facem o demonstrație, cînd am arătat deja că pentru excitatie cu 1 bucurcar, 7 o soluţie unică a ecuaţiilor de pe statie, mai clar cei G, dacă excitatia este riguros slab dominanta pe toleranta.

Atenţie însă: Aici nu este vorba de aceeaşi G care intervine în ecuaţia statică:

$$(56)\begin{cases} T_1 F_1(v) + G_1 v = B_1 \longrightarrow \text{ecuaţia statică} \\ T_2 F_2(v) + G v = B_2 \longrightarrow \text{ec. pentru regulare} \\ \qquad (\text{presupunem } B(t) = k = B). \end{cases}$$

Aceste ecuaţii, deci au aceleaşi forma se deosebesc:

1) Prin dimensiunea:

7 – prima de din 2

– a 2ª de din 4.

2) Prin matricile ce intervin, mai ales G, căci

$$(57)\quad G_1 = \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix} \quad (\text{v. cap } 3)$$

$$G = \begin{pmatrix} G_3+G_5 & -(G_3+G_5) & 0 & -G_5 \\ -(G_3+G_5) & G_1+G_2+G_3+G_5+G_9 & -G_9 & G_5 \\ 0 & -G_9 & G_9 & 0 \\ -G_5 & G_5 & 0 & G_7 \end{pmatrix}$$

~~Apare~~ În această scriere, se vede clar influenţa aceasta, în regim „dinamic" a elementelor suplimentare G_5 şi G_9 (E o imagine ~~generală~~ multidimensională a cunoscutei diferenţe dintre dreapta de sarcină statică şi cea de sarcină dinamică) în afară

$v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ $i' = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ $v' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ $i' = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix}$

(statice)

Acum ne poate util să reluăm ecuațiile găsite până acum:

1) ecuațiile statice

$$\begin{pmatrix} 1 & -k_T \\ -k_T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1(v_1) \\ k_2(v_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_3 \\ G_3+G_2 \end{pmatrix} E_c \quad (58)$$

2) ecuațiile diferențiale

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c_1(v_1) \\ c_2(v_2) \\ c_3(v_3) \\ c_4(v_4) \end{pmatrix} + \overset{T}{\begin{pmatrix} 1 & -k_T & 0 & 0 \\ -k_T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{F}{\begin{pmatrix} k_1(v_1) \\ k_2(v_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \overset{G}{\begin{pmatrix} G_2+G_D & -(G_2+G_D) & 0 & -G_D \\ -(G_2+G_D) & \begin{smallmatrix} G_1+G_2+G_3 \\ +G_D+G_g \end{smallmatrix} & -G_g & G_D \\ 0 & -G_g & G_g & 0 \\ -G_D & G_D & 0 & G_D \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -(G_2+G_D) \\ G_2+G_3+G_g+G_D \\ -G_g \\ G_D \end{pmatrix} E_c + \begin{pmatrix} 0 \\ -G_g \\ G_g \\ 0 \end{pmatrix} U_g}_{B} \quad (59)$$

3) punctele staționare:

$$\frac{d}{dt} v = 0 \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = K_1 & v_3 = K_3 \\ v_2 = K_2 & v_4 = K_4 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{\underset{(mare)}{\vec{T}} \cdot F(v) + G v = B}$$ adică

$$(60)\left\{\begin{aligned} & k_1(v_1) - k_T k_2(v_1) + (G_2+G_D)\,v_1 - (G_2+G_D)\,v_2 - G_D v_4 = -(G_2+G_D)E_c \\ & -k_T k_1 + k_2(v_2) - (G_2+G_D)\,v_1 + (G_1+G_2+G_3+G_D+G_g)\,v_2 \\ & \qquad - G_g v_3 + G_D v_4 = (G_2+G_3+G_g+G_D)E_c - G_g U_g \\ & -G_g V_2 + G_g V_3 = -G_g E + G_g V_g \\ & -G_D V_1 + G_D V_2 + G_D V_4 = G_D E \end{aligned}\right. \quad (60)$$

4) Dar sistemul (60) mai poate fi văzut, ca sistem de aflare a condițiilor inițiale pe toți condensatorii V_1, V_2, V_3, V_4, în vederea unei schimbări ulterioare ale surselor (sau, lăsând U_g, înainte de aplicarea sa)

iată deci, se ajunge și în această situație la un sistem algebric de forma $T F(v) + G v = B$, în rezultatele capitolelor precedente sunt aplicabile.

~~...~~ Tabloul de mai sus ~~dovedeşte~~ poate să explice toate ~~...~~ observaţiile făcute în introducerea la Apl. A.

Să observăm că în cazul particular al problemei noastre, ultimele două ecuaţii pot fi rezolvate în V_3, V_4 şi introduse în primele. Vom obţine astfel sistemul:

$$(61)\quad \begin{cases} V_3 = V_2 - E + V_g \\ V_4 = E + V_1 - V_2 \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} h_1(v_1) - \alpha_r h_2(v_2) + (G_3 + G_D)v_1 - (G_3 + G_D)v_2 - G_D(E + V_1 - V_2) = \cancel{-(G_3+G_D)} \\ \qquad = -(G_3+G_D)E \\ -\alpha_f h_1(v_1) + h_2(v_2) - (G_3 + G_D)v_1 - (G_1 + G_2 + G_3 + G_D + G_g)v_2 \\ \qquad - G_g(V_2 - E + U_g) + G_D(E + V_1 - V_2) = (G_1 + G_3 + G_g + G_D)E \cancel{G_g U_g} \\ \qquad - G_g U_g \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$(62)\quad \begin{cases} h_1(v_1) - \alpha_r h_2(v_2) + v_1 G_3 - v_2 G_3 = -G_3 E \\ -\alpha_f h_1(v_1) + h_2(v_2) - G_3 v_1 + (G_1 + G_2 + G_3)v_2 = (G_1 + G_2)E \end{cases}$$

adică tocmai ecuaţiile statice!

Deci, sistemul plalar singular (cu cond. iniţiale ~~prin~~ cu cond. galvanice) s-a destrămat în

- un sistem ce dă V_1, V_2: sistemul static
- o rel. liniară (61) ~~ce~~ cea care dictează V_3, V_4

(condiţiile iniţiale pe condensatori).

Practic vom proceda astfel: în domeniul caracteristicii cu galvanici, găsim ecuaţiile (62) şi apoi prin inspecţia circuitului (sau 61) determinăm condiţiile iniţiale pe condensatori.

Atenţie însă! Sistemul 62 nu-l poate înlocui pe (60) atunci când se studiază stabilitatea soluţiilor lui 72 (ec. diferenţială)

De aceea putem garanta unicitatea sint ca dacă ploli singu-lara față a unei suprafețe : ~~DT + DG barr~~ $G \in \mathcal{D}(T)$. Totuși, în urma calculului direcției, privind stabilitatea formulelor de integrare și propr. ecuațiilor diferențiale, să vedem să arătăm că, în problema noastră G care are această proprietate (vezi o care?)

10 $\boxed{\text{Apartenența la clasa } ①}$

DT ~~T~~ fare dominantă pe coloane devine:

$$\begin{pmatrix} d_1 & -\alpha_f d_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_f d_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$ fare dominantă, deci

$$\left| \begin{array}{l} d_1 \geq \alpha_f d_2 \\ d_2 \geq \alpha_f d_1 \\ d_3 > 0 \\ d_4 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \alpha_f < \dfrac{d_1}{d_2} < \dfrac{1}{\alpha_f} \\ d_3, d_4 > 0 \end{array}} \quad (63)$$

Acum să căutăm datele pentru care DG fare dominantă.

(64) $$DG = \begin{pmatrix} d_1(G_3+G_n) & d_1(-(G_3+G_n)) & 0 & -d_1 G_n \\ -d_2(G_3+G_n) & d_2(G_1+G_2+G_3+G_n+G_g) & -d_2 G_g & d_2 G_n \\ 0 & -d_3 G_g & d_3 G_g & 0 \\ -d_4 G_n & G_n & 0 & G_n \end{pmatrix} \quad (64)$$

~~Adic~~ fare dominantă pe coloane adică:

(65) $d_1(G_3+G_n) > d_2(G_3+G_n) + d_4 G_n$ (65)

(66) $d_2(G_1+G_2+G_3+G_g+G_n) > d_1(G_3+G_n) + d_3 G_g + d_4 G_n$ (66)

(67) $d_3 G_g > d_2 G_g$ (67)

(68) $d_4 G_n >$ ~~d_1~~ $d_1 G_n + d_2 G_n$ (68)

(cu $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$, $d_4 > 0$)

Din 67 : $\boxed{d_3 > d_2}$ (69)

Din 68 : $\boxed{d_4 > d_1 + d_2}$ (70)

Din 65 : $d_1 > d_2 + \frac{d_4 G_1}{G_3 + G_1}$

în plus (63) $\left\{ \begin{array}{l} d_1 > \alpha_f d_2 \\ d_1 < \frac{1}{\alpha_r} d_2 \end{array} \right.$

sau $d_1 - d_2 > \frac{d_4 G_1}{G_3 + G_1}$

~~vat~~ posibilă dacă $\boxed{d_1 > d_2}$ (71) și $\boxed{d_4 < \frac{(d_1 - d_2)(G_3 + G_1)}{G_1}}$ (72)

Relații care pentru a fi posibilă trebuie ca (v. 70)

$$(d_1 - d_2)\left(1 + \frac{G_3}{G_1}\right) > d_1 + d_2$$

$$d_1 \cdot \frac{G_3}{G_1} > d_2 \left(2 + \frac{G_3}{G_1}\right)$$

sau $\boxed{\frac{d_1}{d_2} > \frac{G_1}{G_3}\left(2 + \frac{G_3}{G_1}\right) = \frac{2G_1}{G_3} + 1}$ (73') > 1

La rândul ~~lui~~ ei și necesară relație e posibilă pentru (v. 63)

$\frac{d_1}{d_2} < \frac{1}{\alpha_r} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\alpha_r} > \frac{2G_1}{G_3} + 1}$ (73) (altfel nu ∃ D convexă)

În sfârșit, ultima relație (66)

$$~~d_2~~ \; d_2 (G_1 + G_2 + G_3 + G_g + G_1) > d_1 G_3 + d_1 G_1 + d_3 G_g + d_4 G_1$$

$$\Rightarrow \boxed{d_3 < \frac{d_2 (G_1 + G_2 + G_3 + G_g + G_1) - d_1 (G_3 + G_1) - d_4 G_1}{G_g}} \quad (74)$$

care este posibilă dacă

$$d_2 (G_1 + G_2 + G_3 + G_g + G_1) > d_1 (G_3 + G_1) + d_4 G_0 \quad (74')$$

adică $d_2 (G_1 + G_3 + G_2 + G_g + G_1) - d_1 (G_3 + G_1) > 0$ sau

$$\frac{d_1}{d_2} < \frac{G_1 + G_3 + G_2 + G_g + G_1}{G_3 + G_1} = 1 + \frac{G_1 + G_2 + G_g}{G_3 + G_1} \quad (75)'$$

și această ultimă condiție se poate îndeplini dacă

$\frac{d_1}{d_2} > \alpha_f$ (o.k.) $\frac{d_1}{d_2} > 1$ (o.k.)

$\frac{d_1}{d_2} > \frac{2G_1}{G_3} + 1$ ~~și deci este necesară~~ condiția :

Trebuie mai vom urmări condiția mai tare pe care o impune (74') (vezi 70) și anume:

$$d_2(G_1+G_2+G_3+G_4+G_5) > d_1(G_3+G_5) + (d_1+d_2)G_5 \quad \text{sau}$$

$$d_2(G_1+G_2+G_3+G_4) > d_1(G_3+2G_5) \quad \text{sau}$$

$$\boxed{\frac{d_1}{d_2} < \frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{G_3+2G_5}} \quad (75)$$

Această ultimă condiție va fi posibilă, dacă o armonizăm cu (73'). Iată deci ultima verificare:

$$\frac{2G_5}{G_3}+1 < \frac{d_1}{d_2} < \frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{G_3+2G_5} \quad (76)'$$

Să rezumăm: vom avea întotdeauna d_1, d_2, d_3, d_4 care să facă DT, DG tari dominante pe coloane dacă:

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha_r}-1 = b_1 > \frac{2G_5}{G_3} & (\alpha) \\ (2G_5+G_3)^2 < G_3(G_1+G_2+G_3+G_4) & (\beta) \end{array}\right. \quad (76)$$

Condiția (β) mai poate fi scrisă:

$$4G_5^2 + 4G_5G_3 + \cancel{G_3^2} < G_3(G_1+G_2+G_4) + \cancel{G_3^2}.$$

unde, dacă α este îndeplinită: $G_5 < \frac{bG_3}{2}$ și ar fi suficient să arătăm că:

$$4\frac{b^2G_3^{\cancel{2}}}{4} + 4G_3\cdot\frac{b\cancel{G_3}}{2} < \cancel{G_3}(G_1+G_2+G_4)$$

sau
$$\boxed{\frac{G_1+G_2+G_4}{G_3} > b^2+2b} \quad (\gamma)$$

Să vedem acum ce exprimă, în mod obișnuit, condițiile $(\alpha)(\gamma)$, suficiente pentru ca să $\exists$ $D>0$ aî DT, DG tari dominante pe coloane, deci (T. pag 383) $TD_1 + G D_2$ are $\forall D_1 \geq 0, D_2 > 0$ valorile proprii în semiplanul drept, deci concluzia 2, de stabilitate este valabilă

În mod curent $\alpha_r \approx 0.98 \times 0.5$ deci

(α) : $b=1 > \frac{2G_1}{G_3}$ sau $\boxed{2R_3 < R_1}$ $(77')$ — această condiție este îndeplinită în mod firesc, dacă etajul sumator are o impedanță de intrare mare

$(\beta) \rightarrow (\gamma)$ (suficient) $\frac{G_1+G_2+G_3}{G_g} > b^2 + 2b = 3$ deci

$$\boxed{G_1 + G_2 + G_3 > 3\, G_g} \quad (77'')$$

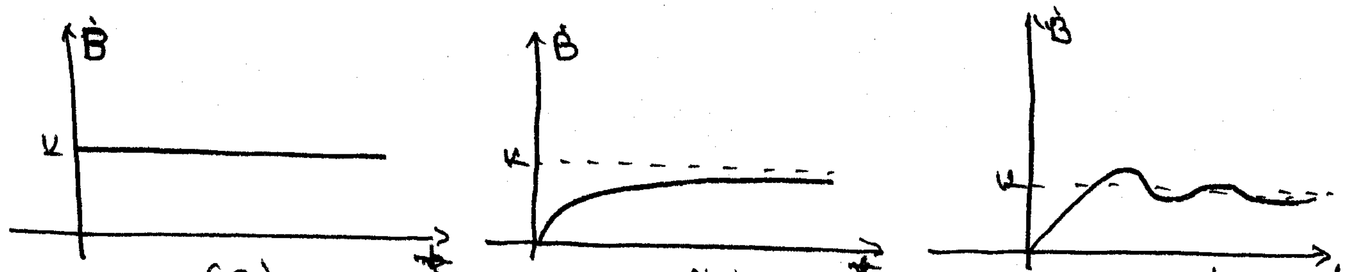
Și această condiție este îndeplinită firesc, căci $G_g = \frac{1}{R_g}$ este mare (R_g a sursei este mică)

Deci sigur, condițiile $(77)'$, $(77'')$ au un rol extrem de important în sensul a se asigura:

- stabilitatea ecuației diferențiale (în sensul Conc 2)
- stabilitatea formulelor de integrare numerică pe care le vom aplica.
- rezultatul paragrafului următor (Corolar al concluziei 2) privind răspunsul la semnal treaptă

11 Răspunsul la semnal treaptă

Dacă în mod obișnuit prin excitație „treaptă" se înțelege semnalul din fig de mai jos - 9a -, adică un semnal fără acoperire totală fizică, vom admite pe ca „semnalul treaptă" să aibă forma din fig 9b, adică $B(t) \to K$ pentru $t \to \infty$. Admitem chiar și forme mai generale a lui $B(t)$, cu condiția să fie o funcție regulată - 9c :



(a) (b) (c)

- fig 9 - „Semnale cvasitreaptă"

Deci (78) $B(t) - B_\infty \to 0$, pentru B_∞ un vector ct.

Ne întrebăm dacă B_∞ poate produce soluție a ecuației diferențiale (22) (pag 374). Observăm că, dacă $u_b = u_\infty = ct$ ar fi o soluție staționară $\frac{du_b}{dt} = 0$, deci ecuația (22) ar fi satisfăcută dacă $T\,F[C^{-1}(u_\infty)] + G\,C^{-1}(u_\infty) = B_\infty$ (79)

ce este tocmai ecuația (60) (pag 384) care deci produce la siguranța pentru $B_\infty = K$ (astfel: u_∞ este valoarea condițiilor inițiale, dacă avem ca inițial $B = B_\infty$)

Astfel, apare problema dacă există o soluție a ecuației 79. Aceasta e o problemă de tipul discutat la cap IV. Putem aborda două maniere:

- directă: folosim calculul punctului precedent care oferindu-ne condiții suficiente pentru ca G, T e D' ne asigură că $(DT)^{-1}(DG) \in P$, și ca urmare, existența și unicitatea soluțiilor lui 79

- folosind calculele de la pag 388, am văzut că avem asigurată concluzia fără a mai cere îndeplinirea vreunei condiții de genul (77)

Astfel, avem rigori de existența și unicitatea lui u_∞. Acum, noi avem dreptul de particularizat concluzia lui 2 (pag 379), introducând în (35) pe $B(t)$ ~~...~~ „cvasitreaptă" și pe B_∞ în (36) și obținem

$\boxed{\text{Concluzia 3}}$ (stabilitatea asimptotică)

Dacă $B(t)$ este un „atac" „cvasitreaptă", adică $\exists B_\infty$ a.î. $B(t) - B_\infty \to \theta$, atunci există un vector constant u_∞ a.î. $[u(t) - u_\infty] \to \theta$, indiferent de condițiile inițiale, dacă sînt îndeplinite condițiile (76) (sau 77)

Maniera stabilirii acestui rezultat variază de la rîn despre utilizarea teor. din cap III a lucrării

12 Calculul soluțiilor | integrare numerică

Ecuația (22), în mod obișnuit rezolvată prin folosirea <u>formulelor de integrare numerică multipunct înscrise</u>:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \sum_{k=0}^{r} a_k y_{n-k} + h \sum_{k=-1}^{r} b_k \tilde{y}_{n-k} & (80) \\ \text{cu } \tilde{y}_{n-k} = -f\left[y_{n-k}, (n-k)h\right] & (81) \end{cases}$$

Să analizăm cazul particular

(82) $b_{-1} > 0 \quad h > 0$ în care:

$$(83) \quad y_{n+1} + h b_{-1} f(y_{n+1}, (n+1)h) = \sum_{k=0}^{r} a_k y_{n-k} + h \sum_{k=0}^{r} b_k \tilde{y}_{n-k}$$

în care dacă introducem:

$$(84) \quad f(u,t) = T F(C^{-1}(u)) + G C^{-1}(u) - B(t)$$

obținem:

$$\boxed{y_{n+1} + h b_{-1} \left\{ T F(C^{-1}(y_{n+1})) + G C^{-1}(y_{n+1}) \right\} = g_n} \quad (85)$$

$$(86) \quad \text{cu } g_n = \sum_{k=0}^{r} a_k y_{n-k} + h \sum_{0}^{r} b_k \tilde{y}_{n-k} + h b_{-1} B((n+1)h)$$

Ecuația 85, care apare la fiecare pas al algoritmului de integrare numerică implicită, <u>este din nou o ecuație algebrică neliniară, de tipul analizat în lucrare</u>

Este interesant de analizat (vezi teoremele care urmează) care este legătura dintre „calitățile" ecuației (85) și cele ale ecuației atașate sistemului rezistiv

(87) $T F(C^{-1}(y_{n+1})) + G C^{-1}(y_{n+1}) = B$

(detalii în paragr. următor) Pentru moment, să facem (88)' $C^{-1}(y) = u$, deci

$$\begin{cases} (88) & TF(u) + Gu = B \\ (89) & C(u) + h b_{-1} \{ TF(u) + Gu \} = B_1 \end{cases}$$

sunt cele două ecuații a căror legătură ne interesează.

Ecuația (88) are o soluție unică dacă $(\alpha) \begin{cases} T^{-1} G \in P_0 \\ \det G \neq 0 \end{cases}$ (v. cap IV)

(de fapt am verificat doar unicitatea acestei soluții), și o dată cu aceasta și $v = C(u)$ va fi unic.

Pentru ecuația (89), putem proceda:

(90)

$C(u) = C \cdot u + Z F(u)$ (v. rel (17) pag 374)

cu $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Deci:

$$C \cdot u + Z F(u) + h b_{-1} T F(u) + h b_{-1} G u = B_1$$

(91) $(Z + h b_{-1} T) F(u) + (C + h b_{-1} G) u = B_1$

și se va impune (pentru existență și unicitate) ca

$$(\beta) \begin{cases} (Z + h b_{-1} T)^{-1} (C + h b_{-1} G) \in P_0 \\ \det (C + h b_{-1} G) \neq 0 \end{cases}$$

Și legătura dintre α și β este evidentă.

Se observă că:

- dacă Z şi C sunt cu elemente suficient de mici, β este îndeplinită când α este îndeplinită

Dar aceasta presupune un h suficient de mic, ceea ce ar putea influenţa negativ întregul proces (viteza calculului). Teoremele din paragr. precedent, vor depăşi acest impas. <u>În anumite condiţii ele ne vor asigura că, oricând α are o soluţie unică, la fel are şi β!</u> (<u>independent de mărimea pasului</u>).

Toate aspectele urmărite la acest punct puteau fi deduse prin simpla particularizare a teoremelor din paragraful următor. Am intrat însă în detalii tocmai pentru a uşura acomodarea cu aceste teoreme şi a le sublinia aplicabilitatea.

3 Obţinerea ecuaţiei diferenţiale în formă normală, pentru un circuit cu tranzistoare

Se porneşte de la modelul Bunnel al tranzistorului - pag 71 -. Pentru început, să considerăm clasa particulară a circuitelor, <u>formate numai din tranzistoare, elemente liniare şi surse independente reglate</u> (<u>Clasa 1</u>)

Această clasă poate apare de exemplu în cazul circui