(B) Clase speciale de matrici ~~...~~.

Consider că anexele cap B sunt o introducere suficientă către definițiile:

(1) Clasa matricilor P_0

Încercând să rezolvăm o problemă de unicitate, am ajuns (v pag 103) la concluzia că unicitatea ar fi asigurată pentru ecuația $F(v) + Av = B$, dacă f-urile ar fi strict crescătoare și dacă A ar avea proprietatea că

$$\det\left\{\begin{pmatrix} d_1 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & d_n\end{pmatrix} + A\right\} \neq 0 \quad \forall d_1, \dots, d_n > 0. \qquad \text{(rel 107)}$$

și am numit această clasă P_0. Ulterior am mai ajuns la ea, din diverse motive.

Desigur că relația de mai sus se poate dovedi greu de verificat. Există însă mai multe caracterizări echivalente pentru clasa P_0. Astfel, am putea lua oricare din aceste caracterizări ca definiție, restul vor fi proprietăți (teoreme).

Deci, ~~...~~

Definiție O matrice A ($n \times n$) de elemente reale aparține $\boxed{\text{clasei } P_0}$ dacă și numai dacă (d. ș. n. d.):

$$(6.5)\quad \det(A + D) \neq 0 \quad \forall\, D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & d_n\end{pmatrix}, \text{ cu } d_i > 0.$$

Numim o matrice $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ matrice diagonală și notăm pe scurt $D > 0\ (\geq 0) \iff d_k > 0\ (\geq 0)$ $\forall k = 1 \dots n$

(matrice diagonală pozitivă (nenegativă))

<u>Proprietăți echivalente</u>, pt $A \in P_0$

(1) Orice minor principal a lui A este ~~pozitiv~~ nenegativ. (66) (66)

(<u>Definiție</u>
<u>minor principal</u>: determinant format la intersecția a k linii cu cele k coloane corespunzătoare de aceleași indici.

numărul det. principali este $2^N - 1$ după cum se vede

din: $\begin{array}{c|c} & 1 \; \ldots \ldots \; n \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ \vdots & \\ n & \end{array}$: determinantul principal dat e o restricție a unei mulțimi ∀ din mulțimea $\{1, \ldots, n\}$ a indicilor liniilor (v. Ape. C)

– ~~câte a cole~~ indicii coloanelor sortate vor coincide cu a liniilor.

Deci numărul lor este nr. de submulțimi a mul- ~~a lui~~ țimii ∀ $\{1 \ldots n\}$, adică 2^n, din care se scade mulțimea vidă $\Rightarrow 2^n - 1$.

(2) ∀ vectorul $x \neq \theta$, există un indice k a.î. $x_k \neq 0$ și $x_k (Ax)_k \geq 0$ (67)

<u>Observații</u>

Am folosit această proprietate în calculul unghiului soluției de la pag 200, unde am și demonstrat-o pentru $n = 2$.

(3) $\forall x \neq \theta$, ∃ o matrice diagonală $D_x \geq 0$ a.î. (68)

$\langle x, D_x x \rangle > 0$ și $\langle Ax, D_x x \rangle \geq 0$. <u>Obs</u> $\langle \; \rangle$ e produsul scalar

(4) Orice valoare proprie a lui A, sau a unui minor principal oarecare e nenegativă (≥ 0) (69)

<u>Valoare proprie</u>: λ a.î. ∃ un x pt care

$Ax = \lambda x$.

② Clasa matricelor P

Această clasă poate fi definită prin oricare din proprietățile echivalente (analoage celor de la P_0):

(70) 1) Orice minor principal este pozitiv (70)

(71) 2) $\forall$ vectorul $x \neq 0$, există un indice k a.î. $x_k (Ax)_k > 0$. (71)

(72) 3) $\forall x \neq 0$, există $D_x > 0$ (diagonală) a.î. $\langle Ax, D_x x \rangle > 0$ (72)

(73) 4) orice valoare proprie a lui A, la fel ca a oricărui minor principal este pozitivă (>0). (73)

Este evident din definiție că, ~~dacă A∈~~ dacă $A \in P_0$, atunci $A \in P$, deci $\boxed{P_0 \subset P}$

Se poate arăta mai mult și anume:

$\boxed{\text{Teorema 1}}$: Dacă $A \in P_0$, atunci $\forall D \geq 0$ ($D > 0$) ~~atunci~~ $D + A \in P_0$ (~~D+A~~ respectiv $D + A \in P$).

Reciproc: dacă $A \in P$, există o matrice diagonală $D > 0$ a.î. $A - D \in P_0$.

~~(Teorema 2 : Dacă A∈)~~

$\boxed{\text{Teorema 2}}$: Dacă $A \in P$, atunci $A^{-1} \in P$

Această teoremă are o analogă mai tare:

$\boxed{\text{Teorema 3}}$: Dacă $A \in P_0$ și $\det A \neq 0$, atunci $A^{-1} \in P_0$

③ Alte clase de matrici și relații între ele

Spunem că o matrice A este:

tare dominantă pe linii: dacă $a_{ii} > \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ (74)

slab dominantă pe linii: dacă $a_{ii} \geq \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$ (75)'

tare dominantă pe coloane : $a_{ii} > \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} |a_{ji}|$ (75)

slab dominantă pe col. $a_{ii} \geq \sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} |a_{ji}|$ (75)'

(se cere : elementele de pe diagonală, majorează suma modulelor celorlalte elemente de pe linia resp. (coloana).

A să e simetrică : $A = A^T$ (transpusa) (76)

(A^T – transpusa matricii A)

~~A e pozitiv definită~~

O matrice simetrică şi dominantă pe linii, va fi automat şi pe coloane. O vom numi matrice dominantă.

~~O matrice A se numeşte~~

matrice pozitiv definită : A, care are proprietatea că

$\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall x \in R^n$ (77)

(mai notăm produsul $\langle \ \rangle$ şi cu $(\ )$)

~~încercări de~~

pozitiv semidefinită : A, cu proprietatea că

$\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in R^n$. (77)'

In general, pentru definiţiile de mai sus nu am cerut ca A să fie simetrică. Dacă acest lucru se va întîmpla, vom putea folosi teoria formelor patratice, teorema lui Sylvester etc. In general A va putea fi adusă la forma canonică : $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_p \end{pmatrix}$ cu $d_p \gtrless 0$.

De aceea este evident că dacă $A \in P_0$ (respectiv $A \in P$) şi e simetrică, ea este automat pozitiv semidefinită căci minorii principali diagonali sunt $\geq 0 \Rightarrow d_1, \dots, d_n \geq 0$.

La fel $\left.\begin{array}{l} A \in P \\ A \text{ simetrică} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ pozitiv definită.

Deci

$\boxed{\text{Teorema 4}}$ $\left.\begin{array}{l} A \in P_0 \\ A \text{ simetrică} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ poz. semidefinită

$\left.\begin{array}{l} A \in P \\ A \text{ simetrică} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ poz definită.

Astfel, ne apare matricea A ca o extensie a noțiunilor de matrici poz definite (semidefinite) pentru care s-au arătat la început diversele teoreme de calitate a ecuațiilor.

Într-adevăr, se arată că:

$\boxed{\text{Teorema 5}}$: Matricile pozitiv semidefinite, poz definite, (chiar cele nesimetrice), ca și cele tare (slab) dominante pe linii sau coloane, $\in P_0$.

Un alt rezultat care ar putea folosi

$\boxed{\text{Teorema 6}}$: A dominantă $\Rightarrow A$ pozitiv semidefinită

$\boxed{\text{Teorema 7}}$ A tare dominantă pe linii sau coloane $\Rightarrow A \in P$ (și deci lui P_0) (pentru acestea $\det A \neq 0$)

$\boxed{\text{Teorema 8}}$ Dacă A e tare dom pe coloane și B slab dominantă pe coloane, atunci $\underline{A^{-1} B \in P_0}$ și analoaga pentru ~~[illegible]~~ linii (schimbarea coloane $\rightarrow$ linii).

Dacă A e tare dom pe coloane și B e tare dom pe coloane, atunci $\underline{A^{-1} B \in P}$

(și analoaga pentru linii

4) Aplicații

Teoremele precedente, pot oferi în cazuri practice metode noi de verificare a condiției $A \in P_0$ (resp. $A \in P$). Iată un exemplu, în unghiurile cu transpoziții:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^1 \\ -\alpha_t^1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \; T_p = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r^k \\ -\alpha_t^k & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_r^k, \alpha_t^k \in (0, 1)$$

$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p + I_q$ adică:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_r & & & & & \\ -\alpha_t & 1 & & 0 & & & \\ & & 1 & -\alpha_r^2 & & & \\ 0 & & -\alpha_t^2 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

și este evident că matricea T e o matrice evident tare dominantă și pe linii și pe coloane, căci

$$\begin{aligned}
t_{11} &= 1 > \sum_{j \neq 1}^{n = 2p+q} |t_{1j}| = |\alpha_r^1| \\
t_{22} &= 1 \geq \sum_{j \neq 2}^{n} |t_{2j}| = |\alpha_t^1| \\
&\dots \\
t_{2p-1} &= 1 \geq \sum_{j \neq 2p-1}^{n = 2p+q} |t_{2p-1,j}| = |\alpha_r^{2p-1}| \\
t_{2p} &= 1 > \sum_{j=1} |t_{2p,j}| = |\alpha_t^{2p}| \\
t_{2p+1} &= 1 > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2p+1}}^{n} |t_{2p+1,j}| = 0 \\
&\vdots \\
t_{2p+q} &= 1 > \sum_{j \neq 2p+q} |t_{2p+q,j}| = 0
\end{aligned} \qquad (78)$$

și analog pe linii. Deci avem rezultatul:

Rezultatul 1: Matricea T este tare dominantă pe linii și pe coloane.

Absolut analog se poate stabili pt $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_{p+q}$

Rezult 1': Matricea R este slab dom pe col (linii)

Din teorema 7 mai deducem că $T \in P$. Ceea ce este mai interesant de remarcat în cazul ecuației stabilite (61 de ex)

$$F(v) + T^{-1}Gv = T^{-1}B \qquad (61)$$

este că T nu este o matrice simetrică. Astfel, nici T^{-1} nu e simetric, și deși G este în general simetrică, caracteristicul multiplicativ liniar $T^{-1}G = A$ nu este simetrică.

Acesta e un fapt care a generat teoria clasei P_0, căci dacă A ar fi fost simetrică, $A \in P_0 \Rightarrow A$ pozitiv semidefinită (v. T4) caz în care s-ar fi putut folosi teoremele A ori calitative privind ecuația (64):

$$F(v) + Av = B \qquad (64)$$

care cereau (Sandberg, Willson) ca A să fie poz. semidefinită.

O primă generalizare care să evite în măsura eventuală asimetria a lui A, a fost considerarea clasei matricelor dominante pe linii sau coloane. Willson a obținut rezultate calitative pentru astfel de matrici.

Mai apoi, s-a găsit clasa P_0, cuprinzând cazurile precedente, care s-a dovedit clasa cea mai largă în care puteau fi obținute anumite rezultate calitative (așa cum se va vedea în continuare). De remarcat în acest sens analiza de la pag. 137, unde s-a demonstrat (T2) un fapt foarte interesant.

Mai recent s-a arătat că pentru $F \in E^2$, clasă în care modelele tranzistorului se înscriu, $A \notin P_0$ atrage

automat reprezentarea soluției ecuației pentru anumiți B !
(vezi dem. de mai acolo)

Aceasta ne face să remarcăm importanța clasei P_0, pentru analiza ecuațiilor circ. cu tranzistori.

Să mai observăm că, conform teoremei 8, dacă am putea dovedi că G e slab dominantă pe coloane (linii), am avea automat $T^{-1} G = A \in P_0$, căci T e tare dom. pe coloane. Aceasta poate fi luată ca o demonstrație paralelă a faptului că în exemplul din fig 27, $A \in P_0$ căci acolo $G = \begin{pmatrix} G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_1+G_2+G_3 \end{pmatrix}$ este în mod evident slab dominant pe coloane:

$$\begin{cases} G_3 \geq G_3 = |-G_3| \\ G_1+G_2+G_3 \geq |-G_3| = G_3 \end{cases}, \text{ deci}$$

Rezultat 2 : Circuitul din fig 27 are $A \in P_0$, și deci soluția sa, dacă există este unică.

Totuși, în general G nu va satisface condiția de slabă dominanță pe coloane. Ca urmare, ne-am mai putea gândi la înmulțirea la stânga a relației (64) cu o matrice diagonală $D > 0$, a.î. să obținem

$$~~DT~~ \quad DT\,F(v) + DGv = DB \qquad (78)$$

(ecuație identică cu cea dată, căci $\det D \neq 0$).
unde vom încerca să-l facem pe DT și pe DG (tare (resp. slab)) dominante pe coloane.

Aceasta ar însemna:

$$DT = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{2p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_r & & \\ -\alpha_t & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1\alpha_r & & & \\ -d_2\alpha_t & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{2p+1} & \\ & & & & \ddots \; d_{2p+q} \end{pmatrix} = DT$$

și condiția de ~~slabă~~ tare dom pe coloane ar deveni

$$d_1 \geq d_2 \alpha_t \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} \geq \alpha_t$$

$$d_2 \geq d_1 \alpha_r \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} \leq \frac{1}{\alpha_r}$$

Deci și analoagele până la d_{2p-1}, d_{2p}.

Pentru $d_{2p+1}, \dots d_{2p+q}$ nu avem nici o restricție.

Deci în rezumat d-urile satisfac:

$$\boxed{\alpha_t \leq \frac{d_{2k-1}}{d_{2k}} \leq \frac{1}{\alpha_r}} \quad (80) \quad k = 1 \dots p.$$

și dorim ca DG să fie slab (tare) dom pe coloane.

Def Clasa matricelor G, care vor permite ca DG să fie slab (tare) dom pe coloane pentru D satisfăcând (75) (tare) (D e un d. diagonal) se va nota cu $\boxed{\text{clasa } \mathcal{D}^{(1)}}$. Este evident ~~că~~ și ~~slab tare~~ că prin înmulțirea cu matricea D particulară, se va trasforma ecuația cu $A^1 \in P_0$, și ~~să~~ se vor putea aplica diversele teoreme cali- ~~tative~~. Mai mult încă, clasa $\mathcal{D}$ are proprietăți importante și în ceea ce privește ~~s~~ calculul rai- numericeî transformării (v [O]) (v cap 5, ap B)

Pentru exemplul nostru este evident că pentru

d_1 ~~≥ 1 și d_2~~ $\left.\begin{matrix} d_2 = 1 \\ \frac{1}{\alpha_r} > d_1 > 1 \end{matrix}\right|$, $\alpha_t < \frac{d_1}{d_2} < \frac{1}{\alpha_r}$ și pe de altă parte $DG = \begin{pmatrix} d_1 G_3 & -d_1 G_3 \\ -\cancel{d_2} G_2 & \cancel{d_2} (G_1+G_2+G_3) \end{pmatrix}$ a devenit tare

dominantă pe coloane, dacă

$$d_1 G_3 > |\cancel{d_2} G_3| \quad (d_1 > 1) \quad (d_1 > d_2$$

$$G_1+G_2+G_3 > d_1 G_3 \quad \text{pentru} \quad G_1+G_2 > G_3(d_1-1)$$

$$\Rightarrow d_1 < \frac{G_1+G_2+G_3}{G_3} = 1 + \frac{G_1+G_2}{G_3}.$$

Deci vom alege pe d_1 din

$$1 < d_1 < \min\left\{\frac{1}{\alpha_r}, \frac{G_1+G_2}{G_3}\right\}$$

$d_2 = 1$,

vom înmulți ecuația $TF(v) + Gv = B$ cu $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ la stânga și vom obține una nouă echivalentă,

$$\tilde{T}F(v) + \hat{G}v = B$$ în care $\tilde{T}$ și $\hat{G}$ sunt

tare ~~(cu proprietatea)~~ dominante pe coloane, deci $\tilde{T}^{-1}\tilde{G} \in P_0$

și de aici avem concluzia de existență și unicitate, atît pentru noua ecuația nouă, cât și pentru cea inițială.

(5) ~~Vom mai nota~~

(5) Clase de funcții F

Vom ~~Pentru acest~~ rezuma aici diferitele ipoteze calitative mai importante care s-au făcut asupra lui F.

Mai întîi:

$F \in \mathcal{F}^n$ — dacă $F = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix}$ e o aplicație diagonală, (d0)

iar $f_k(x_k)$ este o funcție ~~continuă~~ strict crescătoare și surjectivă

$R \xrightarrow{f_k} R$.

(E) Rezultate privind existența și unicitatea soluțiilor ecuației $F(x)+Ax=B$

Spațiul restrâns mă va obliga să nu dau din teoremele care urmează. Sper că parcurgerea capitolului 3, a făcut să se întrevadă esența acestor teoreme.

S-au stabilit rezultate din ce în ce mai generale, pentru matrici A pozitiv semidefinite (Minty), apoi tare dominante pe linii (Wilson) și în final pentru $A \in P_0$. Această clasă s-a dovedit a fi cea mai generală la care se pot da rezultate definitive.

Mai menționez că multe din aceste rezultate pot fi obținute și prin simple particularizări a teoremelor generale (v pag 9A) din spațiul R^n.

(1) (1)

Teorema 1 (existență și unicitate)

Ecuația $F(x)+Ax=B$ are o soluție, unică $\forall B \in E^n$

dacă:
1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}^n$ (diode surjective de ex. - fig 9 -
2) A pozitiv semidefinită

sau:
2') A slab dominantă pe linii.

Teorema 2 (unicitate)

Ecuația $F(x)+Ax=B$ are cel mult o soluție, $\forall B \in E^n$

dacă
1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ (diode standard de ex. fig 9) - în general strict crescătoare)
2) A pozitiv semidefinită

sau
2') A slab dominantă pe linii

Aceste teoreme au loc mai generalizate:

Teorema 3 (Existenţă şi unicitate)

Ecuaţia $F(x) + Ax = B$ (în R^n), unde

1) $F \in \mathcal{F}^n$

~~atunci admite~~ are o soluţie, unică $\forall B \in R^n$ dacă şi numai dacă:

2) $A \in P_0$ . . ______ .

Corolar 1 (Existenţă şi unicitate)

Ecuaţia $F_1(x) + A F_2(x) = B$, cu

1) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^n$

are o soluţie, unică $\forall B \in R^n$ dacă şi numai dacă

2) $A \in P_0$

Corolar 2 (Existenţă şi unicitate)

Ecuaţia $F_1(x) + A F_2(x) = B$, cu

1) $F_1 \in \mathcal{F}^n$, $F_2 \in \mathcal{F}_0^n$ sau 1') $F_1 \in \mathcal{F}_0^n$, $F_2 \in \mathcal{F}^n$

are o soluţie, unică $\forall B \in R^n$, dacă:

2) $A \in P$. ______ .

(Observaţie: — $\mathcal{F}_0^n$: (aici) — f-ţii strict crescătoare: $R^n \to$ mult. convexă
— : această condiţie nu e necesară)
— dacă particularizăm $F_2 = x \in \mathcal{F}^n$ obţinem

Corolar 3'' (Existenţă şi unicitate) Ecuaţia $F(x) + Ax = B$ cu

1) $F \in \mathcal{F}_0^n$

are o soluţie, unică $\forall B \in R^n$, dacă

2) $A \in P$. . ______ .

(condiţia 2 era doar suficientă).

iar dacă ~~F~~ — dacă în cor 2. particularizăm $F_1 = x \in \mathcal{F}^n$

obţinem:

$\boxed{\text{Corolar 4}}$ (Existența și unicitate) Ecuația $x + A F(x) = B$, cu

1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$

are ~~∃!~~ o soluție, oricare $\forall B \in R^n$ dacă

2) $A \in P$.

$\boxed{\text{Teorema 4}}$ (unicitate)

Ecuația $F(x) + Ax = B$ unde

1) ~~Dacă~~ $S = S_1 \times \dots \times S_n$, cu S_i o submulțime a lui R și $f_k(x) : R \to R$ și e strict crescătoare pe S_i, ceea ce putem nota pe scurt $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n(S)$

2) $A \in P_0$

atunci există cel mult o soluție a ecuației (1) în S.

(Să remarcăm că această teoremă poate sta la baza „procedeelor de prelungire")

Un caz particular al ei este: (pentru $S_1 = \dots = S_n = R$)

$\boxed{\text{Corolar 5}}$ (unicitate)

Ecuația $F(x) + Ax = B$, în care

1) $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$

2) $A \in P_0$

atunci $\forall B \in E^n$, ∃ cel mult o soluție a ei

(vezi legătura cu corolarul 3. Ne putem întreba care este de fapt condiția cea mai slabă care ne asigură existența și unicitatea soluțiilor lui $F(x) + Ax = B$. Teoremele ce urmează vor oferi răspunsul)

Ca un exemplu de aplicare a teoremei lui Palais, realizăm ușor rezultatul următor, destul de legat de T3, care are numai ca să mai fie și dimensiunile (dovedim e un rezultat mai slab:

Teorema 3' Ecuația $F(x)+Ax=B$ unde

1) $F\in\tilde{\mathcal{F}}^n$ și își are derivabila

are o soluție unică $\forall B\in R^n$ dacă și numai dacă

2) $A\in P_0$

. ________ .

Teoremele care urmează sunt noi extensii ale celor precedente, permițând o mai mare latitudine asupra domeniului (sau codom.) funcției.

Astfel în $\tilde{\mathcal{F}}^n(S)=\tilde{\mathcal{F}}^n(\alpha,\beta,R^n)$ sau $\tilde{\mathcal{F}}^n(R^n,\alpha,\beta)$ (respectiv $\tilde{\mathcal{F}}_0$) pot fi cuprinse cazurile unor funcții diverse (v fig 14, 13 de ex). (v pag 240)

$S=(\alpha_1,\beta_1)\times\dots\times(\alpha_n,\beta_n)$
$-\infty\le\alpha_i\le\beta_i\le\infty$ $(\alpha_i,\beta_i)\in\bar{R}$ $\Rightarrow\alpha\ne\beta$

Teorema 3'' (Existență și unicitate) Fie ecuația $F(x)+Ax=B$

Pentru vectorii $\alpha<\beta\in\bar{R}$ (adică $\alpha_i<\beta_i\ \forall i$) cuprinși în $\bar{R}$ $(R\cup\{-\infty,\infty\})$ și

1) $F\in\tilde{\mathcal{F}}^n(\alpha,\beta;R^n)$

atunci există o soluție, unică, $\forall B\in R^n$ ~~dacă~~ d.d.n.d.

2) $A\in P_0$.

. ________ .

~~Teorema~~ **Corolar 1''** (Existență și unicitate), fiind ecuația $F_1(x)+AF_2(x)=B$

unde 1) $F\in\tilde{\mathcal{F}}^n(\alpha,\beta,R^n)$ $\alpha<\beta\in\bar{R}$

atunci există o soluție unică a și $\forall B\in R^n$ d.d.n.d:

2) $A\in P_0$

. ________ .

Și corolarele 2, 3, 4 au evidente generalizări asemănătoare.

Mai important însă este un rezultat:

Teorema 5 existenţă şi unicitate (vezi şi corol. 10 – pag 296)

A) Pentru $\alpha < \beta \in \bar{R}$, ecuaţia $F(x) + Ax = B$ are o soluţie unică $\forall B \in R^n$ şi

1) $F \in \tilde{F}^n(R^n, \alpha, \beta)$ (caz particular din $\tilde{F}_0^n$)

atunci dacă şi numai dacă:

2) $A \in P_0$ şi $\det A \neq 0$.

B) Pentru $\alpha < \beta \in \bar{R}$, ecuaţia $F(x) + Ax = B$ are o soluţie unică $\forall B \in R^n$ şi

1) $F \in \tilde{F}^n(R^n, \alpha, \beta)$ dacă

2) $A \in P_0$ şi $\det A \neq 0$.

Această teoremă va fi de mare folos practic, la generalizarea rezultatelor precedente specificând o condiţie mai ~~fină~~ generală, pentru asigurarea existenţei şi unicităţii. ($A \in P_0$ şi $\det A \neq 0$ e mai generală decât $A \in P$ din Corolar 3)

(2) (2) Neliniaritatea standard a tranz. se înscrie deci şi în clasa funcţiilor $\tilde{F}^n(R^n, \alpha, \beta)$. Totuşi ele mai au şi alte proprietăţi particulare, care sunt specificate în teorema care urmează:

Teorema 6 (existenţă şi unicitate) Ecuaţia (61) $\boxed{F(x) + T^{-1}Gx = B}$ (datorată la circ. cu tranzistori), are pentru orice $B \in R^n$ şi orice F a.î.

1) $F \in \Sigma^n$ şi $F \in \tilde{F}_{00}^n$ – condiţii independente de modelarea standard a diodelor)

~~(adică~~ (mai clar: $f_k \in \Sigma^n$ (v (84)) – continue + ~~imp~~ imagini rel din (84)) | pag 259 şi $f_i : R \to (-\alpha_i, \beta_i')$, $(-\beta_i, \infty)$, cu $\beta_i > 0$; $f_i(0) = 0$ şi f_{2p}, f_{2p-1} au mărginirea în aceeaşi parte; f sunt crescătoare deci $T^{-1}G \in P_0$. Unicitatea soluției (dacă există) este astfel garantată (v. Cor 5)

În cea ce privește existența, se aparent că, din cauză că $\det G = 0$, vor exista *în mod cert*, valori ale lui B care vor face ca ecuația să nu aibă soluție.

Dacă aceste valori sunt admisibile, sau obținabile în realitate, aceasta este altă problemă. Să arătăm deocamdată că este justă concluzia trasă

Este suficient să adunăm cele două relații și obținem: (presupunem că $\alpha_F = 0.5$, $\alpha_R = 0.9$, $G = 5$, 5 mhos
~~$k_1(v_1) + B k_2(v_2$~~

$$\begin{bmatrix} k_1(v_1) \\ k_2(v_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 18 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}$$

(adunând relațiile)

$$\Rightarrow k_1(v_1) + 5 k_2(v_2) = 10(i_a + i_b)$$

și cum
$$k_1 = -i_{es}\left(e^{-\frac{v_1}{mKT}} - 1\right)$$
$$k_2 = -i_{cs}\left(e^{-\frac{v_2}{mKT}} - 1\right)$$
(i_{es}, i_{cs} curenți de saturație)

este evident că $k_1 + 5k_2 < i_{es} + 5 i_{cs}$

Așadar, pentru $\boxed{i_a + i_b \geq \frac{i_{es} + 5 i_{cs}}{10}}$, în mod evident nu există soluție

(3) **Considerații energetice**

În exemplul de mai sus am văzut că prezența surselor de curent din fig 15 face să nu existe soluție, uneori. Wilson și Sandberg au reușit să demonstreze un rezultat foarte tare, pornind de la cerința ca să nu fie admise surse de curent în circuit.

Acest rezultat, nu poate fi stabilit în contextul general al elaborărilor lăsate până acum matricelor T, G și funcțiilor F. Mai exact, se pornește de la cerința fizică impusă din punct de vedere energetic unui tranzistor, de a fi, (global vorbind) un element pasiv. Aceasta atunci exprimă o restricție de genul:

$$\alpha_r^{(k)} \le \frac{m_{2k+1}}{m_{2k}} \le \frac{1}{\alpha_k^{(k)}}$$

$$\alpha_r^{(k)} \le \frac{m_{2k+1}}{m_{2k}} \le \frac{1}{\alpha_k^{(k)}}$$

$$k = 1, \dots, p$$

$\boxed{(P_t)}$ (Restricții de pasivitate a tranzistorului)

unde $t_k(v_k) = m_k \exp[(m_{k_f} v_k) - 1]$

Tot pe considerente energetice, se ajunge la concluzia că multiportul liniar, la rândul său, respectă o restricție, adică: $\boxed{\langle v, i \rangle \geq 0}$

dacă $i = Gv$ (nu sunt aferente surse independente).

Aceasta condiție implică $\langle v, Gv \rangle \geq 0 \ \forall v$, deci că G este pozitiv semidefinită (P_l) (Pasivitatea părții liniare)

În aceste condiții (P_t), (P_l), s-a stabilit următoarea teoremă (t. fără):

$\boxed{\text{Teorema 7}}$ (Existența) Ecuația $\boxed{TF(x) + Gx = b}$, (61) care caracterizează un circuit, cu tranzistoare, diode modelate Eb-Moll, rezistoare liniare, și surse de tensiune, dacă:

Dacă — nu sunt prezente surse de curent

— funcțiile F nu numai că satisfac condiția P_t de pasivitate a tr.

— matricea G e pozitiv semidefinită,

Atunci circuitul are cel puțin o soluție !

Discuția de mai sus ne-a arătat că practica va impune condiții energetice care fac ca toate condițiile teoremei să fie aplicabile! Dacă vom mai observa că, așa zisele „surse de curent" sunt de fapt grupări de elemente ~~[illegible]~~ permise în ipotezele teoremei, ajungem la concluzia că, înlocuind „sursele de curent" cu configurația lor reală, ~~[illegible]~~ ecuațiile matematice ale circuitului rezultat au întotdeauna măcar o soluție. Este un rezultat foarte valoros care poate fi combinat cu diverse teoreme de unicitate, în general mai ușor de verificat. Atunci când: se presupun acum diodele și tranz. modelați corect după energie (adică se satisface P1 și la fel, G se impune a fi poz. semidefinită (se satisface P2).

4 În cazul în care nu intrăm în astfel de detalii privind modelele, sau presupunem și prezența surselor de curent, nu vom putea aplica teorema 7. Facem apel la teorema 6.

Dacă nici aceste condiții nu sunt îndeplinite (de exemplu nu știm că $F \in \mathcal{E}^n$ sau, dacă ecuația nu este în forma (6) $\boxed{F(x) + T^{-1} G x = B}$ de exemplu pentru ecuația (62) (6.2) $\boxed{F(x) + T^{-1}(I+GR)^{-1} G x = B}$ (unde am ținut cont de prezența rezistențelor de terminal), mai ...

în cazul general al ecuaţiei $F(x)+Ax=B$, şi aş numi eventual legarea rezultatelor teoremei 5.

Astfel cazul particular al T5, cel în care F sunt modelate standard $F\in \mathcal{F}_{00}^{n}$, ar apare:

$\boxed{\text{Corolar 6}}$ — Existenţă şi unicitate: ~~Dacă~~ F ecuaţia $F(x)+Ax=B$, unde

1) $F\in \mathcal{F}_{00}^{n}$

2) are o soluţie unică, dacă

2) $A\in P_0$ şi are $A\neq 0$.

Pornind de la acest corolar, s-a rezolvat forma particulară (62) $\boxed{F(x)+T^{-1}[I+GR]^{-1}G\,x=}$ $\left(\hat{T}^{-1}[I+GR]^{-1}B\right)$ s-a luat o descriere mai de detaliu

Stabilindu-se în prealabil lema:

$\boxed{\text{Lema 1}}$ — Dacă T este suma directă a n matrici 2×2 şi a matrici 1×1, tare dominantă pe coloane

— R suma directă a n matrici 2×2 şi a matrici 1×1, strict dominantă pe linii

— R simetrică

— G e matrice de ordin $2p+q$ (n). Atunci:

(1) G pozitiv semidefinită $\Rightarrow$ $\det[I+GR]\neq 0$, deci există $[I+GR]^{-1}$.

(2) G dominantă $\Rightarrow$ $T^{-1}[I+GR]^{-1}G\in P_0$

(3) G tare dominantă $\Rightarrow$ $T^{-1}[I+GR]^{-1}G\in P$.

În legătură cu această lemă sunt de observat următoarele aspecte:

Condiția ca G să fie poz. semidefinită este întotdeauna îndeplinită în practică, lucrul care reiese din condițiile de pasivitate a multiportului liniar.

G este simetrică, multiportul liniar fiind reciproc, așa că pentru G, dominanța pe linii (col) devine automat dominanță. Atunci G este și pozitiv semidefinită (T 6 B) și ca urmare este satisfăcut (1).

~~Condiții~~ Există o evidentă legătură între Lema 1 și teorema 8 B (pag 253). Aici, s-a obținut suplimentar, datorită caracterului particular a lui T și R posibilitatea inversării $[1+GR]$.

Cred că este suficient importantă această lemă. Ea oferă pentru ecuația (62) rezultate imediate, din aplicarea Corolarului 2, 5, Teoremelor 4, 6:

Teorema 8 Pentru ecuația $F(x) + T^{-1}[1+GR]^{-1}Gx = u$,

1) Ea se poate scrie oricând $\forall\, G$, căci $(1+GR)^{-1}$ există pt că G e poz. semidefinită

2) Dacă G e dominantă, $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ $\Rightarrow$ ecuația are cel mult o soluție.

3) Dacă G e dominantă, $F \in \tilde{\mathcal{F}}^n$ $\Rightarrow$ ecuația are o soluție, unică

4) Dacă G e tare dominantă, $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ $\Rightarrow$ ecuația are o soluție unică

5) Dacă G e dominantă, $\det G \neq 0$, $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ $\Rightarrow$ ecuația are o soluție unică.

5) Teoremele (6) și (7) se referă la ecuația (G1) sau (8) la (G2):

$$\begin{cases} (G1) & F(X) + T^{-1} G X = B \\ (G2) & F(X) + T^{-1}(I+GR)^{-1} G = u \quad \left(u = T^{-1}(I+GR^{-1}B)\right) \end{cases}$$

și este interesant (pentru aplicația nr 1 din cap 5 de exemplu) de remarcat legătura dintre ele.

În primul rând am putea de aplica teorema 6[5] lui (G1) arătând că $T^{-1}G \in P_0$, folosind $T \otimes B$, adică faptul că T e tare dominantă pe coloane, iar G slab dominantă pe coloane (din cauza semidominantă) Dacă facem astfel, rezultă necesar și în cazul de aplicabilitate a teoremei 6, deci

$\boxed{\text{Teorema 9}}$ Oricând putem arăta o teoremă (existenței și unicitate, unicitate) pentru ~~teorema~~ ecuația (G1) și matricea G este dominantă, teorema va fi valabilă și pentru G2 !

Deci: dacă G e dominantă, putem adăuga la terminalele ~~dispozitivelor~~ tranzistoarelor (diodelor, ...) orice rezistență de terminal, fără a modifica rezultatele calitative privind ecuația

O altă teoremă asupra condiției asupra nu mai este cere ca G să fie dominantă, în schimb cere ca $T^{-1}G$ să aparțină lui P_0, nu numai pentru α_r, α_f dați ci pentru $\forall\ \alpha_r, \alpha_f \in (0,1)$. Se notează cu $\boxed{\mathcal{T}}$ - mulțimea matricelor T, cu α_r^k, α_f^k variabili între (0 și 1) și se aceasta:

$\boxed{\text{Teorema 10}}$ Dacă (G1) are o soluție unică $\forall \tau \in J$, $\forall B \in \hat{R}$ și $\forall \tilde{F}^n(R^n, \alpha, \beta)$, pentru $\alpha < \beta \in \hat{R}$, atunci același lucru e valabil pentru ecuația (G2), oarecare ar fi R!

(adică orice valoare ține rez. de terminal)

Să reluăm această ecuație observând că se poate vedea ușor că pentru circuite cu tranzistori pentru care

1) G dominant dar $[I+GR]^{-1}G$ nu este dominant

2) $[I+GR]^{-1}G$ este dominant pe rând G nu este. (v art 11)

5 Un alt rezultat care poate fi exprimat de relevanță este următoarea teoremă de neunicitate:

$\boxed{\text{Teorema 11}}$ (de neunicitate)

Fie

1) $F \in \mathcal{E}^n$

2) $A \notin P_0$

atunci $\forall \sigma$ o constantă pozitivă, $\exists$ două soluții distincte ale ecuației $F(x) + Ax = B$, x și y ai

$$\|x - y\| = \sigma.$$

Această teoremă atrage atenția în mod special asupra rolului fundamental jucat de clasa P_0 în cazul circuitelor cu tranzistori standard (care $\in \mathcal{E}^n$)! Nici un fel de presupuneri suplimentare asupra fiilor f_i nu vor putea asigura unicitatea, dacă $A \notin P_0$.

(6) Până acum am văzut că am putea să răspundem la întrebarea de existență și unicitate pentru ecuația

$$F(x) + Ax = B \qquad (64)$$

, unde $F \in \tilde{\mathcal{F}}_0^n$ (diode tranzistoare)

în următoarele clase:

- A e pozitiv semidefinită
- A e slab diagonal pe coloane) T2 ⇒ ∃ și unică
- $A \in P$ (Condiție R) ⇒ ∃ și unică
- $A \in P_0$ ⇒ unicitate (cor 5)
- $A \in P_0$ și $\det A \neq 0$ ⇒ ∃ și unică (T 5)

(Rezultatele teoremei cu modelare Ebers Moll a tranzistorilor și diodelor, condiții pe care poate un circuit să le respecte, cum ar fi de exemplu în cazul prezenței unor alte tipuri de diode: ~~tunel~~, Zener etc.

(~~Teorema 11, și cu aproximarea~~ la ε^n)

Ne punem acum întrebarea: nu putem găsi teoreme care să permită condiții mai largi decât

$A \in P_0$, $\det A \neq 0$ (care e cea mai largă de până acum)

pentru a asigura existența și unicitatea soluției?

Teorema 11 ne atrage atenția că nu putem renunța la $A \in P_0$, care „strică" unicitatea. De aceea se va găsi o clasă mai largă, $A \in P_0$ dar $\det A = 0$ care să permită totuși un răspuns bun la întrebarea de unicitate.

Aceasta este cea mai largă clasă pe care se cunoaște până acum: clasa $\overline{P_0}$, iar teoremele care urmează au stabilite prin demonstrații foarte diferite, care implică folosirea teoremei lui Palais.

$\boxed{\text{Definiția}}$

Clasa matricelor cu proprietățile:

1) $A \in P_0$

2) $\forall$ ar fi o matrice diagonală $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ cu $d_{ij} = \pm 1$

există un vector reap ρ a.î. $\rho > 0$ și $DA^{tr}D\rho \geq 0$ se numește $\boxed{\overline{P_0}}$

$\boxed{\text{Lema 1}}$

1) O matrice reală simetrică pozitiv semidefinită, $\in \overline{P_0}$

($M \in P_0$ simetrică $\in \overline{P_0}$)

2) Dacă P și Q sunt două matrici a.î.:

$\left.\begin{array}{l} P - \text{tare dominantă pe coloane} \\ Q - \text{slab dominantă pe coloane} \end{array}\right\} \Rightarrow P^{-1}Q \in \overline{P_0}$

(v legătura cu T8 – p. B)

In acest context au fost stabilite teoremele care urmează, în care lui f_i i se cere să fie strict crescătoare, deci de R pe $\left| \begin{array}{l} \to (-\infty, \beta_i) \\ \to (-\beta_i, \infty) \\ \text{cu } f_i(0) = 0 \end{array} \right.$ $\beta_i > 0$ Notații $f \in \hat{\mathcal{F}}^{m}_{00}$

sau $f : R \to$ pe R $\qquad f \in \hat{\mathcal{F}}^{m}$

(adică situațiile din figura 10 a, b, c pag 278). Există chiar o variantă care permite și cazul din fig 10d.

Oricum se notează toate aceste funcții cu N^n

$\boxed{\text{Teorema 12}}$ (Existența și unicitatea)

Pentru ecuația $F(x)+Ax=B$, dacă există o soluție, unică$^{0)}$ $\forall B\in R^n$ d.s.n.d (dacă și numai dacă), mulțimea S, dacă mai jos era vidă

pentru:
1) $F\in N^n$
2) $A\in \overline{P_0}$

$$S=B(F)\cap\mathcal{N}(A)$$

Dacă S nu e vidă, pentru un $q\in S$ și $\forall F\in N^n$ ales astfel încât toate componentele lui $F(\alpha q)$ sunt mărginite pentru $\alpha\in[0,\infty)$ sau $\alpha\in(-\infty,0]$ ecuația nu are soluție, pentru unii B.

Observații

1) Dacă $\det A\neq 0$, $\mathcal{N}(A)$ = spațiul nul a lui A (mulțimea acelor x pentru care $A\cdot x=\theta$) este vidă, deci S e vidă și se obține TSB

2) $B(F)$ – domeniul de mărginire a lui F (vezi pag 238)

3) Condiția $f_j(0)=0$, necesară în demonstrația teoremei poate fi totuși depășită, printr-o translație a necunoscutei x, chiar dacă $f_j(0)\neq 0$.

Deci observația 1 duce la

$\boxed{\text{Corolar 7}}$ Dacă

1) $F \in N^{n}$

2) $A \in P_0$ și $\det A \neq 0$

atunci ecuația $F(x) + Ax = B$ are o soluție unică

Mai mult, dacă am putea să și eventual că $A \in \bar{P}_0$, cu condiția ~~det A~~ ca $B(F) = \Theta \Rightarrow F \in \hat{F}^{n}$ și obținem din nou că, pentru $F \in \hat{F}^{n}$, $A \in \bar{P}_0$, (mai puțin general ca T5') ecuația are o soluție unică.

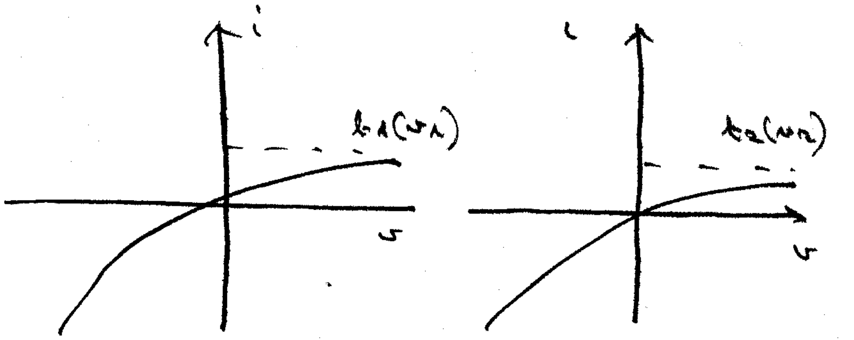
Teorema 12 va fi utilă atunci când deși există G, $\det G = 0$. Am văzut însă că aceasta echivalează cu a cere să nu existe matricea impedanțelor de gol. Altfel spus: (în termenii de circuit): circuitul rezistiv pasivizat oferă porților din tăietură măcar un drum deschis. Mai clar: dacă există o poartă, care atunci când celelalte sunt lăsate în gol, nu are un drum rezistiv prin care să se închidă curentul injectat la borne.

Deși formularea teoremei 12 poate părea greoaie ideea este simplă:

– se rezolvă ecuația $Ax = \Theta$, soluțiile formând subspațiul $\mathcal{N}(A)$

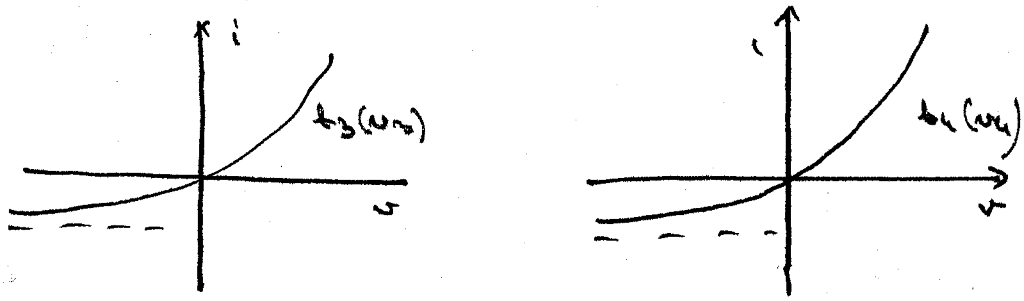
– se verifică direct, dacă este posibil ca un element oarecare din $N(A)$ să aibă toate elementele în $B(F)$ (adică toate componentele să fie în porțiile unde F este mărginită).

Iată un exemplu:



– fig 17

– fig 18



(de exemplu pentru un circuit cu 1 tr npn și unul pnp)

Avem evident:

$i_1 = [0, \infty)$ $\quad i_2 = [0, \infty)$ $\quad i_3 = (-\infty, 0]$ $\quad i_4 = (-\infty, 0]$

$B(F) = i_1 \times i_2 \times i_3 \times i_4$

Vom analiza matricea $A = T^{-1}G$.

Dacă $\left.\begin{array}{l} A \in P_0 \\ \det G \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ există o soluție unică $\forall B \in R^n$ (T7)

Dacă $A \notin P_0$ $\Rightarrow$ există B-uri ce duc la 2 soluții (T11)

Dacă $\left\{\begin{array}{l} A \in P_0 \\ \det G = 0 \end{array}\right.$ (adică multiportul liniar rezistiv nu are la porțile lui matrice impedanță de gol) vom folosi teorema 12

In precedent arătăm că $T^{-1}G \in \overline{P_0}$. Pentru exemplul model din cap 3, aceasta rezultă simplu din faptul că T e tax dom pe coloane, G zlab dom pe coloane şi din lema 2.

Acum, putem aplica T12. ~~Tot se trebuie vori~~ Avem următorul rezultat practic:

ecuaţia are soluţii (unice) dacă şi numai dacă:

$S = N(A) \cap B(F) = \{\theta\}$, ~~dar~~ sau:

$N(A) \cap R = \{0\}$ unde $R = [0,\infty)\times[0,\infty)\times(-\infty,0)\times(-\infty,0]$

Deci, practic vom face astfel: rezolvăm ecuaţia

$Ax = \theta$, şi găsim formulele pentru spaţiul $N(A)$.

Verificăm acum că nu este posibil ca $x \in N(A)$ să se încadreze şi în R.

Iată de exemplu (pe cazuri particulare)

Soluţia generală a lui Ax: $\underset{x_1}{\alpha}, \underset{x_2}{-3\alpha}, \underset{x_3}{4\beta}, \underset{x_4}{-5\beta}$, unde (A e de rangul 2) nu se poate încadra evident în R, decât dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Deci şi acest caz, rezultă riguros că $S = \{0\}$ şi deci de unicitatea ecuaţiei

Soluţia: $\overset{x_1}{\alpha}, \overset{x_2}{\beta}, \overset{x_3}{-2\alpha}, \overset{x_4}{\gamma}$ permite valoarea de ilustrare $(1, 1, -2, -1) \in R \cap N(A)$ şi ca atare rezultă riguros că ecuaţia nu are soluţie pentru unii B şi pentru $\forall$ f-urile alese ca să fie domeniul R

$\boxed{\text{Explicaţie}}$

$F(a\alpha, a\beta, a(-2\alpha), a\gamma)$ pentru $a \to \infty$ este mărginit

iar $A \cdot [a\alpha, a\beta, a(-2\alpha), a\gamma]^t = \theta$ pe $a \to \infty$, deci

$F[\ldots] + A[\ldots] \le M$ şi nu are soluţii pt $B \to \infty$

(8) ~~Am dori să~~ Vom relua acest paragraf cu o ~~...~~ direcție.

privind cazul în care multiportul, liniar, are matricea G,

nu putem analiza ~~nu poate fi analizat~~ ecuația circuitului cu nici una dintre

teoremele precedente. (Vezi discuția de la pag 245 privind

interpretarea de circuit).

Metoda 1

În primul rînd să marcăm faptul că, prin procesul

trecerii elementelor rezistive din terminal pe seama circuitului respectiv, putem evita întotdeauna această situație.

(v fig 15 pag 246)

Metoda generală 1

Astfel, am putea obține ~~...~~ întotdeauna, un multiport neliniar, modelat rezistiv, împreună cu unul liniar care are matricea G.

Mai departe vom obține ~~...~~ ecuația

$$T F(v) + G v = B \quad (5h)$$

și ca sau $\boxed{F(v) + T^{-1} G v = T^{-1} B}$ (6h)

Astfel vom putea aplica întotdeauna, teoremele acestui paragraf, privind ecuația (6h) sau, mai general privind $F(x) + A x = B$ (6h).

Metoda 2

Totuși, era posibil ca în modelare să nu vrem să ținem cont de rez. serie ale terminalelor. Cum de obicei calculul este făcut pe aceste modele, restrînse, putem atunci să știm dacă și în acest context, sunt valabile anumite concluzii de calitate privind ecuațiile circuitului.

~~Fa~~ Dacă multiportul liniar are, în această situație o matrice G, am văzut că analiza ecuației

(58) $(G_R+i)T_iF(v)+Gv=B$ care înlocuiește pe (56), dacă o putem aduce la forma

(60) $TF(v)+(GR+i)^{-1}Gv=(GR+i)^{-1}B$

atunci discuția de la punctele 4,5 (T8, 9, 10) poate fi utilă în elaborarea unor concluzii.

~~Acum~~ Ce se întîmplă însă dacă (58) nu poate fi scrisă în forma (60), sau dacă mai general nu există matricea G?

Pentru a răspunde acestei întrebări, trebuie să ne referim la ecuații de tipul:

$$AF(v)+Bv=C. \quad (63)$$

unde ecuația (58) se încadrează în mod firesc, ecuația (60) de asemenea.

În paragrafele următoare îmi propun să arăt (foarte pe scurt), cum se analizează situația atît atunci cînd nu există matricea G, cît să se obțină tot o ecuație de tipul (63) și apoi, cum se analizează o astfel de ecuație.

~~Mai înainte însă de a trece la aceasta să mai dau o teoremă (f. tare), datorată lui Sandberg (art 14) care simplifică la maximum condițiile pe care trebuie să le verificăm~~

(7) Verificarea condiției $A \in \bar{P}_0$ poate fi în general delicată (G de ex. nu e obligat să fie dominant pe coloane). De aceea aplicarea teoremei 12 poate fi dificilă. Sandberg, pornind din nou presupunerea că tranzistorii și diodele sunt elemente pasive (global energetic) (v. pag 3), a dat o generalizare a teoremei 7, în care nu se mai cere ca să nu existe generatoare de curent. Mai precis:

$\boxed{\text{Teorema 13}}$

- dacă f_i sunt diode modelate standard $f_i = i_{sk}\exp\left(\mu_k v_k\right) - 1$, $\mu_k, i_{sk} > 0$
- tranzistorii satisfac condiția de pasivitate

$$\langle x, TF(x)\rangle \geq 0 \quad \forall x \in R$$ (vezi și Pt de la pag 268)

Atunci ecuația $F(x) + T^{-1} G x = B$ are o soluție unică $\forall B \in R^n$ dacă

1) $T^{-1} G \in P_0$

2) ~~B(F)~~ $S = B(F) \cap N(G) = \{0\}$.

Observăm că a fost slăbită condiția de apartenență la $\bar{P}_0$ în schimbul asigurării condiției de pasivitate a lui $TF(v)$.